A higher-order asymptotic theory for motion of a counter-rotating vortex pair of finite thickness

ハビバ, ウミュ

https://doi.org/10.15017/1654665

出版情報：九州大学, 2015, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　名	HABIBAH　Ummu　（ハビバ　ウミュ）
論　文　名	A higher-order asymptotic theory for motion of a counter-rotating vortex pair of finite thickness （有限太さの逆回転渦対の運動に対する高次漸近理論）
論文調査委員	主　査　九州大学　　教授　福本康秀 副　査　東北大学　　教授　服部裕司 副　査　九州大学　　教授　杉山由恵 副　査　九州大学　准教授　手老篤史

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

渦の２次元的な相互作用については高精度数値解法が様々に工夫され、詳細な数値計算が行われてきたが、ほとんどが一様渦度分布の場合に限られる。コントゥアダイナミックスやコントゥアサージェリなどの高精度数値方法によって、互いの相互作用によって大きく変形し引きちぎれるところまで計算することが可能である。しかしながら、渦度が連続的に非一様に分布している渦同士の相互作用を効率よく計算できる方法は未発達のまま残されている。本論文は、有限の太さをもつ２次元渦の運動に対して、Ting & Tung (1965) が提唱した渦核半径－渦間距離の比を小さなパラメータとする接合漸近展開法を、同じサイズの渦核をもち，同じ大きさで異なる符号の渦度をもつ反平行渦対に適用した。漸近展開を高次まで拡張して、運動速度に対する渦核の有限太さの効果の補正に対する一般公式を導いた。しかも、５次で初めてあらわれる補正項が２次での速度場中の四重極の強さだけで表せるという予想外の発見を行い、それを数学的に証明した。本論文は半世紀前に提唱された Ting-Tung のプログラムの一つの完成形である。

流体中の渦運動の研究は、19 世紀半ばの Helmiholtz(1857)の論文によって創始され、19 世紀後半、Kelvin によって原子・分子の模型として取り上げられて盛んに研究されたが、20 世紀に入ってからしばらく下火になった。渦運動の研究が再び盛り上がるのは、ボーイング社がジェット機を商業飛行機として量産するようになった 1960 年代末からである。大型航空機の翼の後方に生成される強い渦が生み出す乱気流に巻き込きまれると、後続機は制御不能に陥る。この翼端渦を解明し制御することが、1960 年代後半から現在にいたるまで、大きな課題であり続けている。飛行機雲として観測される翼端渦は、反対回転の２本の平行な渦管としてモデル化でき、互いの影響によって下降運動を行う。流れは渦管の中心軸に沿う方向には変化しないと仮定して、垂直断面の２次元運動のみを考える。太さ０とする最も単純な点渦モデルの運動はよく知られている。粘性が作用すると、時間とともに渦度は拡散して渦管は太くなり、点渦モデルの有効性はやがて失われる。渦核半径が渦中心間の距離に比べて十分に小さい場合、限太さの効果を、この長さの比εについてのべき展開の形で取り込む方法が接合漸近展開法である。粘性がある場合には、渦核半径は時間とともに増大するので、微小パラメータとして$\varepsilon = 1/\sqrt{\mathrm{Re}} = \sqrt{\nu/\Gamma}$をとり、Navier-Stokes 方程式を$\varepsilon$をべき展開の形で解く。ここで、$\nu$は流体の動粘性係数、$\Gamma$ は各渦管もつ循環である。

片方の渦管に着目し、領域を外部領域と内部領域とに分ける。内部領域は着目する渦核とそれ包む周囲の領域を含む円状の領域で、半径は渦核半径と同じオーダーである。その外側が外部領域で、渦中心間の距離によって特徴づけられる。各領域で有効な解を、それぞれ内部解、外部解とよぶ。外部

領域と内部領域が重なり合う共通領域が十分大きくとることができ、解は共通領域を経由して内部解から外部解にスムーズに移行しなければならない。外部解は Biot-Savart の法則によって与えられる。ただし、渦度分布は未定で、内部解によって与えられる。任意の渦度分布を許容しながら、Biot-Savart の法則の共通領域で有効な表示、すなわち外部解の内部極限を求める。Dyson の方法を援用すると、高次まで有効な内部極限の表示が比較的容易に求められる。これを、境界条件、すなわち接合条件として内部解に課す。

内部解は、Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式を極座標表示して、ε のべき展開で逐次解く。0 次は、渦管の断面形状が円形であることを課す。粘性がある場合、渦度分布は 2 次の漸近展開における軸対称成分から決まり、渦度は ν を拡散係数とする拡散方程式によって支配される。粘性がない場合は、渦度が定常であることを要請する。１次は、点渦と同じ並進運動を行うこと除けば、流れに対する影響はない。2 次では、四重極子流が誘導される。これは、もう片方の渦が作り出す純粋ずり流によって、渦核が長軸を進行方向に向ける楕円形に変形することをあらわす。この四重極子流は、シューティング法によって常微分方程式を数値的に解いて求められる。特に、四重極子の強さを、速度場が接合条件を満たすよう数値的に定めた。3 次では、六重極子流が誘導され、これも数値的に計算する。この 2 次の四重極子流と 3 次の六重極子流の相互作用によって 5 次で双極子流が誘導される。これが渦対の運動速度に対する補正項を与え、その一般公式が２つの項の和として与えられていた。一つは四重極子流と六重極子流の流れ場の積の積分項で、もう一つは 2 次の四重極子の強さに比例する項である。本研究者は、0 次としてガウス型の渦度分布をもつ Oseen の渦をとると、これら 2 つの項は数値的に 9 桁まで等しい値をとることを示した。そして、この事実によってこの２つの項が等しいことを確信し、数学的に証明した。結果的に、運動速度に対する 5 次の補正項を 2 次の四重極子の強さだけで書き下すという驚異的な簡単化をもたらした。この公式は、非粘性の渦対も含む、広い適用範囲をもつ。

粘性によって渦核半径が増大することに伴い、渦間の距離が時間的に変化する。粘性がある場合にも成立するインパルスの保存則を援用して、渦間距離の変化に対する一般公式も与えた。この効果は、ε について 6 次と８次であらわれ、それぞれ、渦核内のよどみ点間の距離が時間について 2 次と 3 次で変化することをあらわす。

以上の結果は、渦運動の半世紀にわたる懸案の問題に満足のいく解答を与えた価値ある業績と認められる。
よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。