

# Desingularizing special generic maps into 3-dimensional space

西岡, 昌幸

<https://doi.org/10.15017/1654663>

---

出版情報 : 九州大学, 2015, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	西岡 昌幸			
論 文 名	Desingularizing special generic maps into 3-dimensional space (3次元空間へのスペシャル・ジェネリック写像の特異点解消)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	佐伯 修
	副 査	九州大学	教授	岩瀬則夫
	副 査	九州大学	准教授	高田敏恵
	副 査	成蹊大学	准教授	高瀬将道

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

可微分多様体間の可微分写像は一般に特異点を持つ。そうした特異点を解消することは、可微分写像の特異点論において基本的で重要な問題である。特に、ユークリッド空間への特異写像が与えられたとき、それをより次元の高いユークリッド空間へのはめ込みや埋め込みといった特異点を持たない写像にリフトし、それと射影との合成として分解する問題は、古くから研究されてきている。Haefliger (1960) は、曲面から 2 次元ユークリッド空間への一般的な写像を、3 次元空間へのはめ込みへとリフトするための非常に良い判定条件を、特異点集合の近傍に関する条件として与えた。その後はそういった同次元間の特異写像のリフト問題が多く研究された。また、1 次元空間への写像、すなわち関数のリフト問題に関する研究も行われた。

本学位論文では、特異写像として、スペシャル・ジェネリック写像を考え、それに対する特異点解消問題について新しい結果を与えている。スペシャル・ジェネリック写像とは、特異点として定値折り目特異点しか持たない可微分写像のことをいう。この定値折り目特異点は、一般的に現れる特異点の中では最も単純なものであり、さらに閉多様体からより次元の低いユークリッド空間への一般的可微分写像であれば、いつでも定値折り目特異点が像の「輪郭」として現れることも知られている。したがって、スペシャル・ジェネリック写像は、特異写像の大域的構造を調べるための試金石として、これまでも多くの研究がなされてきている。実際、これまでにこうした写像を許容する可微分多様体の構造について詳しい研究がなされてきている。最近では Saeki-Takase (2013) が、そうしたスペシャル・ジェネリック写像のリフト問題を研究し、いくつかの結果を得ている。実際、値域ユークリッド空間の次元が 1 または 2 のときについてはほとんど完全な結果が得られており、値域の次元が 3 のときについても、いくつかの結果が得られている。たとえば、5 次元もしくは 6 次元の向きづけ可能閉多様体から 3 次元ユークリッド空間へのスペシャル・ジェネリック写像が余次元 1 のはめ込みにリフトするためには、多様体がスピンの必要十分であることが示されている。

そうした状況の中、本学位論文ではまず、スペシャル・ジェネリック写像に関する基本的な事実等を復習したあと、単連結 5 次元、6 次元多様体から 3 次元ユークリッド空間へのスペシャル・ジェネリック写像の余次元 1 埋め込みリフトの存在について新しい結果を述べ、それを証明している。本論文で注目したのは、スペシャル・ジェネリック写像の特異点集合の法束である。また、はめ込みリフトを考察した Saeki-Takase と異なり、本学位論文では埋め込みリフトを考えている点でも注目に値する。得られている結果をより詳しく述べると、多様体に単連結性を仮定した上で、5 次元、もしくは 6 次元閉多様体から 3 次元ユークリッド空間へのスペシャル・ジェネリック写像が余次元 1 埋め込みにリフトするためには、特異点集合の法束が自明であることが必要十分

である、という定理である。これは、最も古典的な結果である **Haefliger** の結果が与えたリフト存在のための必要十分条件の類似とも言え、非常に良い判定条件である。**Saeki-Takase** の結果を使うと、ある意味で多様体全体を見ないとリフトするかどうかはわからないが、本学位論文の結果によると、特異点集合の近傍だけでリフト可能性がわかることになり、その点でも当該結果には意義がある。なお証明は、法束の自明性を用いて特異点集合の近傍でリフトを具体的に構成したあと、それを残りの非特異部分に、球面ファイバーの微分同相全体のなす空間のホモトピー型に関する **Smale** や **Hatcher** の結果を用いて拡張することによってなされている。なお、単連結性の仮定をはずすと当該結果が不成立となる具体的な例や、リフトが存在する例、存在しない例も具体的に与えられており、その点でも本学位論文は興味深い。

さらに本論文では、より次元の高い場合について、埋め込みの余次元を上げることにより、埋め込みリフトが存在するための十分条件を与える結果も得ている。これについては、球面の微分同相写像全体のなす空間の代わりに、球面からユークリッド空間への埋め込み写像全体のなす空間を用いることで示している。具体的には、次元に関するある条件のもと、そういった空間が 2 連結になるという **Budney** の最近の結果を用いている。値域次元が 3 である場合に限っても、こうした高次元に対する一般的なリフト存在に関する研究はこれまでになく、今回の結果はそういった意味で非常に高く評価できる。

以上のように本学位論文では、重要な特異可微分写像のクラスに関して、そのリフト可能性についての重要な新しい結果を証明し、さらにその具体的な例も与えている。こうした結果は、微分トポロジーや写像の特異点論等において大変価値のある結果であり、将来の発展も期待できる重要な業績である。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。