九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

適応形サンプル値フィルタについて

小段, 謙一
九州大学医療技術短期大学部診療放射線技術学科

https://doi.org/10.15017/164

出版情報：九州大学医療技術短期大学部紀要. 14, pp.15-21, 1987-02-28. 九州大学医療技術短期大学部
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

適応形サンプル値フィルタについて

小 段 謙 一 *

On Adaptive Sampled-Data Filters

Kenichi Kodan

1．ま え が き

通信および制御の分野において，周波数の変動を伴なう信号をフィルタで処理する場合，周波数変動に合わせてフィルタの特性が変化する，いわゆる適応形フィルタが要求される場合が多い。

この目的のために，ディジタルフィルタの場合は伝達関数の係数を可変にする方式が，その容易さのため多く用いられている。

これに対して，ディジタルフィルタと原理的には同じであるが，サンプル値信号をアナログ量のまま処理するサンプル値フィルタの場合は，サンプリング周波数を可変にする方式が考えられている。[4)5)6)7)]

サンプル値フィルタは，単能的な用途では経済性，高速性などの点で優れていると考えられる。[1)2)3)]又，サンプリング周波数可変方式は，後述する様にフィルタの構成が不変であるなどの特徴を有する。

本稿では，このサンプリング周波数可変方式の適応形サンプル値フィルタの適応特性について基礎的な考察を行ない，特に，適応特性の一つとして重要な応答時間と周波数変動率の関係につき解析を行なう。

＊九州大学医療技術短期大学部
診療放射線技術学科

2．サンプル値フィルタの基礎的考察

2.1 回路構成と伝達関数

基本的なサンプル値フィルタとして，図1の様な二次系共振器を考える。この共振器の入出力の関係は，係数 b_1, b_2，サンプリング信号の周期 T_S（遅延素子の遅延時間でもある）を用いて次の様に表わせる。

$$y(nT_S)=x(nT_S)-b_1y((n-1)T_S)-b_2y((n-2)T_S) \quad (1)$$

これをZ変換して初期値をゼロとおくと，伝達関数 H(Z) は次式の様に求められる。

$$H(Z)=1/(1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}) \quad (2)$$

但し，$Z=e^{T_sS}$ である。

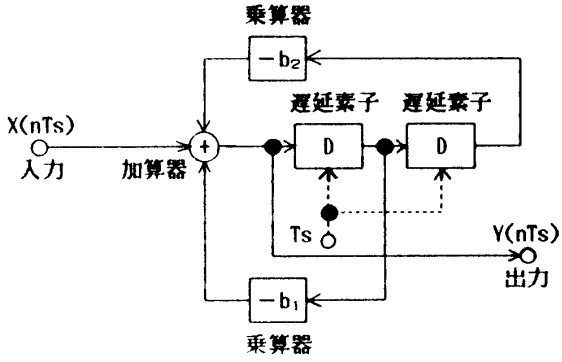

図1. サンプル値フィルタ（二次系共振器）

又，(2)式は H(Z) の極を $re^{\pm j\phi}(0<r<1)$ として次の様に表わせる。

$$H(Z)=Z^2/\{(Z-re^{j\phi})(Z-re^{-j\phi})\} \quad (2')$$

従って，係数 b_1, b_2 と r, ϕ の間には，次の関係が成り立つ。

$$b_1=-2r\cos\phi, \quad b_2=r^2 \quad (3)$$

2.2 周波数特性と共振器のQ

周波数特性は，(2')式に $Z=e^{j\omega T_s}$ を代入することにより次式の様に表わせる。

$$|H(e^{j\omega T_s})|=1/|(e^{j\omega T_s}-re^{j\phi}) \cdot (e^{j\omega T_s}-re^{-j\phi})| \quad (4)$$

(4)式は $\omega T_S=\phi$ を満足する角周波数 $\omega=\omega_C$ においてピークをなす共振特性を有する。すなわち，ω_C は共振器の中心角周波数であり，次式を満足する。

$$\omega_C T_S=\phi \quad (5)$$

(4), (5)式より，共振特性のピーク値および共振器のQが求められて次式の様になる。

$$|H(e^{j\phi})|=1/(1-r)\sqrt{1-2r\cos 2\phi+r^2} \quad (6)$$

$$Q=\phi/2\cos^{-1}\{(-1+4r-r^2)/2r\} \quad (7)$$

2.3 共振器の動作方式

次に，この共振器の動作方式について考察する。最初に，充分な共振特性が得られる様に(7)式より r, ϕ の値を設定する。これを $r=r_0(\fallingdotseq 1)$, $\phi=\phi_0$ とする。又，この時 $T_S=T_{SO}$ とすると中心角周波数は(5)式より次の様に与えられる。

$$\omega_C=\omega_{CO}=\phi_0/T_{SO} \quad (8)$$

ここで，この共振器を用いて，任意の入力信号（基本角周波数 ω_i ）の基本波成分のみを抽出することを考える。このためには，(8)式より ϕ_0 又は T_{SO} を変化させて，共振器の中心角周波数を ω_{CO} から ω_i に変化させれば良い。

$\omega_i/\omega_{CO}=k$ であるとすると，次の二つの方法が考えられる。

(i) T_S を T_{SO} に固定し，ϕ を ϕ_0 から $\phi'=k\phi_0$ に変化させて，

$$\omega_C=\phi/T_S=\phi'/T_{SO}=k\phi_0/T_{SO} =k\omega_{CO}=\omega_i \quad (9)$$

とする方法。これは(3)式より，係数可変方式となる。

(ii) ϕ を ϕ_0 に固定し，T_S を T_{SO} から $T_S'=T_{SO}/k$ に変化させて，

$$\omega_C=\phi/T_S=\phi_0/T_S'=\phi_0/(T_{SO}/k) =k\omega_{CO}=\omega_i \quad (9')$$

とする方法。これはサンプリング周波数（周期）可変方式であり，(i)と比較して以下に述べる特徴を有する。

(イ) r, ϕ が不変であるから，フィルタの構成は不変である。

(ロ) (6)式より，ピーク値が不変である。

(ハ) (7)式より，任意の ω_i に対してQ一定のまま，入力の基本波を抽出できる。

以下，このサンプリング周波数（周期）可変方式について考察を進める。

2.4 サンプリング周波数可変方式

入力周期を T_i ($=2\pi/\omega_i$) とすると，(9')式より次式が成立する。

$$T_i/T_S'=2\pi/\phi_0=N=\text{const.} \quad (10)$$

ここで，サンプリング定理により，$N\geq 2$ でなければならない。又，これより $0<\phi_0\leq\pi$ となる。

サンプリング周波数可変方式についてまとめると以下の様になる。

『任意の入力信号に対して，その基本周波数との比が回路構成で決まる一定値Nを保つ様にサンプリング周波数を変化させれば，フィルタの構成を変えることなく共振器の中心周波数を入力の基本周波数に一致させることができ，常にQ一定のままで出力から入力の基本波を抽出することができる』

3．適応形サンプル値フィルタ

ある入力信号の基本波で共振器が共振している時，入力周波数に変動が生じた場合も，サンプリング周波数を(10)式を満足する様に適応変化させれば，常に入力の基本波抽出が可能である。

上記のことを実現する方法として，入力周期を検出して1/Nとしサンプリング周期とする回路を考え，これをサンプル値フィルタに付加し，全体を適応形サンプル値フィルタと呼ぶことにする。ここで，入力信号は基本波以外の周波数成分を多く含み歪が大きいと考えられるので，フィルタを通って歪の軽減された出力信号から周期T_0を検出して，入力周期の変動を知る方法を用いることにする。

図2に適応形サンプル値フィルタの構成を示す。

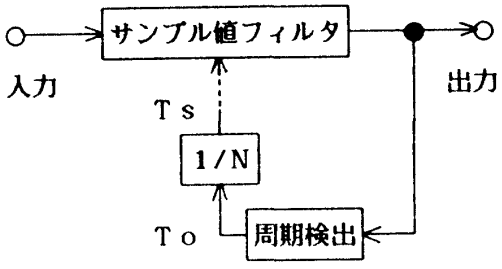

図2． 適応形サンプル値フィルタ

4．適応形サンプル値フィルタの過渡応答

4.1 過渡応答波形

入力信号の基本周波数で共振している適応形共振器があり定常状態にあるとする。ある時点で，入力の基本角周波数 ω_i が $M\omega_i$ に step 変化したとする。但し，ここでは $M \geq 1$ の場合を考える。その時の過渡応答の様子は図3の様になる。

これは(1)式にもとづいて図4のフローチャートにより計算機でシミュレートした結果であり，$M = 1.5$ の場合の例である。なお，ここでは出力周期は出力のゼロクロス点より求めている。

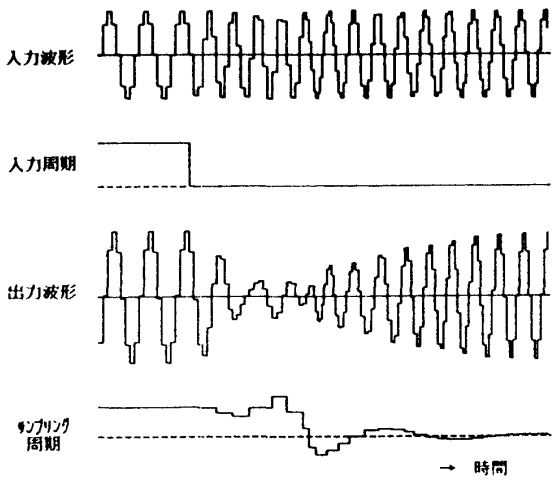

図3. 過渡応答波形

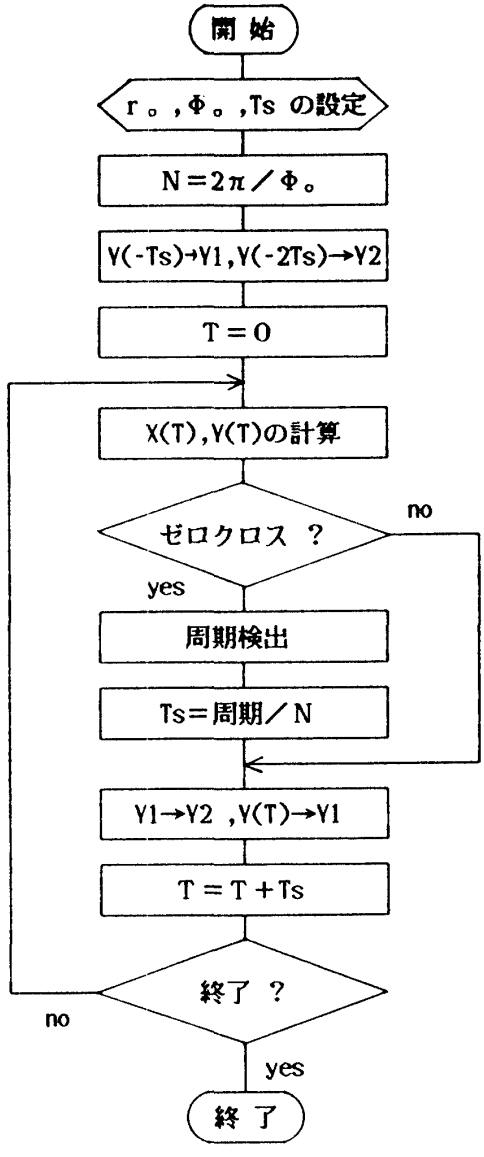

図4. 適応形サンプル値フィルタの
シミュレーション用フローチャート

4.2　過渡応答解析のための仮定

解析を簡単にするため，過渡応答波形が次の(1)～(4)の区間に分割できると仮定する。区間(i)における入力周期のサンプリング周期に対する比をR(i)とする。

(1)　$R(1)=T_i/T_S=N$ が成り立ち，定常状態にある。

(2)　入力周期は T_i/M となるが，出力からは未検出でありサンプリング周期は T_S のまま。よって，$R(2)=(T_i/M)/T_S \neq N$，従って，出力の包絡線が時間とともに減少して行く。

(3)　出力より入力周期 T_i/M を検出し得てサンプリング周期は T_S/M となる。よって，$R(3)=(T_i/M)/(T_S/M)=N$，従って，出力の包絡線は時間とともに定常値に向って増加する。

(4)　$R(4)=N$ で，出力は再び定常状態にある。

ここで簡単のため，出力周期従ってサンプリング周期は区間(2)と(3)の境でstep変化すると仮定する。この仮定の下での各区間における入力周期，出力周期，サンプリング周期の変化の様子を図5に示す。但し，この図では入力，出力波形は，包絡線の大きさと周期の変化のみ示す様に簡略化してある。

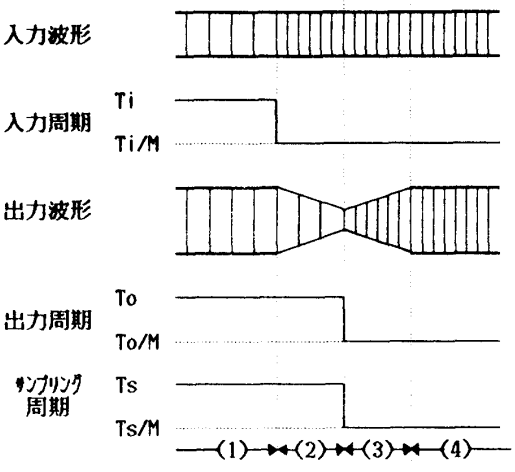

図5.　過渡応答波形（仮定）

5．応答の一般的解析

5.1　定常応答

共振器の振幅および位相の周波数特性を夫々，$H(m)$, $\theta(m)$ とする。但し，mは中心周波数で正規化した周波数である。これは，(2')式に $Z=e^{jm\omega T_s}$ を代入して次式の様に求められる。

$$H(m)=1/\sqrt{1+r_0^2-2r_0\cos((m-1)\phi_0)}\cdot 1/\sqrt{1+r_0^2-2r_0\cos((m+1)\phi_0)}$$

$$\theta(m)=2m\phi_0-\tan^{-1}\frac{\sin m\phi_0-r_0\sin\phi_0}{\cos m\phi_0-r_0\cos\phi_0}-\tan^{-1}\frac{\sin m\phi_0+r_0\sin\phi_0}{\cos m\phi_0-r_0\cos\phi_0} \quad (11)$$

前章の区間(1)，(4)の様に，$R(i)=N$ で定常状態にある時は，入力周波数が共振器の中心周波数に一致しているから，定常出力は，振幅が入力の $H(1)$ 倍，位相は $\theta(1)$ 進むことになる。

区間(2)の様にサンプリング周期不変で中心周波数も不変，入力周波数のみM倍に変化した時は，定常出力は，振幅が入力の $H(M)$ 倍，位相は $\theta(M)$ 進むことになる。

5.2　過渡応答

(1)式をZ変換すると入出力のZ変換 $X(Z)$，$Y(Z)$ の間に次の関係が成立する。

$$Y(Z)=\frac{X(Z)}{1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}}+\frac{A+BZ^{-1}}{1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}} \quad (12)$$

従って出力は(12)式の右辺第一項の入力による項(Y_X)と第二項の初期値による項(Y_i)の和で表わされる。

Y_i は過渡項のみであり，これには，振幅 $H(k)$，位相差 $\theta(k)$ の定常出力を初期値とする角周波数 $l\omega_i$ の過渡項が考えられる。これを $Y_{it}(k,l)$ とする。

次に，Y_X は定常項と過渡項が考えられ，これには，振幅 $H(k)$，位相差 $\theta(k)$，角周波数 $l\omega_i$ の定常項 $Y_{XS}(k,l)$ と，上記定常項に達するまでの過渡項 $Y_{Xt}(k)$ が考えられる。

6．適応形サンプル値フィルタの応答時間

応答時間 τ は，入力変動時点から再び定常状態に戻るまでの時間である。4章の区間(2)の長さを τ_1，区間(3)の長さを τ_2 とすると，τ は次の様に表わされる。

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{13}$$

6.1 応答時間 τ_1

4章の仮定と5章の議論により，区間(2)の出力 Y_1 は次の様に表わされる。

$$Y_1 = Y_{xt}(M) + Y_{it}(1,1)$$

又，$Y_{xs}(M,M) = Y_{xt}(M) + Y_{it}(M,1)$ より，

$$Y_1 = Y_{xs}(M,M) + Y_{it}(1,1) - Y_{it}(M,1) \tag{14}$$

ここで，区間(2)の開始時点を $n=0$ とおき，入力を次式の正弦波で表わす。

$$X(nT_S) = -\sin Mn\omega_i T_S = -\sin Mn\phi_0 \tag{15}$$

この時，次式が成り立つ。

$$Y_{xs}(M,M) = -H(M)\sin(Mn\phi_0 + \theta(M)) \tag{16}$$

次に，$Y_{it}(1,1)$ と $Y_{it}(M,1)$ を求める。

$Y_{it}(k,l)$ は(12)式の右辺第二項（極は $r_0 e^{\pm j\phi_0}$）を留数の定理を用いて逆Z変換すると，次式の様に表わせる。

$$Y_{it}(k,l) = -\frac{r_0^{ln-1}}{\sin\phi_0} \cdot C(k)\sin(ln\phi_0 + \psi(k)) \tag{17}$$

但し，

$$C(k) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABr_0\cos\phi_0}$$

$$\psi(k) = \tan^{-1}\{Ar_0\sin\phi_0 / (Ar_0\cos\phi_0 + B)\} \tag{18}$$

$$A = -2r_0\cos\phi_0 \cdot Y_{-1} + r_0^2 Y_{-2}$$

$$B = r_0^2 Y_{-1}$$

$$Y_{-1} = -H(k)\sin(-k\phi_0 + \theta(k))$$

$$Y_{-2} = -H(k)\sin(-2k\phi_0 + \theta(k))$$

よって，

$$Y_{it}(1,1) = -\frac{r_0^{n-1}}{\sin\phi_0} \cdot C(1)\sin(n\phi_0 + \psi(1))$$

$$Y_{it}(M,1) = -\frac{r_0^{n-1}}{\sin\phi_0} \cdot C(M)\sin(n\phi_0 + \psi(M)) \tag{19}$$

(16),(19)式を(14)式に代入して整理すると，Y_1 は以下の様に求められる。

$$Y_1 = -H(M)\sin(Mn\phi_0 + \theta(M)) + Jr_0^{n-1}\sin(n\phi_0 + \psi_J) \tag{20}$$

但し，

$$J = \sqrt{C(M)^2 + C(1)^2 - 2C(M)C(1)\cos(\psi_{(M)} - \psi_{(1)})} / \sin\phi_0$$

$$\psi_J = \tan^{-1}\frac{C(M)\sin\psi(M) - C(1)\sin\psi(1)}{C(M)\cos\psi(M) - C(1)\cos\psi(1)} \tag{21}$$

(20)式の右辺第一項（Y_{11} とする）は，周期 T_i/M で振幅一定，第二項（Y_{12} とする）は周期 T_i で包絡線は時間とともに指数関数的にゼロまで減少することを示している。すなわち，これは，区間(2)における出力周期が時間とともに T_i から T_i/M に推移することを意味する。

(i) $1 \leq M < 2$ の時

解析を簡単にするため，Y_{11} および Y_{12} を夫々，極大点と極小点を順次結んで行く折線で近似すると，両折線の傾きが等しくなる時点で，出力周期は T_i と T_i/M の中間的なものになると考えられる。そこで，この時点を出力周期のstep変化の時点であると考える。

ある時点 n での両折線の傾きを等しいとおくと次式が得られる。

$$Jr_0^{n-1}(r_0^{T_i/4} + r_0^{-T_i/4})/(T_i/2) = 2H(M)/(T_i/2M)$$

ここで，$r_0 \fallingdotseq 1$ として，n について解き，τ_1 を求めると次式の様になる。

$$\tau_1 = T_S \cdot \log\{r_0 MH(M)/J\}/\log r_0 \quad (1 \leq M < 2) \quad (22)$$

区間(2)の包絡線の最終値をEとすると，

$$E = H(M)\cdot\Big[1 + (r_0^{T_i/4} + r_0^{-T_i/4})/2 + \{M/(1+1/M)\}\cdot\{(r_0^{T_i/4} - r_0^{-T_i/4})/(r_0^{T_i/4} + r_0^{-T_i/4})\}\Big]$$

$r_0 \fallingdotseq 1$の時，次の様になる。

$$E = 2H(M) \quad (1 \leq M < 2) \quad (23)$$

(ii) $M \geq 2$の時

この場合は，Y_{12}の一周期中にY_{11}の二周期以上を含むため，(i)の方法は成立しにくい。そこで，Y_{11}の包絡線Jr_0^{n-1}がH(M)に等しくなる時点を出力周期のstep変化の時点であると考える。この時，次式が成り立つ。

$$\tau_1 = T_S \cdot \log\{r_0 H(M)/J\}/\log r_0 \quad (M \geq 2) \quad (24)$$

又，Eはほとんどゼロとみなせる。すなわち，

$$E = 0 \quad (M \geq 2) \quad (25)$$

6.2 応答時間τ_2

4章の仮定と5章の議論により，区間(3)の出力Y_2は次の様に表わせる。

$$Y_2 = Y_{xt}(1) = Y_{xs}(1,M) - Y_{it}(1,M)$$

これより，

$$Y_2 = -H(1)\sin(Mn\phi_0 + \theta(1)) + \{r_0^{Mn-1}C(1)/\sin\phi_0\}\sin(Mn\phi_0 + \psi(1))$$

(11)式および(18)式より$r_0 \fallingdotseq 1$の時，

$C(1) = H(1)\sin\phi_0, \theta(1) = \psi(1)$が成り立つ。

これより，

$$Y_2 = -H(1)\cdot(1 - r_0^{Mn-1})\sin(Mn\phi_0 + \theta(1)) \quad (26)$$

τ_2を(26)式の包絡線$H(1)\cdot(1 - r_0^{Mn-1})$が，区間(2)の包絡線最終値Eから，最終定常振幅H(1)の90％に到達するまでの時間であると考えると，τ_2は次式により求められる。

$$\tau_2 = -T_S \cdot \log 10\{1 - E/H(1)\}/(M \log r_0) \quad (27)$$

7．結　果

T_iで正規化した応答時間τの，入力周波数変動率Mに対する計算値を6章により求め，シミュレーションによる値とともに図6に示した。但し，$r_0 = 0.94, \phi_0 = \pi/4 (N = 8)$とした。

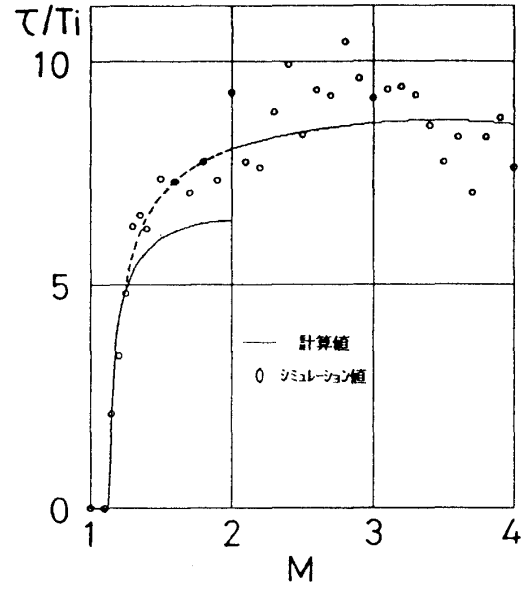

図6．応答時間

結果はほぼ良好である。但し，$1.5 < M < 2$での計算値とシミュレーション値の変化の傾向が異なる。前章の議論では，出力周期step変化時点に関する仮定を，(i) $1 \leq M < 2$と(ii) $M \geq 2$とに分けて考えた。(i)の方式は$M \geq 2$では確かに成立しないと思えるが，$1 \leq M < 2$においても，Mが2に近づくにつれて(i)の方式が成立しなくなると思われる。そこで，Mが1に近い所のτと$M \geq 2$のτをゆるやかに結ぶ線を考えると（図6中の破線の部分），シミュレーション値とほぼ一致する。従って，$1 \leq M < 2$の時の出力周期step変化時点の仮定は更に検討の心要があることがわかった。

8．あ と が き

サンプル値フィルタに，サンプリング周波数を適応変化させる回路を付加した適応形サンプル値フィルタについて，過渡応答現象を中心に

基礎的考察を行なった。特に，応答時間と周波数変動率の関係を求め，ほぼ良好な結果を得た。

今後の課題としては，出力周期検出の早期化や，充分な共振特性と短い応答時間の両方を満足する回路構成値の設定法などが考えられ現在検討中である。

（付記）本稿で使用した計算機シミュレーションは，本学のミニコン DS600 システムによるものである。

参 考 文 献

1） 渡辺，大島，榎本：信学誌，46 － 6，昭和38年6月.

2） W.Kuntz: Nachrichtentechn. Z., 21－2, Feb. 1968.

3） 二宮保：信学論，54 － A，No.12，昭和46年12月.

4） 原田，二宮，坂口：昭和49電子通信学会全国大会，No. 575.

5） 二宮，小段，笹田：昭和51電子通信学会総合全国大会，No. 442.

6） 小段，二宮：昭51電気四学会九州支部連合大会，No. 217.

7） 小段，二宮：九州大学工学集報，第51巻，第3号，昭和53年6月.