

## Perturbations of crossed product $C^*$ -algebras by amenable groups

伊野, 翔次

<https://doi.org/10.15017/1654666>

---

出版情報 : 九州大学, 2015, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	伊野 翔次			
論 文 名	Perturbations of crossed product $C^*$ -algebras by amenable groups (従順群による接合積 $C^*$ -環の摂動)			
論文調査委員	主査	九州大学	教授	綿谷 安男
	副査	九州大学	准教授	増田 俊彦
	副査	大阪教育大学	准教授	岡安 類

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本研究者である伊野翔次氏の博士学位論文は「Perturbations of crossed product  $C^*$ -algebra by amenable groups」(従順群による接合積  $C^*$ -環の摂動)という題であり、二つの作用素環  $A$  と  $B$  が十分近ければ、それらはあるユニタリ作用素  $u$  を使って  $B = uAu^*$  という意味で共役になるかという作用素環の摂動の問題に取り組んで、有限指数の包含関係や、片方の環が従順群による接合積  $C^*$ -環の場合には、それが肯定的に解けることを示したものである。

作用素環とは Hilbert 空間上の有界線形作用素からなる「よい」環のことである。さらにスター演算\*で閉じている  $*$ -環で、ある種の位相でとじているものが多い。特に Hilbert 空間  $H$  上の有界線形作用素全体  $B(H)$  の部分  $*$ -環で、一様位相について閉じているものを  $C^*$ -環といい、弱作用素位相について閉じているものを von Neumann 環という。これ以上直和に分けられない von Neumann 環を因子環とよび、その中心が単位元のスカラー倍になることで特徴づけられ、von Neumann 環の building block である。 $C^*$ -環の場合は  $0$  と全体以外に閉イデアルがないという意味での単純な  $C^*$ -環が building block になる。単位元をもつ可換な  $C^*$ -環はコンパクトハウスドルフ空間  $X$  上の連続関数のなす環  $C(X)$  と同型になり、可換な von Neumann 環は測度空間  $X$  上の本質的に有界な可測関数のなす環と同型になる。そのため、一般の非可換な  $C^*$ -環は量子化された位相空間であり、一般の非可換な von Neumann 環は量子化された測度空間であるとみなすとよいこともある。

これらの作用素環の構成でよく知られているのは、代数的群環を一様位相で閉包をとったものであり群  $C^*$ -環とよばれる。さらに群  $G$  がある  $C^*$ -環  $A$  に作用しているときに、共役によりその作用を復元するような共変関係をもつユニタリ作用素の群  $\{u_g \mid g \in G\}$  をうまくつくり、もとの  $C^*$ -環  $A$  とユニタリ作用素の群  $\{u_g \mid g \in G\}$  をあわせて生成した  $C^*$ -環を  $C^*$ -環  $A$  の群  $G$  による接合積といい、本研究の主たる対象である。さらに群  $G$  にある種の「平均」が存在するときに群  $G$  は従順という。本研究は、指数が有限な包含関係の場合にまずこの摂動問題を解決し、さらに従順群による接合積  $C^*$ -環の場合には、この群の従順性を本質的に用いて、摂動問題が肯定的に解けることを示したものである。

作用素環の摂動の研究は、R. Kadison と D. Kastler によって 1970 年代に始められた。Hilbert 空間  $H$  上の有界線形作用素全体  $B(H)$  の二つの作用素環  $A$  と  $B$  の間の距離  $d(A,B)$  はそれらの単位球どうしの間の Hausdorff 距離で与える。ユニタリ作用素  $u$  を用いて  $B = uAu^*$  と  $A$  と  $B$  が共役の関係にある場合には、そのユニタリ作用素  $u$  が  $1$  に近いと、距離  $d(A,B)$  は  $0$  に近くなる。作用素環の摂動の問題は、この逆が成立するかを問うものである。つまり、二つの作用素環  $A$  と  $B$  の間の距離が十分に近いと、それらの作用素環の間は、ユニタリ作用素  $u$  を用いて  $B = uAu^*$  と  $A$  と  $B$  が共役の関係にあるかを問題としている。さらにそれだけではなく、二つの作用素環  $A$  と  $B$  の間の距離がある程度近いと、たとえ  $A$  と  $B$  が

共役の関係になくても、二つの作用素環の性質は非常に似ているのではないかと予想するものである。どのような性質なら同じになるかを調べよという問題でもある。

作用素環が von Neumann 環の場合は、まずそれが AFD の時には、E. Christensen により、摂動問題が肯定的に解かれている。また二つの von Neumann 環が共通の有限 von Neumann 環に含まれる場合も正しいことがすでにわかっている。しかし、一般の von Neumann 環の場合には、いまだ未解決である。

作用素環が C\*-環の場合には、可分の条件を外すと、反例があることが M. Choi と E. Christensen によりすでに示されてはいた。しかし、最近、E. Christensen と A. Sinclair と R. Smith と S. White と W. Winter らは共同研究により、C\*-環が可分で核型の時には、摂動問題が肯定的に解かれることを証明した。しかし、ここで核型という条件は大変きつく、これを仮定しない一般の可分な C\*-環の場合には、摂動問題は依然未解決問題である。もちろん核型でない C\*-環は自由群の群 C\*-環をはじめとして、たくさんあることはわかっている。また、二つの作用素環 A と B の間の距離がある程度近いと、たとえ A と B が共役の関係になくても、その  $K_0$  群と  $K_1$  群は同型になることは M. Khoshkam によって示されている。

本研究である伊野は綿谷との共同研究で、二つの C\*-環が中間部分環の場合をまず考察した。単純な C\*-環の拡大  $C \subset D$  があり、その Jones 指数が有限の場合に、二つの C\*-環 A と B がその中間部分環でその間の距離が十分近いならば、D の中のユニタリ作用素  $u$  を用いて  $B = uAu^*$  と A と B が共役の関係にあることを証明し、さらにこのユニタリ作用素  $u$  は C と可換で 1 に十分近くにとれることまで示し、この場合に摂動問題が肯定的に完全解決できることがわかった。

次に本研究である伊野は単独の研究で、von Neumann 環の場合を考察した。二つの von Neumann 環 A と B が共通の von Neumann 環 D に含まれ包含関係  $A \subset D$  と  $B \subset D$  が Pimsner-Popa 不等式をみたすという意味で指数有限である時に、二つの von Neumann 環 A と B の間の距離が十分近いならば、D の中のユニタリ作用素  $u$  を用いて  $B = uAu^*$  と A と B が共役の関係にあることを証明し、さらにこのユニタリ作用素  $u$  は C と可換で 1 に十分近くにとれることが同様にいえることを示した。

さらに、伊野は Jones 指数が無限になるという一般の場合に取り組んでいる。この場合は種々の困難がある。そこで、C\*-環の拡大  $C \subset D$  があり、二つの C\*-環 A と B がその中間部分環で、一方の環 A が従順群による接合積 C\*-環の場合には、摂動問題が肯定的に解けることを示したものである。つまり、この設定のもとで相対可換環についてのある種の条件を仮定すると、中間部分環 A と B の間の距離が十分近いならば、D の中のユニタリ作用素  $u$  を用いて  $B = uAu^*$  と A と B が共役の関係にあることを証明し、さらにこのユニタリ作用素  $u$  は C と可換で 1 に十分近くにとれることまで示した。その証明では群の従順性を本質的に用いて、精緻な不等式を巧みに操り摂動問題が肯定的に解けることを示したものである。

以上のように本研究である伊野は作用素環の摂動の研究において、中間部分環の摂動問題に取り組み、いくつもの場合に、肯定的に問題を解決した。これらは作用素環の摂動問題の最終解決にむけての大きな部分解決を与えるものであり、この研究は作用素環の分野において非常に価値ある業績である。

よって、本研究は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。