

Morse Reductions for Quiver Complexes and Persistent Homology on the Finite-Type Commutative Ladder Quivers

エスカラ, エマソン ガウ

<https://doi.org/10.15017/1654669>

出版情報 : Kyushu University, 2015, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : Fulltext available.

氏 名	エマソン ガウ エスカラ
論 文 名	Morse Reductions for Quiver Complexes and Persistent Homology on the Finite-Type Commutative Ladder Quivers (<small>籐複体に対する離散モース縮約と有限型の可換梯子型パーシステント加群についての研究</small>)
論文調査委員	主 査 九州大学 教授 佐伯 修 副 査 九州大学 教授 白井朋之 副 査 東北大学 准教授 平岡裕章

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

今世紀に入って開発され、新たなデータ解析手法として注目されている位相的データ解析は、従来では取り扱えなかったようなデータの幾何学的特徴づけを与える点で非常に強力である。その中で特にパーシステントホモロジーは、強靱な位相的特徴を与えるための代数的位相幾何学からの道具として注目され続けている。パーシステントホモロジーは当初、多項式環上の加群として特徴づけられ、それを用いることでホモロジー生成元のフィルトレーションに関する生存時間を与えるものであった。一方最近になって、Carlsson-de Silvaにより、こうしたパーシステントホモロジーの別観点からの定式化が行われた。それはパーシステントホモロジーを A_n 型籐(quiver)の表現にとらえ、それを既約表現に分解することで生成元の生存時間を定式化するものであり、パーシステントホモロジーの理論に新鮮なアイデアをもたらした。これにより、たとえば2つのデータ集合の比較ができるようになるなど、画期的な応用も生まれた。

本学位論文は、そうした流れの中で、可換梯子型籐など、可換性を満たす籐の表現としてパーシステントホモロジーを代数的に定式化し、表現論における Auslander-Reiten 理論を応用する形でその新しい解析手法を提示している。ここで本質的に重要なのは、可換性を満たす籐を考えたことにある。論文中でも述べられているように、可換性を仮定しなければ、異なる既約表現の同型類の有限性は非常に限られた籐に対してしか成り立たないことが表現論において既に知られている。したがって、応用上意味のある手法を提示するためには、可換性を考えることが非常に重要であり、その点で本論文が提示しているアイデアは画期的であるといえる。

さて、籐とは各辺に向きがついたグラフのことであり、本学位論文では有限かつ非輪状なものを扱っている。これに対して、各頂点に複体を対応させ、各有向辺に包含写像を対応させることで、籐複体ができる。これはフィルターづけられた複体の一般化であるが、可換な籐の表現ともとらえることができる。そしてそのホモロジーを考えることで、籐複体のパーシステントホモロジーが定義される。

本学位論文では、籐の中でも応用上重要な可換梯子型籐 $CL_n(\tau)$ の場合について詳しく調べられている。そして、その Auslander-Reiten 籐を計算することで、 $n \leq 4$ のときに、それが異なる既約表現の同型類を有限個しか持たないことを示している。その具体的な形も付録において計算されており、これにより具体的な計算を可能にしている。なお、可換梯子型籐 $CL_n(\tau)$ について有

限型であるためには、 $n \leq 4$ であることが必要十分であることは、既存の表現論の結果を用いても得られるが、本学位論文では具体的に Auslander-Reiten 箎を計算して示していることにその大きな特徴がある。これにより既存のパーシステントホモロジーを可視化する重要な手法としてのパーシステント図の、可換梯子型箎バージョンを構成することが可能となる。本学位論文ではさらに、 $CL_3(fb)$ の場合に、対応するパーシステント図に対して、いくつかの意味付けも試みられている。これは異なるデータ集合の比較などをする際に新しい手法を提供するものである。

本論文ではさらに、箎上のパーシステントホモロジーの離散モース縮約についても結果を得ている。この手法は、与えられた複体のホモロジーの計算を高速化する手法で、ホモロジーを変えずに複体を簡略化するものである。Mischaikow-Nanda はこれを用いて、フィルターづけられたパーシステントホモロジーの計算手法を開発した。本学位論文ではそれを箎複体のパーシステントホモロジーへと拡張している。そして、可換梯子型箎 $CL_3(\tau)$ の場合にその離散モース縮約を実行し、パーシステントホモロジーを計算するアルゴリズムも与えている。これにより、離散モース縮約を施すことでパーシステントホモロジーの計算コストが大幅に圧縮できることも示されている。

本論文では非晶質ガラスのデータに対して、実際に計算を実行し、その解析結果の意味付けも与えている。こうして、本論文での提案手法が実データの解析に有効に使えることが実証されており、当該研究が位相的データ解析の分野に与えるインパクトが非常に大きなものであることを物語っている。今回の結果はそういった意味で非常に高く評価できる。

以上のように本学位論文では、箎複体のパーシステントホモロジーを、可換性を満たす箎の表現として定式化し、重要なクラスについて表現の有限性を示すとともに、既約表現をすべて決定し、さらにそれにより新しいパーシステント図を提唱している。こうした結果は、位相的データ解析理論のみならず、表現論、代数的位相幾何学、そして様々なデータ解析分野において大変価値のある結果であり、将来の発展も期待できる重要な業績である。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。