Error estimates of generalized particle methods for the Poisson and heat equations

井元, 佑介

https://doi.org/10.15017/1654668

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名：井元　佑介

論 文 名：Error estimates of generalized particle methods for the Poisson and heat equations（Poisson 方程式と熱方程式に対する一般化粒子法の誤差評価）

区　　分：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では, Poisson 方程式および熱方程式に対して, 我々が提案した一般化粒子法を適用した際の数値解析を考える．粒子法は偏微分方程式に対する数値計算手法の 1 つで, 空間に配置された粒子と呼ばれる有限個の点と, 粒子毎に対応付けられた有界な台を持つ基底関数に基づいて偏微分方程式を離散化する．粒子法は空間のメッシュ分割を必要としないため, 空間のメッシュ分割に基づいて離散化する有限差分法や有限要素法では計算が困難な, 砕波を含む津波遡上のような移動境界問題に広く適用されている．

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)[1] や Moving Particle Semi-implicit (MPS)[2] に代表される偏微分方程式の強形式に基づく粒子法は, 上に述べたような津波遡上などの様々な実用問題の数値計算に広く適用されている一方で, 有限差分法や有限要素法と比較すると, その数学的な正当化は非常に遅れている．例えば, 放物型や双曲型の偏微分方程式に対する, 粒子法の一種である渦法に基づく重みを用いる SPH の誤差評価が得られている [3]．また保存則から導かれる偏微分方程式に対する, 同様の補間を用いた弱形式に基づく SPH の誤差評価が得られている [4, 5]．しかしながら, これらの粒子法は速度場から定まるヤコビアンに基づく重みを用いるため, その計算コストの高さや, 適用可能な偏微分方程式が限定される．また, 粒子分布がある正則性を満たす場合に, 一階の微分作用素に対する MPS で用いる近似作用素の打ち切り誤差評価が得られている [6]．この評価では, 正則性に用いる粒子分布の指標を数値計算することが一般に困難なので, 粒子分布が正則性の条件を満たすかどうかを確認することができない．

そこで, 我々は SPH や MPS のような強形式に基づく偏微分方程式に対する粒子法を統一的に記述できる一般化粒子法を導入し, その近似作用素の打ち切り誤差解析を行った．さらに, Poisson 方程式と熱方程式に対する一般化粒子法の誤差解析を行った．

まず, 一般化粒子法で用いる近似作用素に対する打ち切り誤差解析を考える．この近似作用素の離散化パラメータは空間に分布する粒子分布, 粒子毎に与える粒子体積, 基底関数の形状を定める重み関数, および基底関数の台の大きさを定める影響半径の 4 つで構成され, これらの離散化パラメータに対して十分条件を与える．1 つ目は粒子分布, 粒子体積, および影響半径の族に対する正則性で, 粒子分布と粒子体積に対するある指標と影響半径に関するある不等式によって導入される．ここで用いる指標は, [6] で導入されている指標を計算可能に拡張した指標を用いているので, 一般的な粒子分布が正則性の不等式を満たすかどうかを数値的に確認できることが特徴である．2 つ目は重み関数に対する十分条件で, 重み関数の滑らかさや積分値に関する条件で定義される．この条件は打ち切り誤差評価や後の誤差評価における重み関数の十分条件となっており, 従来の粒子法における重み関数も含むより広い条件となっているので, 今まで用いられていなかった重み関数も適用することができる．これらの条件の下で, 打ち切り誤差評価が得られ, 影響半径に関する収束次数が正則性と重み関数の選択に応じた次数となることを示す．

次に, Poisson 方程式に対して一般化粒子法を適用した離散方程式の誤差解析を考える．粒子分布と影響半径に関するある幾何グラフの性質によって定義される粒子分布の接続性を導入し, この粒子分布の接続性の下で, 離散 Poisson 方程式の一意可解性と離散最大値原理を示す．さらに, 離散

最大値原理を用いて, Poisson 方程式に対する一般化粒子法の安定性および最大値ノルムによる誤差評価を示す．このとき, 影響半径に関する収束次数が最大で 2 次となることを示す.

さらに, 熱方程式に対して空間方向に一般化粒子法, 時間方向に θ 法を適用した離散方程式の誤差解析を考える．まず, 離散方程式の一意可解性と離散最大値原理を示す．次に, 離散最大値原理を用いて, θ 法における差分パラメータ θ が $\theta = 1$(後退 Euler 法) の場合は時間刻みに関して無条件で, $\theta \neq 1$ の場合は条件付きで安定となることを示す．その後, 安定性と打ち切り誤差評価の条件の下で, 熱方程式に対する一般化粒子法の最大値ノルムによる誤差評価を示す．このとき, 影響半径に関する収束次数が最大で 2 次, 時間刻みに関する収束次数が 1 次となることを示す．ただし, $\theta = 1/2$ (Crank–Nicolson 法) のときは時間刻みに関して 2 次となることも示す．また, 時間に関して ℓ^∞, 空間に関して ℓ^2 ノルムを用いた誤差解析を行い, θ が 1/2 以上の場合に時間刻みに関して無条件となる安定性および誤差評価を示す.

最後に, 上記で得られた数値解析の結果に対応する数値実験を行い, 定理の条件の下で粒子法によって得られる近似解の誤差が収束することを示す.

参考文献

[1] M. Liu and G. Liu, Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments, *Arch. Comput. methods in Eng.*, Vol. 17, 25–76, 2010.

[2] S. Koshizuka and Y. Oka, Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nucl. Sci. Eng.*, Vol. 123, 421–434, 1996.

[3] P. A. Raviart, *An analysis of particle methods*, Springer, 1985.

[4] B. Ben Moussa and J. Vila, Convergence of SPH method for scalar nonlinear conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 37, 863–887, 2000.

[5] B. Ben Moussa, On the convergence of SPH method for scalar conservation laws with boundary conditions, *Methods Appl. Anal.*, Vol. 13, 29–62, 2006.

[6] 石島清宏, 木村正人, メッシュフリー粒子法における差分公式の打ち切り誤差評価, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 20, 165–182, 2010.