# 交互ダ・ヴィンチ・コード

岩本, 誠一
九州大学 : 名誉教授

木村, 寛
秋田県立大学システム科学技術学部 : 准教授

https://doi.org/10.15017/16485

出版情報：經濟學研究. 76 (4), pp.1-19, 2010-01-20. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

# 交互ダ・ヴィンチ・コード

岩　本　誠　一
木　村　　　寛

**概要**

映画「ダ・ヴィンチ・コード」では８つの数字からなる暗証番号【ダ・ヴィンチ・コード】が中心的な役割を果たしていた。本論文ではこの暗証番号のもう一つの片割れを双対最適化理論の枠組みの中で紹介する。主要な結果は３つである。⑴主問題と双対問題の最適解の間に美しい関係―交互フィボナッチ相補双対性―が成り立つことを示している。⑵最適化の一階条件として新たに交互フィボナッチ条件を導出して、この条件に基づく分割法によって簡単に最適解を求めることができることを示している。すなわち、交互フィボナッチ分割法を提案している。⑶さらに、直接的な方法によって主問題から双対問題を導いている。

## 1　はじめに

フィボナッチ数列は黄金比とともに古今東西「美と実用」に用いられてきている［3, 5, 19-22］。映画「ダ・ヴィンチ・コード」では最初の８つのフィボナッチ数が暗号として使われている［４］。前号では、この暗号に着目して最適化の双対理論を詳しくかつ具体的に考えた[13]。本論文では、片割れとなるもう一つの暗号【交互ダ・ヴィンチ・コード】を導入して、数理計画問題との「鮮やかな双対関係」を浮き彫りにする。また、解法としては新たな交互フィボナッチ分割法を与える。さらに、双対問題を簡単に導出している。第２節では４変数の２次最小化（主）問題と最大化（双対）問題の対を行列解析によって解いている。第３節では、この最適解の間に交互フィボナッチ相補双対性があることを示している。第４節では、最適化の１階必要条件から交互フィボナッチ条件を導き、この条件によって所与の区間を逐次分割している。すなわち、最適解が交互フィボナッチ分割によって容易に得られることがわかる。第５節では、１変数、２変数、３変数の各々の問題対に対して最適解を求め、【交互ダ・ヴィンチ・コード】が次第に浮かび上がって来ることを確かめている。また、交互フィボナッチ相補双対性が成り立っていることも示している。最後の第６節では、主問題から双対問題を直接導いている。以下では、フィボナッチを「フィボ」と略している。

## 2　交互ダ・ヴィンチ・コードへ

### 2.1　フィボナッチ数列

映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006年) では冒頭のシーンで10桁の暗証番号

$$1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 1$$

が現れている。前号［13］では、この10個の数字は８つの数字からなる列

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{13}\ \boxed{21}$$

すなわち、フィボナッチ数列（表１）の第１項 $F_1=1$ から第８項 $F_8=21$ までの数列

$$\boxed{F_1}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_7}\ \boxed{F_8}$$

に他ならないことを紹介した。さらに、このフィボナッチ数列は双対最適化理論と深くかかわっていることも示した。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 | 987 |

**表１　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$**

**フィボナッチ数列** $\{F_n\}$ は２階線形差分方程式（３項間漸化式）

$$x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0, \qquad x_1=1,\ x_0=0 \tag{1}$$

の解で定まっている［3，5，7-10，15，19，20］。

本論文でも、一対の主（最小化）問題と双対（最大化）問題を解くが、その最小解と最大解にはもう一つの【ダ・ヴィンチ・コード】というべき【交互ダ・ヴィンチ・コード】が現れることを示す。

### 2.2　主問題

主問題（primal problem）として次の最小化問題を考える（［6，p.90-93］［13］参照）。

**主問題** ($\mathrm{P}_4$)　定数 $c\in R^1$ を与える。最初の変数 $x_0$ が $x_0=c$ に固定されているとき、以下の４変数 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の値を定めて、全平方和（総費用に相当する量）

$$\left[(c+x_1)^2+x_1^2\right]+\left[(x_1+x_2)^2+x_2^2\right]+\left[(x_2+x_3)^2+x_3^2\right]+\left[(x_3+x_4)^2+x_4^2\right]$$

を最小にせよ。このとき、最小値 $m_4$ および最小（値を与える）点 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ を求めよ。この最小化問題は次のように表される。

$$\begin{array}{lll} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3}\left[(x_n+x_{n+1})^2+x_{n+1}^2\right] \\ (\mathrm{P}_4) & \text{subject to} & \text{(i)}\ \ -\infty<x_n<\infty \quad n=1,2,3,4 \\ & & \text{(ii)}\ \ x_0=c. \end{array}$$

主問題 $(\mathrm{P}_4)$ は点

$$\hat{x}=(x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)=\frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{34},\ \boxed{-13},\ \boxed{5},\ \boxed{-2},\ \boxed{1}\right) \tag{2}$$

で最小値 $m_4=\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{34}}c^2$ に達している。

この最適解はいくつかの方法で求められる。たとえば、次のようである。

1．完全平方による方法

2．微分・偏微分法（calculus）

3．行列解析（matrix analysis）［1］

4．動的計画法（dynamic programming）［6］

5．フィボナッチ分割法（Fibonacci section）［12，13］

交互フィボ分割法は後述の交互フィボナッチ条件に基づいている。この条件は最適化の1階条件を本問題固有の2次計画問題に対してさらに詳しく表現したものである。交互フィボ分割法は交互フィボ条件に従って所与の区間を逐次分割する方法である。この分割法は1階条件に基因しているという意味では微分・偏微分法に依拠している。しかし、この条件は隣接2項間の比例関係を与えているのでこの分割法は解法としては極めて優れているといえる。本論文では、3．行列解析および5．交互フィボ分割法で解く。

まず、高校数学における最大最小の基本を確認しておく。

**補題1**　$a>0$ のとき、2次式 $ax^2+2bx+c$ は、$x=-\dfrac{b}{a}=-a^{-1}b$ のとき、最小値 $m=c-\dfrac{b^2}{a}=c-ba^{-1}b$ をもつ。

以下では補題1のベクトル・行列版を内積 $(\,,\,)$ を用いて導入する。$A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 実対称行列とするき、$(0, 0, \cdots, 0)$ でない任意のベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して2次形式 $(x, Ax)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ が正ならば、$A$ は**正定値**（positive definite）であるといい、$A>0$ で表す。このとき、逆行列 $A^{-1}$ が存在して、$A^{-1}>0$ である［1］。この性質を用いると、次が成り立つ。

**定理1**　$A>0$ のとき、ベクトル2次式 $(x,\ Ax)+2(b,\ x)+c$ は、$x=-A^{-1}b$ のとき、最小値 $m=c-(b,\ A^{-1}b)$ をもつ。

さて、主問題 $(\mathrm{P}_4)$ を行列解析によって解こう（［6，p.64，65］［13］参照）。目的関数はベクトル $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の2次式

$$(x, Bx)+2(b, x)+c^2$$

になる。ここに $b=(c,\ 0,\ 0,\ 0)$ で、$4\times 4$ 行列

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

は正定値である[1)]。この逆行列は

$$B^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 & -1 \\ -5 & 15 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 16 & -8 \\ -1 & 3 & -8 & 21 \end{pmatrix}$$

になる。したがって定理1より、問題 $(\mathrm{P}_4)$ は

$$\hat{x} = -B^{-1}b = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -13 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & -15 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -16 & 8 \\ 1 & -3 & 8 & -21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{34}\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき、最小値

$$m_4 = c^2 - (b, B^{-1}b) = c^2 - \frac{13}{34}c^2 = \frac{21}{34}c^2$$

をもつことがわかる。

### 2.3　双対問題

今度は、主問題に対する双対問題（dual problem）として、次の最大化問題を導入しよう（[6，p. 211-215，220]［13］参照)。

**双対問題** $(\mathrm{D}_4)$　定数 $c$ は主問題で与えたものとする。4変数 $\mu=(\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$ の値を定めて、2次の量**総アドバンテージ**（total advantage）

$$2c\mu_0 - \mu_0^2 - \left[(\mu_0+\mu_1)^2 + \mu_1^2\right] - \left[(\mu_1+\mu_2)^2 + \mu_2^2\right] - \left[(\mu_2+\mu_3)^2 + \mu_3^2\right] - \mu_3^2$$

を最大にせよ。このとき、最大値 $M_4$ および最大点 $\mu^*=(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)$ を求めよ。

この最大化問題は次のように表される。

$$(\mathrm{D}_4)\quad \begin{array}{l} \text{Maximize}\quad 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n+\mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2 \\ \text{subject to}\quad \text{(i)}\quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0,1,2,3. \end{array}$$

総アドバンテージの負の値

$$-2c\mu_0 + \mu_0^2 + \left[(\mu_0+\mu_1)^2 + \mu_1^2\right] + \left[(\mu_1+\mu_2)^2 + \mu_2^2\right] + \left[(\mu_2+\mu_3)^2 + \mu_3^2\right] + \mu_3^2$$

を**総ペナルティ**（total penalty）と呼ぶ。総アドバンテージの最大化問題は総ペナルティの最小化問

1）たとえば、主座小行列式がすべて正であることがすぐわかる。

題

$$(\mathrm{D}'_4)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & -2c\mu_0+\mu_0^2+\sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n+\mu_{n+1})^2+\mu_{n+1}^2\right]+\mu_3^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty<\mu_n<\infty \quad n=0,1,2,3 \end{array}$$

に等価である。すなわち、$(\mathrm{D}_4)$ の最大値の負値が $(\mathrm{D}'_4)$ の最小値になり、最大点と最小点は一致する。

問題 $(\mathrm{D}_4)$ は点

$$\mu^*=(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)=\frac{c}{34}\left(\boxed{21},\ \boxed{-8},\ \boxed{3},\ \boxed{-1}\right) \tag{3}$$

で最大値 $M_4=\dfrac{21}{34}c^2$ に到達している。

この双対問題は主問題と同様にいくつかの方法で解けるが、ここでも行列解析によって求める。これは次のようになる。問題 $(\mathrm{D}_4)$ の目的関数はベクトル $\mu$ の 2 次式

$$2(b,\mu)-(\mu,C\mu)$$

になる。ここに $b=(c,\ 0,\ 0,\ 0)$ で

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

は正定値になっている[2)]。この逆行列は

$$C^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 21 & -8 & 3 & -1 \\ -8 & 16 & -6 & 2 \\ 3 & -6 & 15 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 13 \end{pmatrix}$$

である。したがって、$(\mathrm{D}_4)$ は点

$$\mu^*=C^{-1}b=\frac{c}{34}(21,\ -8,\ 3,\ -1)$$

で最大値 $M_4=(b,C^{-1}b)=\dfrac{21}{34}c^2$ をもつ。

## 3　フィボ相補双対性

主問題 $(\mathrm{P}_4)$ の最小解と双対問題 $(\mathrm{D}_4)$ の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1．**（双対性）**　最小値と最大値が等しい：$m_4=M_4$. 共に初期値 $c$ の 2 次関数で、その係数は相隣るフィボ数の比 $\dfrac{21}{34}$ である。

---

2）主座小行列式がすべて正である。

2．(**2段階フィボナッチ**)　最小点 $(x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ と最大点 $(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*)$ は共に**交代**[3]フィボ数列の後ろ向き2段跳びである。

3．(**相補フィボナッチ**)　最小点と最大点を交互に編むと、**2連交代**[4]フィボ数列の後ろ向き(1段跳び)である。

すなわち、最適解の交互列

$$\boxed{x_0}\ \boxed{\mu_0^*}\ \boxed{\hat{x}_1}\ \boxed{\mu_1^*}\ \boxed{\hat{x}_2}\ \boxed{\mu_2^*}\ \boxed{\hat{x}_3}\ \boxed{\mu_3^*}\ \boxed{\hat{x}_4}$$

は定数 $\frac{c}{34}$ を無視すれば、

$$\boxed{F_9}\ \boxed{F_8}\ \boxed{-F_7}\ \boxed{-F_6}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_4}\ \boxed{-F_3}\ \boxed{-F_2}\ \boxed{F_1}$$

となる。これは冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】を**2連交代して後向きに**したものである。

この三位一体の関係を**交互フィボナッチ相補双対性** (alternately Fibonacci complementary duality, AFCD) という [11-14, 16, 17]。交互フィボ相補双対性は一般の $n$ 変数問題の対 $(\mathrm{P}_n)$ と $(\mathrm{D}_n)$ の間に成り立つのだろうか。また、主問題 $(\mathrm{P}_n)$ が与えられたとき、双対問題 $(\mathrm{D}_n)$ はどのように導かれるのだろうか。本論文では 簡単のため そして【ダ・ヴィンチ・コード】との一貫性のゆえに4変数問題に限るが [13]、最後の第6節において簡単な方法で双対問題を導く。

さて、主問題 $(\mathrm{P}_4)$ および双対問題 $(\mathrm{D}_4)$ の変数を反転させて、反転問題

$$(\mathrm{RP}_4)\qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left[x_n^2+(x_n+x_{n+1})^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < x_n < \infty \quad n=1,2,3,4 \\ & \text{(ii)}\quad x_5 = c \end{array}$$

および

$$(\mathrm{RD}_4)\qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & -\mu_1^2-\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\left[\mu_n^2+(\mu_n+\mu_{n+1})^2\right]-\mu_4^2+2c\mu_4 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n=1,2,3,4 \end{array}$$

を考えると、両反転問題の最適解の間には今度は**前向きの**フィボ相補双対性が成り立つ。すなわち、反転主問題 $(\mathrm{RP}_4)$ の最小解と反転双対問題 $(\mathrm{RD}_4)$ の最大解の間には次の三位一体の関係が成り立っている。

1．(双対性)　最小値と最大値が等しい：$m_4=M_4$.　共に初期値 $c$ の2次関数で、その係数は相隣るフィボ数の比 $\frac{21}{34}$ である。

2．(2段階フィボナッチ)　最小点 $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \tilde{x}_4)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*)$ は共に交代フィボ数列の前向き2段跳びである。

---

3）＋と－が交互に繰り返されることをいう。

4）＋＋と－－が交互に繰り返される。

$$(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3,\ \tilde{x}_4,\ x_5) = \frac{c}{34}\left(\ \boxed{1},\ \boxed{-2},\ \boxed{5},\ \boxed{-13},\ \boxed{34}\ \right)$$
$$(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \mu_3^\star,\ \mu_4^\star) = \frac{c}{34}\left(\ \boxed{-1},\ \boxed{3},\ \boxed{-8},\ \boxed{21}\ \right)$$

3．(相補フィボナッチ)　最小点と最大点を交互に編むと、

$$\boxed{\tilde{x}_1}\ \boxed{\mu_1^\star}\ \boxed{\tilde{x}_2}\ \boxed{\mu_2^\star}\ \boxed{\tilde{x}_3}\ \boxed{\mu_3^\star}\ \boxed{\tilde{x}_4}\ \boxed{\mu_4^\star}\ \boxed{x_5}$$

は定数倍を無視すれば、２連交代フィボ列

$$\boxed{1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{-8}\ \boxed{-13}\ \boxed{21}\ \boxed{34}$$

になる。すなわち、最適点の交互列の連比には冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】が２連交代して現れている。特に $c=34$ のとき、この交互列は【ダ・ヴィンチ・コード】の２連交代そのものになっている。

## 4　交互フィボナッチ分割

この節では、まず最適化の１階条件が「美しい条件」に帰着できることを示す。これを交互フィボナッチ条件という。次に、この条件に基づいて所与の区間をフィボ比で逐次分割すれば、最適な分割が得られることを示す。すなわち、**交互フィボナッチ最適分割**（alternately Fibonacci optimal section）を提示する。

### 4.1　主問題

さて、主問題 $(\mathrm{P}_4)$ の目的関数を４変数 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の関数 $f(x)$ で表す。

$$f(x) \ = \ \left[(c+x_1)^2+x_1^2\right]+\left[(x_1+x_2)^2+x_2^2\right]+\left[(x_2+x_3)^2+x_3^2\right]+\left[(x_3+x_4)^2+x_4^2\right].$$

このとき $f(x)$ は凸関数[5]ある。また一般に最小解 $x$ は１階条件を満たす。したがって、この問題では１階条件を満たす $x$ を求めれば、最小解が得られる。実際、１階条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \ = \ 0 \qquad n=1,2,3,4$$

は４つの式からなる連立一次方程式系

$$\begin{aligned}(c+x_1)+x_1+(x_1+x_2) &= 0\\(x_1+x_2)+x_2+(x_2+x_3) &= 0\\(x_2+x_3)+x_3+(x_3+x_4) &= 0\\(x_3+x_4)+x_4 &= 0\end{aligned} \tag{4}$$

になる。中の２式は隣接３項間であるが、４式とも敢えて整理しないでこのままにしておく。そうすると、これからさらに

---

5）いくつかの方法で確かめられる。

$$\frac{c+x_1}{21} = \frac{x_1}{-13} = \frac{x_1+x_2}{-8} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_2+x_3}{3} = \frac{x_3}{-2} = \frac{x_3+x_4}{-1} = \frac{x_4}{1}$$

すなわち

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}} \qquad \frac{c+x_1}{F_8} = \frac{x_1}{-F_7} = \frac{x_1+x_2}{-F_6} = \frac{x_2}{F_5} = \frac{x_2+x_3}{F_4} = \frac{x_3}{-F_3} = \frac{x_3+x_4}{-F_2} = \frac{x_4}{F_1}$$

が導かれる。これを**交互フィボナッチ条件**（alternately Fibonacci condition, AFC）という。条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ は次の4つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c-(-x_1)}{F_8} = \frac{-x_1}{F_7}, \quad \frac{-x_1-x_2}{F_6} = \frac{x_2}{F_5}, \quad \frac{x_2-(-x_3)}{F_4} = \frac{-x_3}{F_3}, \quad \frac{-x_3-x_4}{F_2} = \frac{x_4}{F_1}.$$

したがって、この系または交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ を解けば、最小解が得られる。幸いにもこれは解き易い。隣接2項間の比例式であり、初期値 $c$ が与えられているから。

さて、ここで方程式系⑷から条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ を導いていこう。まず、⑷の最後の第4式は

$$\frac{x_3+x_4}{1} = -\frac{x_4}{1}$$

に他ならない。したがって、$x_4 = -\dfrac{1}{2}x_3$.　次に、これを用いると第3式より

$$\frac{x_2+x_3}{3} = -\frac{x_3}{2}$$

がわかる。よって、$x_3 = -\dfrac{2}{5}x_2$.　この関係を第2式に代入すると

$$\frac{x_1+x_2}{8} = -\frac{x_2}{5}$$

になる。すなわち、$x_2 = -\dfrac{5}{13}x_1$.　これと第1式より

$$\frac{c+x_1}{21} = -\frac{x_1}{13}$$

が得られる。したがって、$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ が成立することになる。

交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ は8つの1次量

$$c+x_1, \quad x_1, \quad x_1+x_2, \quad x_2, \quad x_2+x_3, \quad x_3, \quad x_3+x_4, \quad x_4$$

が連続する**2連交代**フィボ連比 $F_8 : -F_7 : -F_6 : F_5 : F_4 : -F_3 : -F_2 : F_1$ になることを意味している。すなわち、

$$c-(-x_1), \quad -x_1, \quad -x_1-x_2, \quad x_2, \quad x_2-(-x_3), \quad -x_3, \quad -x_3-x_4, \quad x_4$$

が連続するフィボ連比 $F_8 : F_7 : F_6 : F_5 : F_4 : F_3 : F_2 : F_1$ になることである。**交互フィボ**条件とは、区間 $[-c,\ c]$ に絶対値の大きい方から順に4つの分点 $x_1, x_2, x_3, x_4$ を入れて、8つの量がこの連比になるように分割することである。

初期値 $x_0 = c\ (>0)$ が与えらているから、最適点 $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は次の意味で区間 $[-c,\ c]$ の4段階**交互フィボナッチ分割**（alternately Fibonacci section, AFS）を行って得られる。まず第1段で

$-x_1\,(>0)$ を区間 $[0,\ x_0]\,(=[0,\ c])$ 内にとって $\{c-(-x_1)\}:-x_1=F_8:F_7\,(=21:13)$ にする。次に第2段で、$x_2\,(>0)$ を $[0,\ -x_1]$ の内分点で $(-x_1-x_2):x_2=F_6:F_5\,(=8:5)$ にする。さらに第3段で、$-x_3\,(>0)$ は $[0,\ x_2]$ の内分点で $\{x_2-(-x_3)\}:-x_3=F_4:F_3\,(=3:2)$ にする。最後の第4段では、$x_4$ を $[0, -x_3]$ の $(-x_3-x_4):x_4=F_2:F_1\,(=1:1)$ となる内分点にとる。すなわち、この4段階交互フィボナッチ分割は区間 $[0,\ c]$ に (左　すなわち　小さい方から) 4つの分点 $x_4,\ -x_3,\ x_2,\ -x_1$ を入れて5つに分割してその5つの区間の長さの連比が $1:1:3:8:21=F_1:F_2:F_4:F_6:F_8$ になるようにすることである。

さて、実際に $(\mathrm{AF})_{\mathrm{P}}$ は容易に解けて、

$$\hat{x}=(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)=\frac{c}{34}\Big(\ -13,\quad 5,\quad -2,\quad 1\ \Big) \tag{5}$$

で最小値 $m_4=\dfrac{21}{34}\,c^2$ をもつことを示そう。

最初の

$$\frac{c+x_1}{21}\ =\ \frac{x_1}{-13}$$

より、まず

$$x_1\ =\ -\frac{13}{34}c.$$

したがって、次は $\dfrac{x_1}{-13}=\dfrac{x_2}{5}$ より

$$x_2\ =\ \frac{5}{34}c.$$

さらに、$\dfrac{x_2}{5}=\dfrac{x_3}{-2}$ より

$$x_3\ =\ -\frac{2}{34}c.$$

最後に、$\dfrac{x_3}{-2}=\dfrac{x_4}{1}$ より

$$x_1\ =\ \frac{1}{34}c.$$

すなわち、$\hat{x}$ が得られた。このとき、リュカの公式 (Lucas formula)

$$\sum_{k=1}^{n}F_k\ =\ F_nF_{n+1}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}34^2\,\frac{f(\hat{x})}{c^2}\ &=\ \Big[(34-13)^2+(-13)^2\Big]+\Big[(-13+5)^2+5^2\Big]+\Big[(5-2)^2+(-2)^2\Big]+\Big[(-2+1)^2+1^2\Big]\\ &=\ 21^2+13^2+8^2+5^2+3^2+2^2+1^2+1^2\\ &=\ 21\cdot 34\end{aligned}$$

になる。すなわち、最小値は

$$f(\hat{x}) \;=\; \frac{21}{34}c^2$$

である。

### 4.2　双対問題

今度は、双対問題 ($\mathrm{D}_4$) の目的関数を 4 変数 $\mu$=($\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$) の関数 $g(\mu)$ で表そう。

$$g(\mu) \;=\; 2c\mu_0 - \mu_1^0 - \left[(\mu_0+\mu_1)^2+\mu_1^2\right] - \left[(\mu_1+\mu_2)^2+\mu_2^2\right] - \left[(\mu_2+\mu_3)^2+\mu_3^2\right] - \mu_3^2.$$

$g(\mu)$ は凹関数[6]である。最大解 $\mu$ は 1 階条件を満たすので、1 階条件を解けば、最大解が得られる。実際、1 階条件

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_n} \;=\; 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

は 4 式からなる連立一次方程式系

$$\begin{aligned} -(c-\mu_0)+(\mu_0+\mu_1) &= 0 \\ (\mu_0+\mu_1)+\mu_1+(\mu_1+\mu_2) &= 0 \\ (\mu_1+\mu_2)+\mu_2+(\mu_2+\mu_3) &= 0 \\ (\mu_2+\mu_3)+2\mu_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

になる。これから双対問題 ($\mathrm{D}_4$) に対する交互フィボ条件

$$\frac{c-\mu_0}{13} = \frac{\mu_0+\mu_1}{13} = \frac{\mu_1}{-8} = \frac{\mu_1+\mu_2}{-5} = \frac{\mu_2}{3} = \frac{\mu_2+\mu_3}{2} = \frac{\mu_3}{-1}$$

すなわち

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}} \qquad \frac{c-\mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \frac{\mu_1}{-F_6} = \frac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \frac{\mu_2}{F_4} = \frac{\mu_2+\mu_3}{F_3} = \frac{\mu_3}{-F_2}$$

が導かれる。これは次の 4 つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c-\mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0-(-\mu_1)}{F_7} = \frac{-\mu_1}{F_6}, \qquad \frac{-\mu_1-\mu_2}{F_5} = \frac{\mu_2}{F_4}, \qquad \frac{\mu_2-(-\mu_3)}{F_3} = \frac{-\mu_3}{F_2}.$$

方程式系(6)から条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ を導こう。まず、系の第 4 式は

$$\frac{\mu_2+\mu_3}{2} \;=\; \frac{\mu_3}{-1}$$

である。よって $\mu_3 = -\dfrac{1}{3}\mu_2$.　次に、これを第 3 式に代入して

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{5} \;=\; \frac{\mu_2}{-3}.$$

よって $\mu_2 = -\dfrac{3}{8}\mu_1$.　この関係と第 2 式より

$$\frac{\mu_0+\mu_1}{13} \;=\; \frac{\mu_1}{-8}.$$

---

6）$f(x)$ と同様にいくつかの方法で確かめられる。

最後に、第１式は

$$\frac{c-\mu_0}{13} = \frac{\mu_0+\mu_1}{13}$$

に他ならない。したがって、条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ が成立する。

交互フィボ条件 $(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ は７つの１次量

$$c-\mu_0, \quad \mu_0+\mu_1, \quad \mu_1, \quad \mu_1+\mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2+\mu_3, \quad \mu_3$$

がフィボ連比 $F_7:F_7:-F_6:-F_5:F_4:F_3:-F_2$ になることを意味している。すなわち、この条件とは、区間 $[-c, c]$ に絶対値が大きい方から順に４つの分点 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ を入れて、７つの量がこの連比になるように分割することである。

主問題 $(\mathrm{P}_4)$ の初期値 $x_0=c\,(>0)$ が与えられているとき、双対問題 $(\mathrm{D}_4)$ の最適点 $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ は区間 $[-c, c]$ の３段階交互フィボ条件によって得られる。まず第１段では、$\mu_0, \mu_1$ を次の２つを同時に満たすように定める。

- $\mu_0\,(>0)$ は区間 $[-\mu_1, x_0]\,(=[-\mu_1, c])$ を $F_7:F_7\,(=13:13)$ の比に内分する点、すなわち $[-\mu_1, c]$ の中点である。
- $-\mu_1\,(>0)$ は区間 $[0, \mu_0]$ を $F_6:F_7\,(=8:13)$ の比に内分する。

これは可能であり、容易である。次の第２段では、$\mu_2\,(>0)$ を $[0, -\mu_1]$ を $F_4:F_5\,(=3:5)$ に内分する点にとる。最後の第３段では、$-\mu_3\,(>0)$ を $[0, \mu_2]$ の $F_2:F_3\,(=1:2)$ の内分点にする。すなわち、この３段階交互フィボナッチ分割は区間 $[0, c]$ に左から４つの分点 $-\mu_3, \mu_2, -\mu_1, \mu_0$ を入れて５つに分割し、５つの区間の長さの連比が $1:2:5:13:13=F_2:F_3:F_5:F_7:F_7$ になるようにすることである。

ここで注意したいのは、結果的に $\mu_0$ から始まる７つの量

$$\mu_0, \quad \mu_0+\mu_1, \quad \mu_1, \quad \mu_1+\mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2+\mu_3, \quad \mu_3$$

は連続する**２連交代**フィボ連比 $F_8:F_7:-F_6:-F_5:F_4:F_3:-F_2$ になっているということである。すなわち、

$$\mu_0, \quad \mu_0-(-\mu_1), \quad -\mu_1, \quad -\mu_1-\mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2-(-\mu_3), \quad -\mu_3$$

が連続するフィボ連比 $F_8:F_7:F_6:F_5:F_4:F_3:F_2$ になっていることである。

さて、$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D}}$ を解いて、

$$\mu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) = \frac{c}{34}\Big(\ 21,\quad -8,\quad 3,\quad -1\ \Big) \tag{7}$$

が最大値 $M_4 = \dfrac{21}{34}\,c^2$ に達していることを示そう。

最初の

$$\frac{c-\mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0+\mu_1}{F_7} = \frac{\mu_1}{-F_6}$$

は

$$\frac{c-\mu_0}{F_7} = \frac{\mu_0-(-\mu_1)}{F_7} = \frac{-\mu_1}{F_6}$$

に他ならない。これは、区間 $[0,\ c]$ を分点 $\mu_0$，$-\mu_1$ で3つに分けて長さ $c-\mu_0$，$\mu_0-(-\mu_1)$，$-\mu_1$ を $F_6:F_7:F_7\,(=8:13:13)$ の比にすることである。よって

$$\mu_0 = \frac{F_6+F_7}{F_6+F_7+F_7}c = \frac{F_8}{F_9}c$$

$$\mu_1 = \frac{-F_6}{F_6+F_7+F_7}c = \frac{-F_6}{F_9}c.$$

次に

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{-F_5} = \frac{\mu_2}{F_4}$$

より、$\mu_1$ の値を用いると

$$\mu_2 = -\frac{F_4}{F_6}\mu_1 = \frac{F_4}{F_6}\frac{F_6}{F_9}c = \frac{F_4}{F_9}c.$$

最後に

$$\frac{\mu_2+\mu_2}{-F_4} = \frac{\mu_3}{F_2}$$

より

$$\mu_3 = -\frac{F_2}{F_4}\mu_1 = \frac{F_2}{F_4}\frac{F_4}{F_9}c = -\frac{F_2}{F_9}c.$$

ゆえに、

$$\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*) = \frac{c}{F_9}\begin{pmatrix} F_8\,, & -F_6\,, & F_4\,, & -F_2 \end{pmatrix}$$

が得られた。このとき、リュカの公式より

$$\begin{aligned} g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_8F_9 - F_8^2 - \left[(F_8-F_6)^2 + (-F_6)^2\right] - \left[(-F_6+F_4)^2 + F_4^2\right] \\ &\quad - \left[(F_4-F_2)^2 + (-F_2)^2\right] - (-F_2)^2 \\ &= 2F_8F_9 - \left[F_8^2+F_7^2+F_6^2+F_5^2+F_4^2+F_3^2+F_2^2+F_1^2\right] \\ &= 2F_8F_9 - F_8F_9 \\ &= F_8F_9 \end{aligned}$$

になる。すなわち、最大値

$$g(\mu^*) = \frac{F_8}{F_9}c^2$$

が得られた。

## 5　個別 $n$ 変数問題

ここでは $n$=1，2，3 の各々について、問題対 ($\mathrm{P}_n$)，($\mathrm{D}_n$) の最適解を 2 つの方法によって求める。この最適解によって【交互ダ・ヴィンチ・コード】以前が現れ、さらに交互フィボ相補双対性が成り立つかどうかを確かめることができる。

### 5.1　1 変数

1 変数の主問題と双対問題

$$
(\mathrm{P}_1) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (c+x_1)^2 + x_1^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_1 < \infty \end{array}
$$

$$
(\mathrm{D}_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \mu_0^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_0 < \infty \end{array}
$$

を考える。これは最大最小の典型的な問題である。問題 ($\mathrm{P}_1$) は最小値 $m_1 = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}} c^2$ と最小点

$$\hat{x}_1 = \frac{c}{\boxed{2}} \left( \boxed{-1} \right)$$

をもち、問題 ($\mathrm{D}_1$) は最大値 $M_1 = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}} c^2$ と最大点

$$\mu_0^* = \frac{c}{\boxed{2}} \left( \boxed{1} \right)$$

をもっている。

主と双対の交互フィボ条件は 1 変数では次になる。

$$
\begin{array}{lcl}
(\mathrm{AF})_{\mathrm{P1}} & \dfrac{c+x_1}{F_2} = \dfrac{x_1}{-F_1} \\[2ex]
(\mathrm{AF})_{\mathrm{D1}} & \dfrac{c-\mu_1}{F_2} = \dfrac{\mu_1}{F_1}.
\end{array}
$$

交互フィボ条件を解くと、主と双対の最適解が得られる。

$$(x_0, \hat{x}_1) = \frac{c}{F_3} \left( F_3, \quad -F_1 \right)$$

のとき、主問題は最小値 $m_1 = \dfrac{F_2}{F_3} c^2$ をもつ。

$$\mu_0^* = \frac{c}{F_3} \left( F_2 \right)$$

のとき、双対問題は最大値 $M_1 = \dfrac{F_2}{F_3} c^2$ をもつ。

このとき、最適解の交互列は

$$\left( \boxed{x_0},\ \boxed{\mu_0^*},\ \boxed{\hat{x}_1} \right) = \frac{c}{2}\left( \boxed{2},\ \boxed{1},\ \boxed{-1} \right).$$

## 5.2　2変数

2変数の主問題と双対問題は

$$(\mathrm{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (c+x_1)^2 + x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < x_1, x_2 < \infty \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \left[(\mu_0+\mu_1)^2 + \mu_1^2\right] - \mu_1^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < \mu_0, \mu_1 < \infty \end{array}$$

になる。問題 $(\mathrm{P}_2)$ は最小値 $m_2 = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\, c^2$ と最小点

$$(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = \frac{c}{\boxed{5}}\left( \boxed{-2},\ \boxed{1} \right)$$

をもち、問題 $(\mathrm{D}_2)$ は最大値 $M_2 = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\, c^2$ と最大点

$$(\mu_0^*,\ \mu_1^*) = \frac{c}{\boxed{5}}\left( \boxed{3},\ \boxed{-1} \right)$$

をもっている。

主と双対の交互フィボ条件は2変数では次になる。

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P2}}\qquad \frac{c+x_1}{F_4} = \frac{x_1}{-F_3} = \frac{x_1+x_2}{-F_2} = \frac{x_2}{F_1}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D2}}\qquad \frac{c-\mu_0}{F_3} = \frac{\mu_0+\mu_1}{F_3} = \frac{\mu_1}{-F_2}.$$

交互フィボ条件を解くと、主と双対の最適解が得られる。

$$\hat{x} = (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = \frac{c}{F_5}\left( F_5,\ \ -F_3,\ \ F_1 \right)$$

のとき、最小値 $m_2 = \dfrac{F_4}{F_5}\, c^2.$

$$\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*) = \frac{c}{F_5}\left( F_4,\ \ -F_2 \right)$$

のとき、最大値 $M_2 = \dfrac{F_4}{F_5}\, c^2.$

したがって、最適解の交互列は

$$\left( \boxed{x_0},\ \boxed{\mu_1^*},\ \boxed{\hat{x}_1},\ \boxed{\mu_2^*},\ \boxed{\hat{x}_2} \right)$$

$$= \frac{c}{5}\left( \boxed{5},\ \boxed{3},\ \boxed{-2},\ \boxed{-1},\ \boxed{1} \right)$$

となり、フィボ相補双対性が垣間見える。

### 5.3　3 変数

主と双対は 3 変数問題では

$$(\mathrm{P}_3)\qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (c+x_1)^2 + x_1^2 + (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + (x_2+x_3)^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < x_n < \infty \qquad n = 1, 2, 3 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_3)\qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \left[(\mu_0+\mu_1)^2 + \mu_1^2 + (\mu_1+\mu_2)^2 + \mu_2^2\right] - \mu_2^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < \mu_n < \infty \qquad n = 0, 1, 2 \end{array}$$

になる。問題 $(\mathrm{P}_3)$ は最小値 $m_3 = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{13}}\, c^2$ と最小点

$$(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3) = \frac{c}{\boxed{13}}\left( \boxed{-5},\ \boxed{2},\ \boxed{-1} \right)$$

をもっている。問題 $(\mathrm{D}_3)$ は最大値 $M_3 = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{13}}\, c^2$ と最大点

$$(\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*) = \frac{c}{\boxed{13}}\left( \boxed{8},\ \boxed{-3},\ \boxed{1} \right)$$

をもっている。

主と双対の交互フィボ条件は次になる。

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{P3}}\qquad \frac{c+x_1}{F_6} = \frac{x_1}{-F_5} = \frac{x_1+x_2}{-F_4} = \frac{x_2}{F_3} = \frac{x_2+x_3}{F_2} = \frac{x_3}{-F_1}$$

$$(\mathrm{AF})_{\mathrm{D3}}\qquad \frac{c-\mu_0}{F_5} = \frac{\mu_0+\mu_1}{F_5} = \frac{\mu_1}{-F_4} = \frac{\mu_1+\mu_2}{-F_3} = \frac{\mu_2}{F_2}.$$

交互フィボ条件を逐次解くと、主と双対の最適解が得られる。

$$\hat{x} = (x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3) = \frac{c}{F_7}\left( F_7,\ \ -F_5,\ \ F_3,\ \ -F_1 \right)$$

のとき、主は最小値 $m_3 = \dfrac{F_6}{F_7}\, c^2$ をもつ。他方、

$$\mu^* = (\mu_0^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*) = \frac{c}{F_7}\left( F_6,\ \ -F_4,\ \ F_2 \right)$$

のとき、双対は最大値 $M_3 = \dfrac{F_6}{F_7}\, c^2$ をもつ。

したがって、最適解の交互列

$$\boxed{x_0},\ \boxed{\mu_1^*},\ \boxed{\hat{x}_1},\ \boxed{\mu_2^*},\ \boxed{\hat{x}_2},\ \boxed{\mu_3^*},\ \boxed{\hat{x}_3}$$

は定数 $\frac{c}{13}$ を無視すれば、

$$\boxed{13},\ \boxed{8},\ \boxed{-5},\ \boxed{-3},\ \boxed{2},\ \boxed{1},\ \boxed{-1}$$

となっている。フィボ相補双対性が見えてきた。

## 6　双対問題の導出

さて、主問題から双対問題がどのようにして導かれるだろうか。一般に、２つの方法――ラグランジュ乗数法［13］と準線形化法［2，13，18］――があるが、この章ではラグランジュ乗数法とは独立に直接双対問題を導こう。

主問題

$$
(\mathrm{P}_4)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3}\left[(x_n+x_{n+1})^2+x_{n+1}^2\right]\\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ (x_1,\ \ldots,\ x_4)\in R^4\\
& \text{(ii)}\ \ x_0=c
\end{array}
$$

が与えられているとしよう。いま、$x=(x_1,\ldots,\ x_4)$ が制約条件(i), (ii)を満たすとして、その目的関数の値を $I(x)$ で表わす。

$$I(x)\ =\ \sum_{n=0}^{3}\left[(x_n+x_{n+1})^2+x_{n+1}^2\right].$$

このとき、変数列 $u=(u_0,\ldots,\ u_3)$ を

$$u_n=x_n+x_{n+1}\qquad 0\le n\le 3 \tag{8}$$

で導入すると、任意の変数列 $\mu=(\mu_0,\ldots,\ \mu_3)$ を用いて、値 $I(x)$ は次で表わされる。

$$I(x)\ =\ \sum_{n=0}^{3}\left[u_n^2+x_{n+1}^2+2\mu_n(x_{n+1}+x_n-u_n)\right]. \tag{9}$$

$\mu$ を**ラグランジュ乗数列**という。このとき、さらに

$$
\begin{aligned}
I(x)\ &=\ 2c\mu_0+\sum_{n=1}^{3}\left[x_n^2+2(\mu_{n-1}+\mu_n)x_n\right]+x_4^2+2\mu_3x_4+\sum_{n=0}^{3}\left(u_n^2-2\mu_nu_n\right)\\
&=\ 2c\mu_0-\mu_0^2-\sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n+\mu_{n+1})^2+\mu_{n+1}^2\right]-\mu_3^2\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{3}(x_n+\mu_{n-1}+\mu_n)^2+(x_4+\mu_3)^2+\sum_{n=0}^{3}(u_n-\mu_n)^2.\\
&\ge\ 2c\mu_0-\mu_0^2-\sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n+\mu_{n+1})^2+\mu_{n+1}^2\right]-\mu_3^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ。最後の右辺を $J(\mu)$ で表わそう。

$$J(\mu) \;=\; 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2.$$

すると、不等式

$$I(x) \;\geq\; J(\mu) \tag{10}$$

が(8)を満たす任意の $(x,\ u)$ と任意の $\mu$ に対して成り立つ。等号は

$$x_n + \mu_{n-1} + \mu_n \;=\; 0 \quad 1 \leq n \leq 3, \qquad x_4 + \mu_3 \;=\; 0, \qquad u_n \;=\; \mu_n \quad 0 \leq n \leq 3 \tag{11}$$

のときに限り成り立つ。さて、(8), (11)を満たす $(x,\ u\ ;\mu)$ を求めよう。まず $u$, $\mu$ を消去すると、

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; c \\ x_{n-1} + 3x_n + x_{n+1} \;&=\; 0 \quad 1 \leq n \leq 3 \\ x_3 + 2x_4 \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{12}$$

になる。このとき、

$$u_n \;=\; \mu_n \;=\; x_n + x_{n+1} \quad 0 \leq n \leq 3. \tag{13}$$

連立方程式(12)は解

$$\hat{x}_n \;=\; (-1)^n \frac{F_{9-2n}}{F_9} c \quad 1 \leq n \leq 4 \tag{14}$$

をもつ。すなわち、

$$\begin{aligned} \hat{x} \;&=\; \left(\ \hat{x}_1,\quad \hat{x}_2,\quad \hat{x}_3,\quad \hat{x}_4\ \right) \\ &=\; \frac{c}{F_9}\left(\ -F_7,\quad F_5,\quad -F_3,\quad F_1\ \right). \end{aligned}$$

また(13)より、

$$\hat{u}_n \;=\; \mu_n^* \;=\; (-1)^n \frac{F_{8-2n}}{F_9} c \qquad 1 \leq n \leq 4 \tag{15}$$

になる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mu^* \;&=\; \left(\ \mu_0^*,\quad \mu_1^*,\quad \mu_2^*,\quad \mu_3^*\ \right) \\ &=\; \frac{c}{F_9}\left(\ F_8,\quad -F_6,\quad F_4,\quad -F_2\ \right). \end{aligned}$$

したがって、(8)、(11)の解 $(\hat{x},\ \hat{u}\ ;\mu^*)$ は(14)、(15)で与えられる。これで $J(\mu)$ の最大化

$$(\mathrm{D}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_0 - \mu_0^2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{2}\left[(\mu_n + \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_3^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 0, 1, 2, 3. \end{array}$$

が双対問題であることが分かった。

**参考文献**


［1］ R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

［2］ R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

［3］ A. Beutelspacher and B. Petri, 黄金分割―自然と数理と芸術と―(柳井浩訳), 共立出版, 2005; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflange*, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

［4］ D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード（上・下）(越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday (USA) & Bantam (UK), 2003.

［5］ R.A. Dunlap, 黄金比とフィボナッチ数(岩永恭雄・松井講介訳), 日本評論社, 2003; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

［6］ 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

［7］ S. Iwamoto, Cross dual on the Golden optimum solutions,「経済の数理解析」, 京大数理研講究録1443, 2005年7月, pp. 27-43.

［8］ S. Iwamoto, The Golden trinity―optimility, inequality, identity―,「経済の数理解析」, 京大数理研講究録1488, 2006年5月, pp. 1-14.

［9］ S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05)*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 199-205.

［10］ 岩本誠一、黄金最適解を鑑賞する――経済数学へのプレリュード（V）――, 経済学研究・別冊　第12号（九大経済学会）, 平成18（2006）年4月, pp.39-43.

［11］ 岩本誠一、最適化「ダ・ヴィンチ・コード」――経済数学へのプレリュード（VI）――, 経済学研究・別冊　第13号（九大経済学会）. 平成19（2007）年4月, pp.45-52.

［12］ 岩本誠一、ダ・ヴィンチ・コードは最適か？、数理経済学研究センター会報、第37号、平成21（2009）年9月、pp.1-9.

［13］ 岩本誠一、吉良知文、植野貴之、ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究（九大経済学会）, 第76巻（2009年10月）2/3号, pp.1-22.

［14］ S. Iwamoto and A. Kira, The Fibonacci complementary duality in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, in press.

［15］ S. Iwamoto and M. Yasuda, "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, December, 2004.

［16］ S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, Advanced Studies in Pure

Mathematics 53, June 2009, Advances in Discrete Dynamic Systems, pp.77-86. *Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA 2006)*, Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.

[17] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191-202.

[18] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[19] 中村　滋、フィボナッチ数の小宇宙――フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割――、日本評論社、2002.

[20] H. Walser, 黄金分割（蟹江幸博訳）, 日本評論社, 2002; (Original) *DER GOLDENE SCHNITT*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996.

[21] 柳　亮、「黄金分割：ピラミッドからル・コルビュジュまで」、1965年、美術出版社。

[22] 柳　亮、「黄金分割、日本の比例」、1977年、美術出版社。

岩本　誠一〔九州大学名誉教授〕

木村　寛〔秋田県立大学システム科学技術学部　准教授〕