九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Error estimates of generalized particle methods for the Poisson and heat equations

井元, 佑介

https://doi.org/10.15017/1654668

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

(様式 6-2)

氏　　　名	井　元　佑　介
論　文　名	Error estimates of generalized particle methods for the Poisson and heat equations (Poisson 方程式と熱方程式に対する一般化粒子法の誤差評価)
論文調査委員	主査 九州大学 准教授 田上 大助 副査 愛媛大学 教　授 土屋 卓也 副査 九州大学 教　授 福本 康秀 副査 九州大学 准教授 渡部 善隆

論文審査の結果の要旨

本研究者は, Poisson 方程式および熱方程式に対して, 提案した一般化粒子法と呼ばれるある粒子法を適用した際の数値解析を行った.

粒子法は, 解析対象となる領域内に分布する粒子を近似の評価点とする数値計算手法で, 粒子間の依存関係は互いの距離によって定まる. したがって有限差分法や有限要素法などの数値計算手法と異なり, 評価点となる粒子間の依存関係を定める格子や多面体分割を予め用意する必要がない, という特徴を持つ. この特徴から, 粒子法は流体領域が時間に依存して変化する問題に対する数値計算手法の一つとして盛んに用いられており, 例えば津波の遡上問題や構造物との連成問題の数値計算を通して自然災害が我々の生活に及ぼす影響を評価するといった, 社会的な重要性の高い問題にも適用されている. しかしながら, これまでに得られている粒子法に対する数値解析学の結果は, 現実的な問題への応用が難しい特定の問題に対して, あるいは仮定の強すぎる限られた設定の下でしか適用できない結果がいくつか存在する程度で, 数値解析学の観点からはその理論体系は十分に整備されていなかった. したがって, 粒子法の信頼性を数値解析学の観点から保証し, かつ現実的な問題への応用に耐えうる理論を整備することは当該分野の発展にとって非常に重要である.

一般化粒子法では, 強形式で表されている偏微分方程式の近似を領域内に分布する粒子に対応した重み関数と呼ばれる基底関数の 1 次結合を元にして扱う. このような枠組みに含まれ, かつ実用問題に広く適用されている粒子法としては, Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法や Moving Particle Semi-implicit (MPS) 法などが知られている. さらに, 空間に予め用意された格子の格子点上に粒子を分布させることで, 有限差分法もこの粒子法の枠組みに含まれる数値計算手法と見做すことが出来る. 本研究者が提案している一般化粒子法は, 適当な設定のもとで, これら SPH 法, MPS 法, あるいは有限差分法といった強形式で表された偏微分方程式を近似する粒子法の枠組みを統一的に表現することが出来るという特徴を持つ.

本論文では最初に, 一般化粒子法で用いられる補間作用素と近似微分作用素の打ち切り誤差評価を行っている. 打ち切り誤差評価では, 考える補間作用素あるいは近似微分作用素と, 対応する参照関数のある重み付き積分との誤差が重要となる. この評価のために本研究者は, まず近似の評価点として用いる粒子をどのように分布させるか, 参照関数の台を定める影響半径をどのように選択するか, および 1 次結合の係数に必要な粒子体積をどのように選択するか, これら空間の離散化パラメータの妥当性を確認するために, 粒子分布, 影響半径, および粒子体積に関する“正則性”という

概念を提案した．これに参照関数が満たすべき十分条件を加えることで, 打ち切り誤差評価の十分条件を与えた．与えた十分条件は具体的に計算可能であり, 計算に用いる離散化パラメータの選択が妥当であるかを判断できることが特徴である．また与えた十分条件は, 従来は経験的知見に頼っていた離散化パラメータの選択に数値解析学の立場から明確な解答の一つを与えたものであり, 粒子法の数値解析において重要な知見である．

本論文では次に, Poisson 方程式に対する一般化粒子法の誤差評価を行っている．Poisson 方程式に対する粒子法の一意可解性に関して, 本研究者は粒子分布と影響半径に基づいた "h 接続性" というやはり具体的に計算可能が可能な概念を導入し, その証明を行っている．さらに影響半径が十分に小さい時には, 前述の "正則性" が "h 接続性" に対する十分条件となっていることも示している．現在, 流れ問題に対して実際に粒子法を適用する際には, その過程で Poisson 方程式が現れる．この Poisson 方程式の可解性に対する十分条件が与えられた例はこれまでになく, 本研究者が導入した h 接続性という概念は, 実際の数値計算においても重要な知見である．これらの条件を元に, 前述した打ち切り誤差評価が示す近似微分作用素の適合性と, 離散最大値原理が示す近似問題の安定性を証明することで, 最終的に, Poisson 方程式に対する粒子法の誤差評価を導いている．

本論文ではさらに, 熱方程式に対する一般化粒子法の誤差評価を行っている．熱方程式の近似には, 空間方向に前述の打ち切り誤差評価を導いた一般化粒子法に基づく近似微分作用素を, 時間方向には θ 法に基づく差分法を, それぞれ用いている．まず時間空間両方向に離散最大値ノルムを用いた場合の誤差評価を行っている．ここでも, 最終的な誤差評価に必要となる打ち切り誤差評価に基づく近似作用素の適合性, および離散最大値原理に基づく近似問題の安定性をそれぞれ証明する際に, 前述の離散化パラメータの "正則性" が証明の鍵の一つとなっている．ただし粒子法の特徴である粒子分布の柔軟性が原因となって, 例えば有限差分法などと比較してより強い離散化パラメータに関する安定性条件を必要とした．そこで本研究者は, 空間方向に離散 L^2 ノルムを用いた場合の誤差評価も行っている．証明では, まず離散逆不等式を, 再び離散化パラメータの "正則性" を用いて示した後に, 目的とする誤差評価を導いている．この際, 例えば有限差分法などと同等にまで, 離散化パラメータに関する安定性条件を弱めることに成功している．

最後に本論文では, これまでの章で得られた数値解析学の結果に対応する数値実験を行い, 理論の結果と実験の結果がよく一致していることを確かめている．本研究者が, 誤差評価を確立した計算手法の有効性を自ら数値実験によって示すことで, 提案した理論的な裏付けのある計算手法の実際の数値計算における利用を促すことが可能となっている．

本論文で対象となった固定領域上の偏微分方程式は, 粒子法の特徴を十分に活かすことのできる問題ではない．しかしながら, 冒頭にも挙げた津波遡上問題のように, 移動境界を持つ流れ問題に対する粒子法を目指す際に, 現状の基本的な粒子法の数値解析結果の整備状況は著しく十分でない．本研究者が誤差評価, 特にその十分条件である粒子分布などの離散化パラメータの満たすべき設定を明確に示したことは, 実際の数値計算において, 従来行われてきた知見にのみに頼っていた過程に明確な数値解析学からの解答を与えたものであり, その意義は当該分野において大きなものである．さらに本論文で得られた誤差評価は, 今後の目標の一つである移動境界を持つ流れ問題に対する粒子法の誤差評価の過程において, 必ず現れてくる基本的かつ重要な知見のいくつかに対応する．

以上の結果は, 偏微分方程式に対する粒子法の数値解析の分野において価値ある業績と認められる．よって, 本研究者は博士 (数理学) の学位を受ける資格があるものと認める。