Desingularizing special generic maps into 3-dimensional space

西岡, 昌幸

https://doi.org/10.15017/1654663

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　: 西岡　昌幸

論 文 名　: Desingularizing special generic maps into 3-dimensional space
（3 次元空間へのスペシャル・ジェネリック写像の特異点解消）

区　　分　: 甲

論　文　内　容　の　要　旨

閉曲面から平面への可微分写像は折り目特異点とカスプ特異点しか特異点に持たないとき、ジェネリック写像と呼ばれる。Haefliger (1960)は閉曲面から平面へのジェネリック写像が 3 次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$へのはめ込みと$\mathbb{R}^3$から平面への射影の合成に分解できるための必要十分条件を、特異点集合の各連結成分の近傍の向き付け可能性と各連結成分に含まれるカスプ特異点の個数を用いて与えた。

このように n 次元多様体 M から p 次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^p$への特異点を持つ写像 f が、M から$\mathbb{R}^k$へのはめ込みまたは埋め込み g と$\mathbb{R}^k$から$\mathbb{R}^p$への射影の合成に分解されるとき、写像 g を写像 f の**リフト**と呼び、f は g にリフトする、という。写像 g は写像 f の特異点を解消した写像であると考えることができる。そこで、次の問題を考える。

“閉n次元多様体から$\mathbb{R}^p$への特異点を持つ可微分写像が、$\mathbb{R}^k$ $(k > p)$ へのはめ込みまたは埋め込みにリフトするための必要十分条件を求めよ。”

こうしたリフトの可能性に関する問題は、特異点論において基本的で非常に重要な問題であり、Haefligerの他に、Blank–Curley, Burlet–Haab, Kushner–Levine–Porto, Saeki–Takase, Saito, Yamamoto 等によって研究がなされている。

本論文では、**スペシャル・ジェネリック写像**と呼ばれる定値折り目特異点しか特異点を持たないような可微分写像のリフトについて考察した。スペシャル・ジェネリック写像は Burlet–de Rham によって初めて定義され、閉 3 次元可微分多様体が平面へのスペシャル・ジェネリック写像を持つための必要十分条件が、3 次元球面または円周上の 2 次元球面束の連結和と微分同相であることが示された。このように閉多様体がスペシャル・ジェネリック写像を許容するための条件については Burlet–de Rham, Saeki, Porto–Furuya, Èliašberg 等によって研究がなされている。

本論文では次の二つの結果を得た。

(1) $n = 5, 6$ のとき、単連結閉 n 次元多様体 M から$\mathbb{R}^3$へのスペシャル・ジェネリック写像は、特異点集合の法束が自明であるときかつそのときに限り、余次元 1 の埋め込みにリフトする。

(2) $n \geq 7$ のとき、向き付け可能な閉 n 次元多様体 M から$\mathbb{R}^3$へのスペシャル・ジェネリック写像 f は、$2k \geq 3n + 3$かつ f の特異点集合の法束が自明であれば、k 次元ユークリッド空間への埋め込みにリフトする。

ここで、Saeki (1993)の結果より、$n = 5, 6$ のとき、単連結 n 次元閉多様体 M が$\mathbb{R}^3$へのスペシャル・

ジェネリック写像を許容するならば、Mはいくつかの2次元球面上の$n-2$次元球面束の連結和と微分同相であることに注意する。また、本論文では、単連結性を仮定しない場合は(1)が成立しないことを、具体例を構成することによって示した。さらに、定義域多様体が単連結な場合に、$\mathbb{R}^3$へのスペシャル・ジェネリック写像として、特異点集合の法束が自明なものと非自明なものの両方が存在することを、具体的にスペシャル・ジェネリック写像を構成することによって示した。

また、(1)と関連する結果として、Saeki–Takase (2013)は、$n=5,6$のとき、向き付け可能な閉n次元多様体Mから$\mathbb{R}^3$へのスペシャル・ジェネリック写像は、Mがスピンであるときかつそのときに限り、余次元1のはめ込みにリフトするということを示している。この結果ははめ込みへのリフト可能性が定義域多様体のトポロジーで決まるという主張であり、(1)は特異点集合の近傍のみで埋め込みへのリフト可能性が決まるという点が異なる部分である。

(1)については、向き付け可能な閉n次元多様体から$\mathbb{R}^p$ $(n>2p-2)$へのスペシャル・ジェネリック写像が余次元2のはめ込みにリフトするならば、fの特異点集合の法束が自明であることを示し、その系として、(1)において余次元1の埋め込みにリフトするならば特異点集合の法束が自明であることを示した。逆に、特異点集合の法束が自明であると仮定したときに、fのシュタイン分解を用いて、fの埋め込みリフトを以下に述べるような方法で構成した。

閉n次元多様体Mから$\mathbb{R}^p$へのスペシャル・ジェネリック写像fに対して、p次元ユークリッド空間の各点のfによる逆像の各連結成分を一点に潰してできる空間をWとする。このとき、fはMからWへの写像qとWから$\mathbb{R}^p$への写像eの合成に分解され、Wはコンパクトな境界付可微分多様体であってqとeは可微分写像であり、eははめ込みであり、qは特異点集合を除いた部分では$n-3$次元球面束となる。このような分解のことを**シュタイン分解**と呼ぶ。

このシュタイン分解を用いると(1)において、Wは単連結なのでPoincaré予想の解決よりWはカラー近傍Cにいくつかの1-ハンドルと一つの3-ハンドルを接着してできる多様体と微分同相になる。このとき、fの特異点集合の法束の自明性を用いると、Cのqによる逆像上でCと$\mathbb{R}^{n-2}$の直積へのqの埋め込みリフトを構成できる。 また、$n=5,6$のとき、$n-3$次元球面の微分同相写像のなす空間の2次元ホモトピー群が自明となる、というSmaleとHatcherの結果を用いることにより、このリフトをM全体の埋め込みリフト$\tilde{q}$へ拡張できることがわかる。また、Wと$\mathbb{R}^{n-2}$の直積から$\mathbb{R}^{n+1}$への埋め込み$\tilde{e}$を、$\tilde{q}$と$\tilde{e}$の合成がfのリフトになるように構成した。

一方(2)においてはWはカラー近傍Cにいくつかの1-ハンドルといくつかの2ハンドルと一つの3-ハンドルを接着してできる多様体と微分同相になる。また、$2k\geq 3n+3\geq 24$のとき、$n-3$次元球面の$\mathbb{R}^{k-3}$への埋め込みのなす空間の1次元と2次元ホモトピー群が自明である、というBudneyの結果を用いることにより、(1)の構成法を少し修正すれば、(2)の埋め込みリフトを構成できることがわかる。

これまで、スペシャル・ジェネリック写像のはめ込みまたは埋め込みリフトの存在条件については主に余次元が1の場合に得られているだけであった。今回の結果は余次元が2以上の場合について埋め込みリフトが存在するための十分条件を与えたという点で意義がある。今後はリフトの存在条件だけではなく、リフトが存在する場合の正則ホモトピーによる分類等についても考察することが課題であろう。