

Trivializing number of positive knots and diagrams of almost alternating positive links

井上, 和彦

<https://doi.org/10.15017/1654667>

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済



氏 名	井上 和彦		
論 文 名	Trivializing number of positive knots and diagrams of almost alternating positive links (正結び目の自明化数と概交代正絡み目のダイアグラム)		
論文調査委員	主 査	九州大学	教授 佐伯 修
	副 査	九州大学	准教授 高田敏恵
	副 査	奈良教育大学	准教授 花木 良

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

3 次元空間内の結び目・絡み目理論において、対象を平面に射影して 2 重点に上下交差の情報を加えてできるダイアグラムは、最も基本的な道具であり、研究対象である。それは 2 次元の対象であるため 3 次元に比べて格段に扱い易いというだけではなく、もとの結び目・絡み目を復元できるという強力な性質を持つ。一方、向き付けられた絡み目ダイアグラムを考えると各交点には正負の符号が定義され、すべての交点が正であるようなダイアグラムを持つ絡み目は正絡み目と呼ばれる。正絡み目は、たとえばその種数が 4 次元種数と一致するなど、通常の絡み目には見られないきれいな性質を持つことが知られている。本学位論文では、特に正結び目・正絡み目について、それらのダイアグラムから決まる自明化数という不変量と、ダイアグラムの概交代性について詳しく調べている。

第 1 章においてはまず、Hanaki (2014)によって導入された結び目の不変量「自明化数」の定義と、その既知の諸性質が記述される。結び目射影像が与えられたとき、その前交点（上下関係の情報が無い 2 重点）のうち一部のみに上下交差の情報が加えられた準ダイアグラムを考える。準ダイアグラムは、前交点にどのような上下情報を与えたとしても自明な結び目ダイアグラムになるとき、自明であるという。そして射影像に対して、それを自明な準ダイアグラムにするために上下交差の情報を入れる必要最小限の前交点の個数を、自明化数という。結び目 K の自明化数 $tr(K)$ は、そのすべての射影像に渡った自明化数の最小値として定義される。これは古典的な不変量である結び目解消数 $u(K)$ と同様に結び目の複雑さを表す不変量であるが、射影像すべてに渡った最小値として定義されるため、その決定は非常に難しい。

こうした自明化数に関して Hanaki は、一般に不等式 $2u(K) \leq tr(K)$ が成り立つことを示し、自明化数が結び目解消数の上からの評価に使えることを示した。さらに、 K が正結び目のときは等号が成り立ち、さらに自明化数はその正ダイアグラムで実現されるであろうと予想した (Hanaki 予想)。もしこの予想が正しいければ、正結び目の自明化数や結び目解消数が、正ダイアグラムを調べることで決定できることになる。Hanaki は、交点数 10 以下の正結び目や、正ブレイドを閉じて得られる結び目についてこの予想が正しいことを示した。

そこで本学位論文では、結び目の中でも非常に基本的な 2 橋結び目に着目し、まず正である 2 橋結び目の正ダイアグラムを決定している。そして、それらの自明化数を、ガウスダイアグラムを巧みに用いた組合せ的手法により、完全に決定している。さらに、そうしたもののうちの一部のクラスに対して、Hanaki 予想が正しいことを示している。これは、予想が正しい無限系列の正結び目を新たに与えていることになり、自明化数と正結び目の研究に与えるインパクトは大きい。さらに第 1 章の最終節では、ある種の正のプレッツェル結び目についても同様の考察を行い、

Hanaki 予想が正しいことを示している。

引き続き第 2 章では、絡み目ダイアグラムのうち、向きに沿ってたどっていったときに、上下交差が互い違いに現れる交代ダイアグラムや、1 回の交差交換で交代ダイアグラムとなる、概交代ダイアグラムといわれる対象と、絡み目が正である性質との関係について、いくつかの結果が得られている。正絡み目の（既約な）交代ダイアグラムは正であることが Nakamura によって示されているが、では正絡み目が概交代ダイアグラムを持つときに、その概交代ダイアグラムは正になるのであろうか？本学位論文では、この問題に対してまず、正である概交代ダイアグラムを持つ絡み目が実は交代ダイアグラムを持つことが示される。次に、正かつ交代的なダイアグラムを PA ダイアグラムと定義した上で、1 回の交差交換で PA ダイアグラムになるものが、概 PA ダイアグラムと定義される。そして第 2 章の後半では、Montesinos 絡み目に焦点が当てられる。この絡み目は、2 橋絡み目を拡張したクラスで、交代的かあるいは概交代的ダイアグラムを持つことが Abe-Kishimoto により示されている。そして本学位論文では、それをある意味で正である性質を加味して拡張する形で、標準的ダイアグラムが正である Montesinos 絡み目が、概 PA ダイアグラムを持つことが示されている。これは与えられたダイアグラムが正であるという性質をうまく使って、具体的にダイアグラムを変形することによって構成的に示されている。こうした結果は、正かつ概交代的である絡み目がどのような絡み目なのか、といった問いに対するある種の鍵を与えるような仕事である。これまでまったく何も分かっていなかった問題に対する糸口を与えるような仕事とも言え、当該分野に与える影響は大きい。今回の結果はそういった意味で非常に高く評価できる。

以上のように本学位論文では、重要な正絡み目のクラスに関して、その自明化数を決定して結び目解消数との関連を明らかにしたり、概交代性との関係についての重要な新しい結果を与えたりしており、さらにその具体的な例も与えている。こうした結果は、結び目理論において大変価値のある結果であり、将来の発展も期待できる重要な業績である。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。