

## Perturbations of crossed product $C^*$ -algebras by amenable groups

伊野, 翔次

<https://doi.org/10.15017/1654666>

---

出版情報 : 九州大学, 2015, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名 : 伊野 翔次

論 文 名 : Perturbations of crossed product  $C^*$ -algebras by amenable groups  
(従順群による接合積  $C^*$ -環の摂動)

区 分 : 甲

### 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、アメナブル群による接合積  $C^*$ -環の摂動についての研究を行った。作用素環の摂動理論は、Kadison と Kastler によって 1972 年に始められた。彼らは、同じヒルベルト空間に作用する 2 つの  $C^*$ -環に対して距離をそれぞれの閉単位球のハウスドルフ距離と定義した。さらに、その距離の意味で十分近ければ 2 つの  $C^*$ -環はユニタリ同型になると予想した。それ以降、様々な  $C^*$ -環や von Neumann 環に対して、この Kadison-Kastler 予想が成り立つかどうか研究が行われている。Choi と Christensen によって、非可分な  $C^*$ -環で、この予想をみたさないものが存在することが示された。一方、可分  $C^*$ -環と一般の von Neumann 環に対しては未解決である。

著者と綿谷安男氏との共同研究によって、指数有限な単純  $C^*$ -環の包含関係  $C \subset D$  に対して、十分近い中間部分  $C^*$ -環はユニタリ同型になることを示した。さらに、同型を示すユニタリは単純  $C^*$ -環の相対可換子環  $C' \cap D$  に含まれることも分かった。ここで、相対可換子環  $C' \cap D$  とは、任意の  $C$  の元と可換な  $D$  の元全体の集合である。また、著者は共通の von Neumann 環に含まれる 2 つの指数有限な部分 von Neumann 環は十分近ければユニタリ同型になることを示した。このように、包含関係の性質を用いて摂動理論を研究することは、上に挙げた研究の特徴である。本論文の研究内容も、包含関係にしかるべき性質を与えた上で摂動理論を研究する。

本論文においては、まず  $C^*$ -環の包含関係に対して、従順性を定義した。具体的には、 $C^*$ -環の包含関係  $A \subset B$  に対して、 $A$  のユニタリ群に、離散群として従順な群  $G$  が存在し、 $A$  が  $B$  と  $G$  で生成されており、さらに  $G$  の各元が  $B$  を正規化しているとき、その包含関係を従順と呼ぶことにする。具体例として、 $C^*$ -環  $A$  に作用する従順群  $G$  に対する接合積  $C^*$ -環  $A \rtimes G$  と  $A$  の包含関係  $A \subset A \rtimes G$  は従順である。群作用による接合積は、作用素環の重要な構成法であり、接合積  $C^*$ -環を摂動の対象と考えることには大きな意味がある。

次に、本論文の主定理を述べる。ヒルベルト空間  $H$  に作用する可分  $C^*$ -環の包含関係  $C \subset D$  の中間部分  $C^*$ -環  $A, B$  に対して、 $D$  から  $B$  への条件付き期待値が存在し、包含関係  $C \subset A$  が従順であるとする。さらに、 $C$  の  $A$  に対する相対可換子環  $C' \cap A$  が、 $C$  の  $A$  の弱閉方  $M$  に対する相対可換子環  $C' \cap M$  で弱位相に関して稠密であるとする。このとき、 $A$  と  $B$  が十分近ければユニタリ同型になることを示した。さらに、同型を示すユニタリは、 $C$  の  $M$  に対する相対可換子環  $C' \cap M$  に含まれることも分かった。

この結果を示すため、Christensen-Sinclair-Smith-White-Winter による可分核型  $C^*$ -環の摂動の研究手法を用いた。核型  $C^*$ -環の摂動では、Christensen による単射的 von Neumann 環の摂動の結果を用いていた。単射的 von Neumann 環とは、核型  $C^*$ -環から生成される von Neumann 環である。そのため本論文においては、従順群による接合積  $C^*$ -環から生成される von Neumann 環の摂動を準備した。この結果も、これまでの摂動理論で研究されてこなかった内容である。

以上の結果により、Kadison-Kastler 予想をみたす新たな作用素環を見つけることができた。