

## 成長曲線にもとづく樹幹の重量成長の研究

飯塚, 寛  
九州大学農学部

<https://doi.org/10.15017/15869>

---

出版情報 : 演習林集報. 20, pp.1-65, 1964-06-15. Kyushu University Forests  
バージョン :  
権利関係 :



# 成長曲線にもとづく樹幹の重量成長の研究

飯 塚 寛

Hiroshi IIZUKA

## Study on Weight Growth of Stem by Growth Curves

### 目 次

|                  |                              |
|------------------|------------------------------|
| 緒 言              | Ⅱ 秋材率が年輪巾の一次関数であ<br>らわされる場合  |
| 第1章 成長曲線式の性質の検討  | Ⅲ 適用例                        |
| 第1節 総 成 長        | 第2節 単位年輪の容積密度数               |
| 第2節 連年成長         | Ⅰ 秋材率と単位年輪の容積密度数             |
| 第3節 総平均成長        | Ⅱ 適用例                        |
| 第4節 総 括          |                              |
| 第2章 区分材積成長の理論的推定 | 第4章 区分重量および単木重量成長            |
| 第1節 円板の半径成長      | 第1節 幹足部の重量成長                 |
| Ⅰ 幹足部の円板         | Ⅰ 秋材率が一定の場合                  |
| Ⅱ 幹足部以外の円板       | Ⅱ 秋材率が年輪巾の一次関数であ<br>らわされる場合  |
| 1) 年令を採る場合       |                              |
| 2) 年輪数を採る場合      | 第2節 幹足部以外の区分重量成長             |
| Ⅲ 適用例            | Ⅰ 年令を採る場合                    |
| 1) 幹足部の円板        | 1) 秋材率が一定の場合                 |
| 2) 幹足部以外の円板      | 2) 秋材率が年輪巾の一次関数で<br>あらわされる場合 |
| 第2節 円板の面積成長      | Ⅱ 年輪数を採る場合                   |
| Ⅰ 幹足部の円板         | 1) 秋材率が一定の場合                 |
| Ⅱ 幹足部以外の円板       | 2) 秋材率が年輪巾の一次関数で<br>あらわされる場合 |
| 1) 年令を採る場合       |                              |
| 2) 年輪数を採る場合      | 第3節 単木の重量成長                  |
| 第3節 区分材積成長       | Ⅰ 秋材率が一定の場合                  |
| Ⅰ 幹足部の材積         | Ⅱ 秋材率が年輪巾の一次関数であ<br>らわされる場合  |
| Ⅱ 幹足部以外の区分材積     |                              |
| 1) 年令を採る場合       | 第4節 適用例                      |
| 2) 年輪数を採る場合      | Ⅰ 幹足部の重量成長                   |
| Ⅲ 適用例            | Ⅱ 幹足部以外の区分重量成長               |
| 1) 幹足部の材積        | Ⅲ 単木の重量成長                    |
| 2) 幹足部以外の区分材積    |                              |
| 第3章 単位年輪の容積密度数   | 第5章 結 論                      |
| 第1節 年輪巾と秋材率の関係   | 引用文献                         |
| Ⅰ 秋材率が一定の場合      |                              |

## 緒 言

同一材積で相互に年令の異なる樹木が生育しているとき、その各々が有する木材実質の量は等しいと考えられるであろうか。この疑問に対し、林木を単に材積成長の観点のみからでなく、木材の容積重という概念を導入して重量成長の観点から最初に眺めたのは、加納 孟氏によればR. HARTIG<sup>1)</sup>である。彼は19世紀末に、木材の容積が物理的にはまったく不確実なものであるという考え方に達し、生材容積に対する乾燥実質を容積密度数と称し、従来の容積成長表に対照してブナ林分の重量成長表をつくった<sup>2)</sup>。

以来木材の材料学的分野において、木材の物理的諸性質を容積密度数に関連させて表現し、容積密度数をそれらの性質を判別するための指標とする目的でなされた試みは、現在にいたるまで枚挙にいとまがない。

しかしながら、一方林木の成長論的分野において行なわれた、単木あるいは林木を対象とする重量成長に関する研究報告は、例えば平井信二氏や<sup>3)4)5)6)7)</sup>、その他の研究者達による比較的少数の報告例があるに過ぎない。しかもそれらの報告によれば、単木あるいは林分の材積および重量成長経過について、両者が本質的に一致するとして理解されるべきものなのか、あるいは逆に一致しないとして理解されるべきものなのかという疑問に対する明確な解答は、辻本克巳氏がリュウキウマツ林分を対象に行なった、重量総平均成長量の最大値は32年生前後にあらわれ、材積成長より10年近く遅くあらわれるという報告<sup>8)</sup>を除いて、他に見出すことが困難である。

林分を対象として重量成長経過を研究する場合には、それが同一樹種の同令単純林であっても、林分を構成する個々の樹木についてその重量を測定することは殆んど不可能であり、不可避免的に各年令の林分を選び、各林分を胸高直径のような何らかの基準によって幾つかの群に分け、各群を代表する標本木について計算される容積密度数を、各標本木の代表する群の材積に掛けて群の重量とし、それを合計した各林分の重量を時系列的に結ぶことによって、林分としての重量成長経過を求めるという方法が採用される。このようにして求められる林分重量成長経過が材積成長と比較される場合、両者が一致あるいは不一致のいずれであっても、その原因には単木についての両者の関係、胸高直径を基準に分けられた群を代表する標本木の容積密度数の群が異なることによる変化あるいは不変化、林令が異なることによって生じる林木構成の変化の有無等が考えられる。このような因子が複雑に絡み合った林分の重量成長経過を、材積のそれと関連させて研究する過程の一環として、林分を構成する最小の単位である単木を対象とし、他の因子の変動による影響を考慮する必要のない段階において、成長論的立場から材積および重量成長経過の関係を明らかにしたい。

単木の材積成長を最も正確に求めるには区分求積法的一种である樹幹析解が行なわれており、各区分材積において最も基礎的な測定因子は、それを代表する円板の直径あるいは半径成長である。これにもとづいて面積成長および材積成長が計算される。

一方単木の重量成長経過は、各区分材積を代表するそれぞれの円板から適当な年輪数を含む試験体を採り、その容積密度数を試験体が代表する部分の材積に掛けて重量期間成長を算出し、同一期間成長を全区分材積を通じて集計する操作を各期間について行なって求められる。このような方法によって求められた単木の重量成長経過が材積のそれと一致、

あるいは異なるとすれば、その原因は当然の帰結として、全試験体を通じて容積密度数が等しい、あるいは異なるということにあると考えられよう。

各試験体すなわち樹幹の各部の容積密度数がすべて等しい場合、そこでは年輪構成が均一であり、同時に全年輪を通じて春、秋材容積密度数が等しいという条件が充たされていなくてはならない。また各試験体の容積密度数が異なる場合、それは年輪構成の不揃いおよび春、秋材容積密度数の不均一性に起因するものであろう。したがって年輪構成あるいは春、秋材容積密度数のいずれかを固定的であると考えれば、区分材積および重量成長あるいは単木の材積および重量成長の關係に影響するものは、固定的であると考えなかった他の一方の要因に帰されるであろう。年輪構成は樹幹全体を通じて固定的ではなく、年輪巾の広狭によって明らかに変動するものである。

他方の春、秋材容積密度数は、樹種によって比較的安定しているとみなすことができるものであり、したがって年輪の集合体である材の容積密度数は、年輪を構成している春、秋材部の量的な割合によってきめられてくると考えられる<sup>2)</sup>。

本論文においては、春、秋材容積密度数がそれぞれ安定的であると仮定することによって年輪構成のみを変動するものと考え、その具体的表現としての年輪巾すなわち半径連年成長に対する秋材巾の割合の変化の仕方が、単位年輪の容積密度数および区分材積成長に対する重量成長経過の關係におよぼす影響を理論的に究明することを目的とし、同時に実験によって可能な範囲の裏付けを試みる。

本論文の構成は、第1章において成長曲線式の性質の検討を行ない、第2章でその成長曲線式を適用した半径および面積成長にもとづいて区分材積成長を検討し、第3章において春、秋材容積密度数および年輪巾と秋材率の關係を単位年輪の容積密度数に統一し、第4章で第2章および第3章にもとづいて区分重量および単木の重量成長経過と材積成長の關係について考察し、第5章で結論を述べる。

林学第一教室の井上由扶先生、木梨謙吉先生、林学第二教室の熊谷才藏先生および林産学第一教室の渡辺治人先生は研究の遂行および取りまとめにご指導をたまわった。演習林長大野俊一先生は実験材料に便宜をお計り下さった。林学第一教室の永松謙二氏は製図にご協力下さった。あつくお礼を申し上げる。

## 第1章 成長曲線式の性質の検討

林木の成長曲線式を求める方法に、植物生理学的分野において明らかにされるべき成長原理にもとづく演繹的方法と、多数の実験例を分類総合して曲線を描き、それらにもとづいて一般的法則性を明らかにする帰納的方法とが考えられる。しかしながら演繹的接近方法については、その基礎がこの方法を採用するに耐えるほど確立されているとは考えられず、各種の成長曲線式<sup>註1)</sup>の殆んどすべては帰納的方法によって導びかれたものである。

註 1) 総成長曲線式としてはつぎの各式が帰納的に導かれている。

$$\begin{array}{lll}
 y: \text{総成長}, & x: \text{年令}, & e: \text{自然対数の底}, \quad \text{その他の文字は常数} \\
 1, y = \frac{ax^n}{c^x} & 9) & 2, y = 100^3 \left[ 1 - \frac{1}{1.0p^x} \right] & 10) & 3, y = ke^{-2t/x} & 11) \\
 4, y = ke^{-\frac{(p+1)t^p}{px^p}} & 12) & p > 0 & 5, y = \frac{x^n}{ax^n + bx^{n-1} + c} & 13) & 6, \log y = a + b(1/x) & 14)
 \end{array}$$

林木の重量成長に関する従来の研究もまた樹種の相違こそあれ、そのすべては帰納的方法によるものであり、重量成長は材積成長に殆んど平行している<sup>4)</sup>とか、あるいはまた、重量成長の経過は殆んど材積成長の経過に支配される<sup>9)</sup>と結論されている。

すでに述べたように、成長曲線式が実際の現象から帰納的に導びき出されたものである以上、どの成長曲線式についてもそれを適用することが必ずしも適当でないような場合が当然あり得る。

筆者は後に行なわれる計算および理論展開の便宜を考慮して BRUCE, SCHUMACHER 式を採用し、林木の成長曲線がこの式の曲線と完全に一致する場合を想定して、材積成長および重量成長の関係を比較検討する。

BRUCE, SCHUMACHER 両氏によれば、総成長曲線式はつぎのようにあらわされる。すなわち従属変数  $Y$  が独立変数  $x$  (年令) によってあらわされる量であるとすれば、直線式  $\log Y = a(1/x) + b$  はそのデータによく一致するであろう。これは半対数方眼紙上に年令の逆数および  $Y$  (総成長) を位置づけすることによって確かめることができる<sup>14)</sup>。

この総成長曲線式を適用するにあたっては、まず測定値と計算値が経験的に一致すると同時に、その事実に対する理論的吟味、すなわちこの総成長曲線式のもとの指数関数の曲線が、現実の総成長曲線から帰納的に求められる曲線の一般的特徴を備えているかどうか、またこの総成長曲線式から派生的に誘導される連年成長および総平均成長の各曲線式が、それぞれの曲線の一般的特徴を満足するかどうか、これらについての検討が必要である。

したがって以下の各節において、年令を  $x$ 、総成長を  $GZ$  とし常用対数を用いて上記の諸点を検討する。

### 第 1 節 総成長曲線式

総成長曲線式は、年令を  $x$ 、総成長を  $GZ$  とするとき

$$\log GZ = a + b(1/x) \quad (1-1)$$

によってあらわされたとする。

(1-1)式を指数関数になおせば

$$GZ = 10^{a+b(1/x)} \quad (1-2)$$

である。

まず総成長曲線の形の一般的特徴を吉田正男氏および嶺一三氏の報告から引用する。

吉田氏は「総生長曲線は、初め横軸に対し凹であって、後変って凹となる。即ち曲線は一の変曲点を有し、且つ一に限る。総成長曲線は、年齢の高くなるに従ってその上昇度が次第に衰え、殆んど一直線に変化し、遂にある一定値に達して止むような傾向を有している。即ち曲線の上方において横軸に平行な漸近線を有している<sup>13)</sup>」と述べている。

また嶺氏は「総成長量の曲線は、連年成長量を積分したものであるから、漸増する曲線で初めは徐々に、後に急激に増加し連年成長量の極大点で曲線の形が変曲して、増加の勢はしばらくは持続するが段々と減少して高年には殆んど一定に近づく<sup>15)</sup>」と述べている。

すなわち総成長は年令が小さいときは小さく、年令の増加にともなって次第に大きくなる。したがってその曲線は右上りの形をしめす。曲線の変化の状態は、初めは小さな勾配で、後に年令の増加にともなって次第に大きな勾配で上昇し、連年成長が最大に達する年令を唯一の変曲点とし、この年令を過ぎると連続的に勾配を減少させながらついには殆んどある一定の値に近づく。

(1-2) 式についてみると、これは常にマイナスではなく、 $x$  が  $0 < x < +\infty$  の範囲にある場合は連続関数である。

(1-2) 式の  $a$  および  $b$  それぞれの符号について起り得る組合せを考えると 4 種ある。したがってその曲線の形はそれぞれの組合せについて検討されなければならない。

1)  $a > 0, b > 0$

$x \rightarrow 0$  および  $x \rightarrow +\infty$  における (1-2) 式の極限值は  $\lim_{x \rightarrow 0} GZ = +\infty$

および

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} GZ = 10^a$$

である。この場合曲線は  $+\infty$  に限りなく近い点から始まって、次第に下降しながら漸近線  $GZ = 10^a$  に限りなく接近しその形は右下りである。したがって総成長曲線式ではない。

2)  $a < 0, b < 0$

$x \rightarrow 0$  および  $x \rightarrow +\infty$  における (1-2) 式の極限值は

$$\lim_{x \rightarrow 0} GZ = 0$$

および

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} GZ = 10^{-a}$$

である。この場合曲線は原点に無限に近い点から始まり、次第に上昇しながら漸近線  $GZ = 10^{-a}$  に無限に接近しその形は右上りである。したがって総成長曲線式であり得る。

3)  $a > 0, b < 0$

$x \rightarrow 0$  および  $x \rightarrow +\infty$  における (1-2) 式の極限值は

$$\lim_{x \rightarrow 0} GZ = 0$$

および

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} GZ = 10^a$$

である。この場合曲線は原点に無限に近い点から始まり、次第に上昇しながら漸近線  $GZ = 10^a$  に無限に接近しその形は右上りである。したがって総成長曲線式であり得る。

4)  $a < 0, b < 0$

$x \rightarrow 0$  および  $x \rightarrow +\infty$  における (1-2) 式の極限值は

$$\lim_{x \rightarrow 0} GZ = +\infty$$

および

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} GZ = 10^{-a}$$

である。この場合曲線は  $+\infty$  に限りなく近い点から始まって、次第に下降しながら漸近線  $GZ = 10^{-a}$  に限りなく接近しその形は右下りである。したがって総成長曲線式ではない。

常数  $a$  および  $b$  の符号の組合せについて検討した結果、(1-2) 式は 2) および 3) の場合に限って総成長曲線式であることを明らかにした。

すなわち総成長曲線式は

$$GZ = 10^{a-b(1/x)} \quad (1-3)$$

となる。

つぎに (1-3) 式の曲線の変化の状態および変曲点の有無を検討する。

(1-3)式を  $x$  について微分しこれを  $GZ'$  であらわせば,

$$GZ' = \frac{b10^{a-b(1/x)}}{(\log e)x^2} \quad (\log_{10}e=0.434\ 294\ 48) \quad (1-4)$$

である。(1-4) 式は常にマイナスではなく, したがって (1-3) 式は  $x$  の増加にともなって増加する  $x$  の増加関数である。

また (1-4) 式の  $x \rightarrow 0$  および  $x \rightarrow +\infty$  における極限值はそれぞれ

$$\lim_{x \rightarrow 0} GZ' = 0$$

および

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} GZ' = 0$$

である。したがって (1-3) 式の曲線は原点において 0 の勾配をもって始まり,  $x$  の無限大においてその勾配は 0 に接近する。

(1-3) 式の曲線の変曲点の有無を検討するために, (1-4) 式を  $x$  について微分しこれを  $GZ''$  であらわせば,

$$GZ'' = \frac{b10^{a-b(1/x)}}{[(\log e)x^2]^2} [b - 2(\log e)x] \quad (1-5)$$

となり, (1-5) 式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b}{2(\log e)}$$

である。

(1-5) 式を  $f(x)$  であらわし,  $x_1$  および  $x_2$  がそれぞれ  $0 < x_1 < \frac{b}{2(\log e)} < x_2 < +\infty$  の範囲にあるとすると,  $f(x)$  は

$$f(x_1) > 0$$

$$f\left[\frac{b}{2(\log e)}\right] = 0$$

$$f(x_2) < 0$$

となって, (1-4) 式の曲線は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において唯一度だけ勾配が 0 になり, それより小さい, あるいは大きい  $x$  の範囲では, それぞれ増加, あるいは減少の状態にある。したがって (1-4) 式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において最大値に達する。すなわち (1-4) 式は常にマイナスではなく, また  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において勾配が 0 になる。

ゆえに (1-3) 式の曲線は年令  $x$  が小さいときは小さく, 年令の増加にともなって次第に増加する右上りの形をしめし, その変化の状態は初めに小さな勾配で, 後に年令の増加にともなって大きな勾配で上昇し,  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において変曲点をもち, これを過ぎると連続的に勾配を減少させながら漸近線  $GZ = 10^a$  に無限に接近する。

したがって (1-3) 式は総成長曲線の一般的な特徴を備え, 総成長曲線式として適用することができる。

## 第2節 連年成長曲線式

連年成長曲線の一般的特徴を吉田氏および嶺氏の記述から引用する。

吉田氏は「連年成長曲線も、原点より起り、始め横軸に対して凸に始まり変曲して凹に転じ極大値に達し、以後速やかに下降するが、その生長量の減少度は次第に小さくなるので、曲線は再び変曲して横軸に対し凸となり、齢が進むに従って次第にその変化が微弱となり、遂に横軸に接して消滅する<sup>13)</sup>」と述べている。

嶺氏は「連年成長量は、初めは生育器官が整わないので微弱であるが、段々と増加し急激に増すが、ある年で極大に達し、それから段々減少するが、曲線の形は上昇期よりは緩である<sup>15)</sup>」と、さらに連年成長と総成長の関係を、「総成長量の曲線は、連年成長量を積分したものである<sup>15)</sup>」と述べている。

すなわち連年成長曲線式は総成長曲線式を $x$ について微分したものであり、その曲線の変化の状態は年令の小さいときは小さく、年令の増加にともなって比較的大きな勾配で急激に上昇し、総成長曲線が変曲する年令において最大値に達したのち比較的ゆるやかな勾配で下降し、ついには横軸に接する。

まず(1-3)式を $x$ について微分しこれを $Z$ であらわせば

$$Z = \frac{b10^{a-b(1/x)}}{(\log e)x^2} \quad (1-6)$$

となり、これは常にマイナスではない。

(1-6)式を $x$ について微分し、これを $Z'$ であらわせば

$$Z' = \frac{b10^{a-b(1/x)}}{[(\log e)x^2]^2} [b - 2(\log e)x] \quad (1-7)$$

となる。

前節において明らかにされたように、(1-7)式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において 0,  $0 < x < \frac{b}{2(\log e)}$  の範囲ではプラス,  $\frac{b}{2(\log e)} < x < +\infty$  の範囲ではマイナスの値をしめす。

(1-6)式の最大値は、 $x = \frac{b}{2(\log e)}$  を代入して

$$Z_{\max.} = \frac{4(\log e)10^{a-2(\log e)}}{b} \quad (1-8)$$

となる。

したがって(1-6)式の曲線は、 $x$ の増加にともなって上昇し、 $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において最大値(1-8)式に達したのち次第に下降する。

## 第3節 総平均成長曲線式

総平均成長およびその曲線の一般的特徴を嶺氏の記述から引用する。

嶺氏は、総平均成長は「総成長量を年数で割ったもの<sup>15)</sup>」、その曲線の特徴を「平均成長量も初めは小さく、段々と増加して極大点をもち、漸次減少するが、曲線の形は連年成長量よりも変化が少ない<sup>15)</sup>」と述べている。

すなわち総平均成長曲線式は総成長曲線式を年令 $x$ で割ったものであり、その曲線の変化の状態は年令の小さいときは小さく、年令の増加にともなって次第に上昇し、ある年令

で最大値に達したのち次第に減少する。変化の程度は連年成長曲線よりもゆるやかである。

総平均成長曲線式を  $DZ$  であらわせば、 $DZ$  は (1-3) 式を  $x$  で割り

$$DZ = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x} \quad (1-9)$$

となる。

(1-9) 式を  $x$  について微分し、これを  $DZ'$  であらわせば、

$$DZ' = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(\log e)x^3} [b - (\log e)x] \quad (1-10)$$

となり、(1-10) 式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b}{(\log e)}$$

である。

(1-10) 式を  $f(x)$  であらわし、 $0 < x_1 < \frac{b}{(\log e)} < x_2 < +\infty$  であるとするとき、 $f(x)$  は  $f(x_1) > 0$

$$f\left[\frac{b}{(\log e)}\right] = 0$$

$$f(x_2) < 0$$

となり、(1-9) 式の曲線は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値に達する。

最大値は、(1-9) 式に  $x = \frac{b}{(\log e)}$  を代入し

$$DZ_{\max.} = \frac{(\log e)10^{a-(\log e)}}{b} \quad (1-11)$$

となり、連年成長曲線式のそれより小さい。

最大値に達する年令は、連年成長曲線式が総平均成長の 1/2 倍、最大値は 1.47 倍であり、したがって、総平均成長曲線は連年成長曲線よりも変化の状態がゆるやかである。

#### 第 4 節 総括

以上の各節における検討の結果、(1-2) 式は  $b < 0$  の場合に総成長曲線の特徴を備えることを明らかにした。

また (1-3) 式から誘導された (1-6) 式および (1-9) 式は、それぞれ連年成長および総平均成長の各曲線の特徴を備えている。

連年成長および総平均成長の各曲線式は、それぞれ  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  および  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値に達する。その年令は、前者が後者の 1/2 倍、最大値は 1.47 倍である。

総成長曲線式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において変曲する。

## 第 2 章 区分材積成長の理論的推定

元来、木材の容積密度数は重量を材積で割ることによって求められ、これを重量あるいは材積の測定値のいずれか一方だけから計算することはできない。単木の材積成長および重量成長の関係について、幼令から老令にいたる各令階の標本木の重量を含水率が一定であるように管理された条件の下で測定することができるならば、材積は直接に測定することができるので、両者の測定例を多数蒐集することによってその関係が帰納的に結論できよう。しかしこの方法では含水率を一定に保つ点に大きな困難があり、しかも木材の重量は含水率によって変化する。したがって、樹幹の各部から測定や含水率の管理に便利な適度の大きさをもつ試験体を探り、その林積および重量から計算される容積密度数を試験体が代表する部分の材積に掛けて重量を求め、樹幹各部の重量を合計して単木の総重量とする間接的方法が採用される。

### 第 1 節 円板の半径成長

円板の半径成長曲線式は、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式における独立変数について、樹幹の最下部から採取される円板とそれより上部から採取される各円板とは異なった取扱いが必要である。すなわち独立変数に樹木の年令を採る場合、あるいは年令から各断面高に達するまでの経過年数を差し引いた円板上の年輪数を採る場合のいずれが適当であるかという問題が生じるが、これは適用例において検討し、ここでは幹足部の円板とそれ以外の各円板とにわけ一般的に述べる。面積成長および区分材積成長についても同様である。

#### I 幹足部の円板

半径の総成長を  $GZ_r$ 、連年成長を  $Z_r$ 、総平均成長を  $DZ_r$ 、円板の年令（年輪数）を  $x$  であらわせば、第 1 章において明らかにしたように総成長曲線式は (1-3) 式から

$$GZ_r = 10^{a-b(1/x)} \quad (2-1)$$

連年成長曲線式は (1-6) 式から

$$Z_r = \frac{b \cdot 10^{a-b(1/x)}}{(\log e)x^2} \quad (2-2)$$

総平均成長曲線式は (1-9) 式から

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x} \quad (2-3)$$

で与えられる。

したがって (2-2) および (2-3) 式は、それぞれ  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  および  $x = \frac{b}{(\log e)}$  に  
おいて最大値

$$Z_{r\max.} = \frac{4(\log e) \cdot 10^{a-2(\log e)}}{b} \quad (2-4)$$

および

$$DZ_{r\max.} = \frac{(\log e) \cdot 10^{a-(\log e)}}{b} \quad (2-5)$$

に達する。

最大値に達する年令は、(2-2) 式が (2-3) 式の 1/2 倍、最大値は 1.47 倍である。

(2-1) 式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において変曲する。

## II 幹足部以外の円板

独立変数に年令を採る場合、あるいは年輪数を採る場合に分けて考察する。

### 1) 年令を採る場合

総成長および連年成長の各曲線式は、(2-1) および (2-2) 式で与えられる。したがってこれらの成長曲線式はすでに述べた式と同形であり、(2-2) 式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において最大値 (2-4) 式に達し、(2-1) 式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長は総成長を年数で割ったものとして与えられるが、年数を年令と考えることは、円板の半径成長が開始する以前の期間の年数をも含んでいるので適当でなく、円板の年輪数を除数と考えなければならない。

いま樹高が円板の断面高に達するまでの期間を  $m$ 、樹木の年令を  $x$ 、円板の年輪数を  $X$ 、とすると、年輪数は

$$X = x - m \quad (x - m > 0) \quad (2-6)$$

であらわされる。

したがって総平均成長曲線式は、

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(x-m)} \quad (2-7)$$

となる。

(2-7) 式の  $x$  に関する一次微分を  $DZ_r'$  であらわせば

$$DZ_r' = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(\log e) [x(x-m)]^2} b[(x-m) - (\log e)x^2] \quad (2-8)$$

となり、(2-8) 式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4bm(\log e)}}{2(\log e)} \quad b^2 - 4bm(\log e) > 0$$

である。したがって (2-8) 式は 2 根をもつ。

これら 2 根のいずれにおいて (2-7) 式が最大値に達するかを知るために、(2-7) 式の  $x$  に関する二次微分

$$DZ_r'' = \frac{10^{a-b(1/x)}}{[(\log e)x^2(x-m)]^2} \left[ \frac{2(\log e)^2}{(x-m)} x^4 - 2b(\log e)x^2 - 2b(\log e)x(x-m) + b^2(x-m) \right] \quad (2-9)$$

に各根を代入すれば

$$f\left[\frac{b - \sqrt{b^2 - 4bm(\log e)}}{2(\log e)}\right] > 0$$

および

$$f\left[\frac{b+\sqrt{b^2-4bm(\log e)}}{2(\log e)}\right] < 0$$

となり, (2-7) 式は

$$x = \frac{b+\sqrt{b^2-4bm(\log e)}}{2(\log e)}$$

において最大値に達する。

2) 年輪数を取る場合

円板の年輪数は (2-6) 式であらわされる。

総成長曲線式が

$$GZ_r = 10^{a'-b'(1/x-m)} \quad (2-10)$$

であらわされるとき, 連年成長曲線式は

$$Z_r = \frac{b' 10^{a'-b'(1/x-m)}}{(\log e)(x-m)^2} \quad (2-11)$$

となる。

(2-11) 式の  $x$  に関する一次微分を  $Z'_r$  であらわせば

$$Z'_r = \frac{b' 10^{a'-b'(1/x-m)}}{[(\log e)(x-m)^2]^2} [b' - 2(\log e)(x-m)] \quad (2-12)$$

で与えられ, (2-12) 式を 0 にする  $x$  は

$$x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$$

である。

(2-12) 式を  $f(x)$  であらわし,

$$0 < x_1 < m + \frac{b'}{2(\log e)} < x_2 < +\infty \quad \text{であるとするとき,}$$

$$f(x_1) > 0$$

$$f\left[m + \frac{b'}{2(\log e)}\right] = 0$$

$$f(x_2) < 0$$

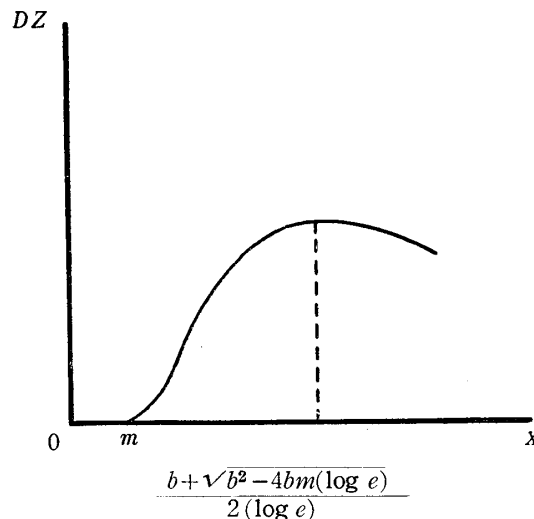
となり, (2-11) 式の曲線は  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$  において勾配が 0, それより小さい, あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加, あるいは減少の状態にある。したがって (2-11) 式の最大値は,  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$  において

$$Z_{r\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a'-2(\log e)}}{b'} \quad (2-13)$$

である。

また (2-11) 式は常にマイナスではなく, かつ  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$  において勾配が 0 になるので, (2-10) 式は  $x$  の増加関数であり, その曲線は  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$  において変

$$\text{図 2-1 } DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(x-m)}$$



曲する。

総平均成長曲線式は (2-10) 式を (2-6) 式で割り

$$DZ_r = \frac{10^{a'-b'(1/x-m)}}{(x-m)} \quad (2-14)$$

である。

(2-14) 式の  $x$  に関する一次微分を  $DZ_r'$  であらわせば

$$DZ_r' = \frac{10^{a'-b'(1/x-m)}}{(\log e)(x-m)^2} [b' - (\log e)(x-m)] \quad (2-15)$$

となり, (2-15) 式を 0 にする  $x$  は

$$x = m + \frac{b'}{(\log e)}$$

である。

連年成長曲線式と同様な方法によって, (2-14) 式の曲線は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において勾配が 0, それより小さい, あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加, あるいは減少の状態にある。すなわち (2-14) 式の最大値は,  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において

$$DZ_{r \max} = \frac{(\log e) 10^{a' - (\log e)}}{b'} \quad (2-16)$$

となる。

### III 適用例

すでに述べた意図の下で, 年輪を構成する春, 秋材部について秋材率および容積密度数を測定するために, 春, 秋材部の肉眼による識別および試験片作製の容易と考えられるスギ (*Cryptomeria japonica* D. Don.) を九州大学農学部附属粕屋演習林から採取した。

供試木は新建団地の 16 林班ぬ小班に属し, 88 年生, 皮付胸高直径 42.3cm, 樹高 26.2 m でスギ林分収穫表<sup>10)</sup>によれば平均地位の主林木平均に相当し, 昭和34年3月27日に伐採された。

断面高 0.2 m の円板における年輪数 88 個を伐採当時の年令とし, その直径および樹高総括表を表 2-1, 樹高成長を表 2-2, 胸高直径成長を表 2-3, 幹材積成長を表 2-4 にしめす。

これらの表から明らかなように, 供試木は 88 年生現在では材積総平均成長が最大値に達する前の状態にある。

#### 1) 幹足部の円板

断面高 0.2m の円板における半径を中心から山側, 谷側およびそれに直交する 2 方向の合計 4 方向について測定した。その平均値による総成長曲線を図 2-2 に実線で, 年令の逆数対総成長の対数の関係を図 2-3 にしめす。

図 2-2 によれば半径総成長は 30 年生前後および 60 年生前後に若干衰え, それらの時期を過ぎると再び増加していることがうかがわれる。また図 2-3 によれば年令の逆数と総成

表 2-1 直径および樹高総括表

| 断面高  | 各令階における平均直径 (cm) |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | 5                | 10   | 15   | 20   | 25    | 30    | 35    | 40    | 45    | 50    | 55    | 60    | 65    | 70    | 75    | 80    | 85    | 88    |
| 0.2m | 1.93             | 4.44 | 6.95 | 8.88 | 10.68 | 12.75 | 15.76 | 19.43 | 23.13 | 26.12 | 28.65 | 31.51 | 33.59 | 37.29 | 40.45 | 44.00 | 46.85 | 48.36 |
| 1.2  | 1.06             | 3.41 | 5.92 | 7.73 | 9.49  | 11.23 | 13.69 | 16.55 | 19.52 | 22.21 | 24.53 | 27.54 | 29.54 | 32.20 | 34.63 | 36.99 | 38.99 | 40.44 |
| 3.2  |                  |      | 4.16 | 6.80 | 8.68  | 10.41 | 12.82 | 15.62 | 18.05 | 20.24 | 22.17 | 24.70 | 26.61 | 28.73 | 30.91 | 32.99 | 34.94 | 36.01 |
| 5.2  |                  |      | 1.30 | 5.21 | 7.53  | 9.50  | 11.90 | 14.47 | 16.91 | 19.07 | 20.90 | 23.13 | 25.07 | 27.20 | 29.18 | 30.85 | 32.61 | 33.73 |
| 7.2  |                  |      |      | 2.64 | 6.25  | 8.42  | 10.76 | 13.39 | 15.75 | 17.95 | 19.76 | 21.97 | 23.66 | 25.63 | 27.71 | 29.44 | 31.19 | 32.17 |
| 9.2  |                  |      |      |      | 4.02  | 7.13  | 9.49  | 12.28 | 14.71 | 16.93 | 18.58 | 20.70 | 22.17 | 24.11 | 26.06 | 27.92 | 29.57 | 30.49 |
| 11.2 |                  |      |      |      | 0.43  | 4.44  | 7.66  | 10.61 | 13.27 | 15.67 | 17.32 | 19.30 | 20.70 | 22.54 | 24.51 | 26.28 | 27.88 | 28.87 |
| 13.2 |                  |      |      |      |       | 0.37  | 4.27  | 8.00  | 10.96 | 13.69 | 15.52 | 17.58 | 19.07 | 21.00 | 22.85 | 24.65 | 26.42 | 27.41 |
| 15.2 |                  |      |      |      |       |       |       | 3.40  | 7.16  | 10.20 | 12.42 | 14.69 | 16.48 | 18.48 | 20.74 | 22.95 | 24.72 | 25.65 |
| 17.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       | 2.62  | 6.43  | 8.71  | 11.22 | 13.11 | 15.22 | 17.85 | 20.26 | 22.49 | 23.50 |
| 19.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       | 2.33  | 4.97  | 6.82  | 8.85  | 11.80 | 14.72 | 17.24 | 18.79 |
| 21.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1.99  | 5.38  | 8.48  | 10.81 | 12.17 |
| 23.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 3.35  | 6.16  | 7.47  |
| 24.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 2.41  | 3.83  |
| 25.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1.00  | 2.03  |
| 26.2 |                  |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0.00  |
| 算出樹高 | 1.77             | 3.20 | 6.20 | 9.20 | 11.60 | 13.49 | 14.91 | 16.80 | 18.09 | 19.20 | 19.83 | 20.45 | 21.08 | 22.09 | 23.20 | 24.20 | 25.56 | 26.20 |

表 2-2 樹 高

| 年令 | $GZ_h$ | $Z_h$ | $DZ_h$ |
|----|--------|-------|--------|
| 5  | 1.77   | 0.35  | 0.35   |
| 10 | 3.20   | 0.29  | 0.32   |
| 15 | 6.20   | 0.60  | 0.41   |
| 20 | 9.20   | 0.60  | 0.46   |
| 25 | 11.60  | 0.48  | 0.46   |
| 30 | 13.49  | 0.38  | 0.45   |
| 35 | 14.91  | 0.28  | 0.43   |
| 40 | 16.80  | 0.38  | 0.42   |
| 45 | 18.09  | 0.26  | 0.40   |
| 50 | 19.20  | 0.22  | 0.38   |
| 55 | 19.83  | 0.13  | 0.36   |
| 60 | 20.45  | 0.12  | 0.34   |
| 65 | 21.08  | 0.13  | 0.32   |
| 70 | 22.09  | 0.20  | 0.32   |
| 75 | 23.20  | 0.22  | 0.31   |
| 80 | 24.20  | 0.20  | 0.30   |
| 85 | 25.56  | 0.27  | 0.30   |
| 88 | 26.20  | 0.21  | 0.30   |

表 2-3 胸高直径

| 年令 | $GZ_a$ | $Z_a$ | $DZ_a$ |
|----|--------|-------|--------|
| 5  | 1.06   |       |        |
| 10 | 3.41   | 0.47  | 0.49   |
| 15 | 5.92   | 0.50  | 0.49   |
| 20 | 7.73   | 0.36  | 0.46   |
| 25 | 9.49   | 0.35  | 0.43   |
| 30 | 11.23  | 0.35  | 0.42   |
| 35 | 13.69  | 0.49  | 0.43   |
| 40 | 16.55  | 0.57  | 0.45   |
| 45 | 19.54  | 0.59  | 0.46   |
| 50 | 22.24  | 0.54  | 0.47   |
| 55 | 24.58  | 0.47  | 0.47   |
| 60 | 27.54  | 0.59  | 0.48   |
| 65 | 29.54  | 0.40  | 0.48   |
| 70 | 32.20  | 0.53  | 0.48   |
| 75 | 34.63  | 0.49  | 0.48   |
| 80 | 36.99  | 0.47  | 0.48   |
| 85 | 38.99  | 0.40  | 0.48   |
| 88 | 40.44  | 0.48  | 0.47   |

表 2-4 幹材積

| 年令 | $GZ_v$ | $Z_v$  | $DZ_v$ |
|----|--------|--------|--------|
| 5  | 0.0003 | 0.0001 | 0.0001 |
| 10 | 0.0023 | 0.0004 | 0.0002 |
| 15 | 0.0094 | 0.0012 | 0.0006 |
| 20 | 0.0236 | 0.0028 | 0.0012 |
| 25 | 0.0460 | 0.0046 | 0.0018 |
| 30 | 0.0762 | 0.0060 | 0.0025 |
| 35 | 0.1260 | 0.0100 | 0.0036 |
| 40 | 0.2017 | 0.0154 | 0.0050 |
| 45 | 0.2936 | 0.0184 | 0.0065 |
| 50 | 0.3973 | 0.0207 | 0.0080 |
| 55 | 0.4934 | 0.0192 | 0.0090 |
| 60 | 0.6230 | 0.0259 | 0.0104 |
| 65 | 0.7333 | 0.0221 | 0.0113 |
| 70 | 0.8795 | 0.0312 | 0.0126 |
| 75 | 1.0470 | 0.0335 | 0.0140 |
| 80 | 1.2243 | 0.0355 | 0.0153 |
| 85 | 1.4023 | 0.0356 | 0.0165 |
| 88 | 1.5136 | 0.0371 | 0.0172 |

図 2-2 総成長曲線

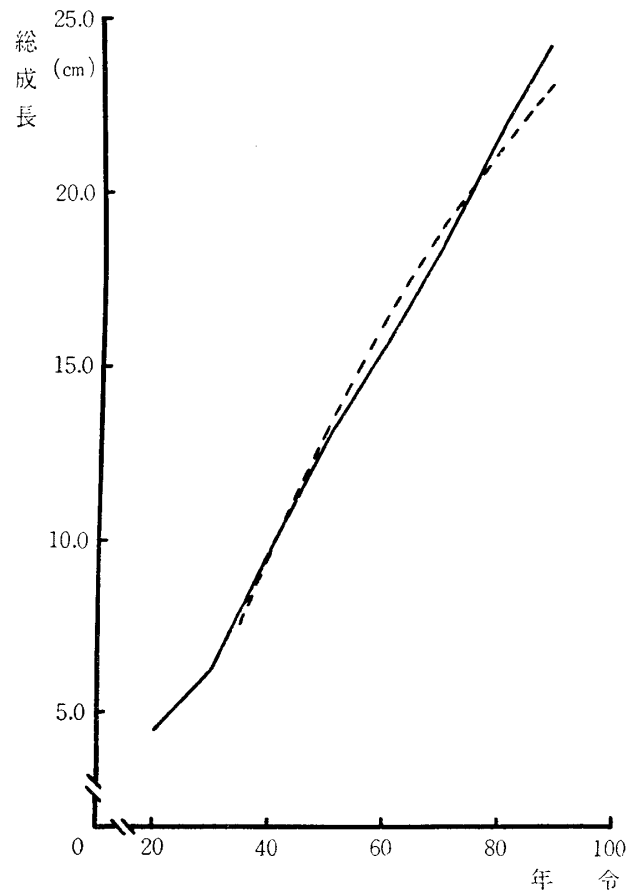
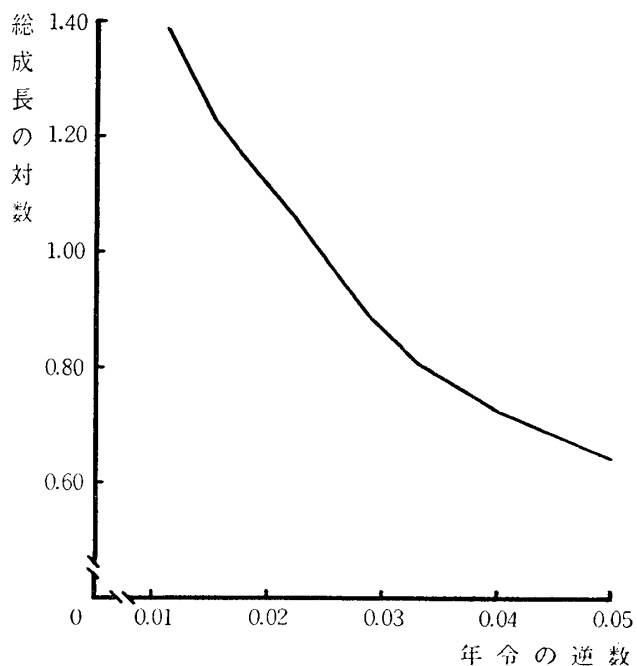


図 2-3

年令の逆数対総成長の対数



長の対数の関係を供試木の生存期間を通じて直線的であるとみなすことはできないが、線上の点の密度を考慮し直線とみなしても大体誤まりでない範囲は35年以上である。ゆえにこの円板については35年以上の測定値12個にもとづいて年令と総成長の回帰式を計算する。その回帰式は

$$GZ_r = 10^{1.679 - 27.888(1/x)}$$

であり、計算値を図 2-2 に点線でしめす。これによれば、図 2-3 において直線であらわされる範囲では総成長の測定値と計算値の曲線は殆んど一致する。

いま総成長曲線式が

$$GZ_r = 10^{1.679 - 27.888(1/x)}$$

としてあらわされるとき，その連年成長および総平均成長の各曲線式は(2-2)式および(2-3)式から

$$Z_r = \frac{27.888 \cdot 10^{1.679 - 27.888(1/x)}}{(\log e) x^2}$$

および

$$DZ_r = \frac{10^{1.679 - 27.888(1/x)}}{x}$$

となり，それらの計算値を図2-4に実線で，測定値を点でしめす。

図2-4によれば連年成長の計算値は測定値と必ずしも一致していないが，総平均成長では両者が殆んど一致している。

図2-4 連年，総平均成長曲線

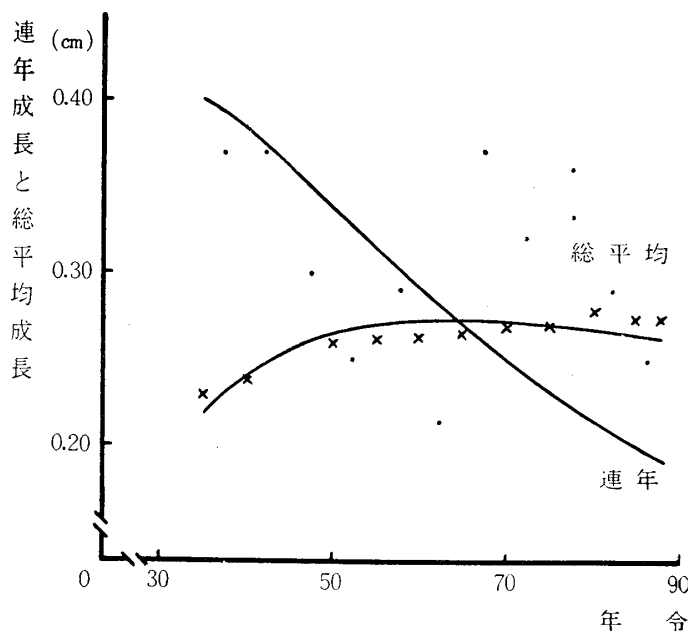
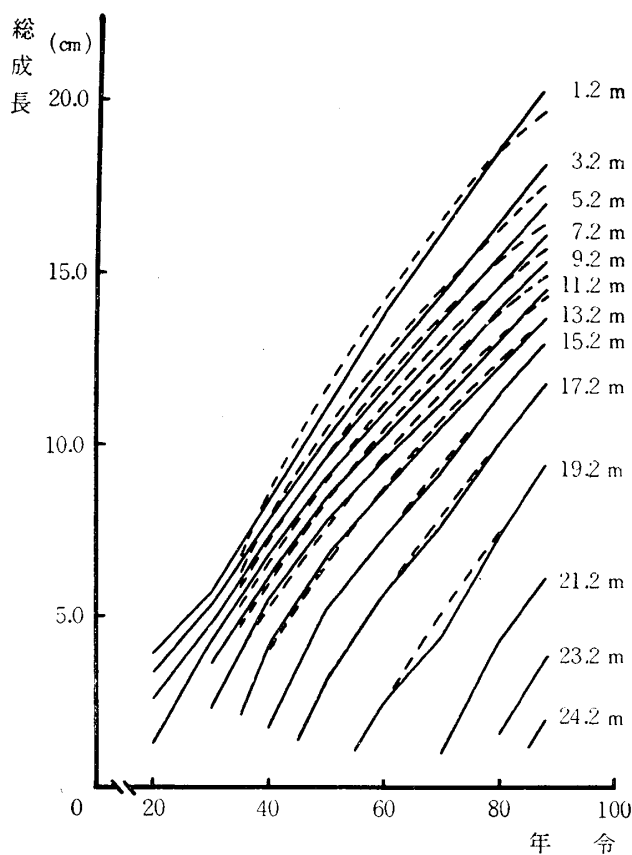


図2-5 総成長曲線



総平均成長の計算値が最大に達する年令は  $x = \frac{27.888}{(\log e)} = 64$  年である。

## 2) 幹足部以外の円板

最初に年令あるいは円板の年輪数のいずれが独立変数として適当であるかを検討する。

断面高別各円板について半径総成長曲線を図2-5に実線で，年令の逆数対総成長の対数の関係を図2-6にしめす。

図2-6によれば各円板についてすべての点の配列を直線的とみなすことは適当でなく，幹足部の円板と同様の考慮によって若い年令の測定値を除き総成長曲線式を計算する。

各円板の年令対総成長の回帰

図 2-6 年令の逆数対総成長の対数

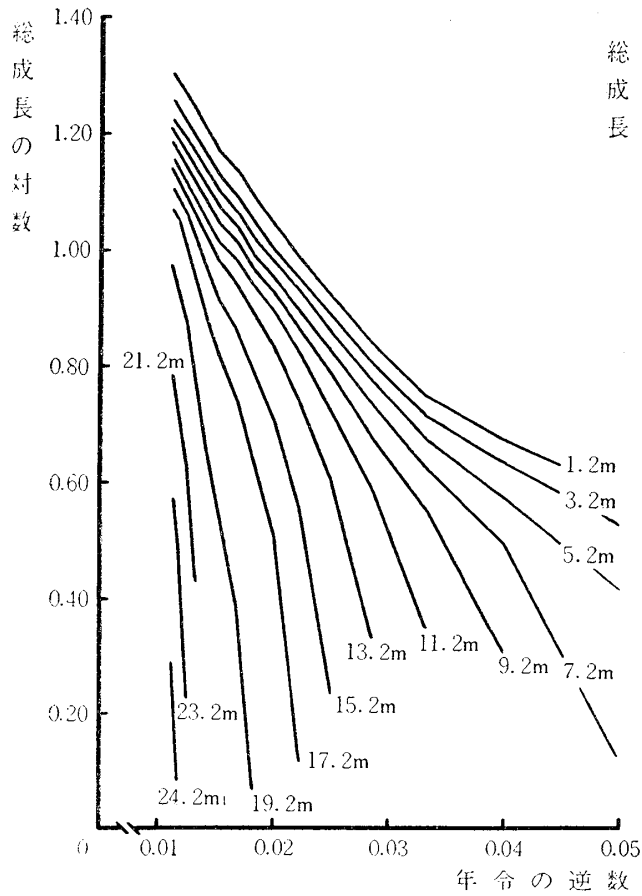
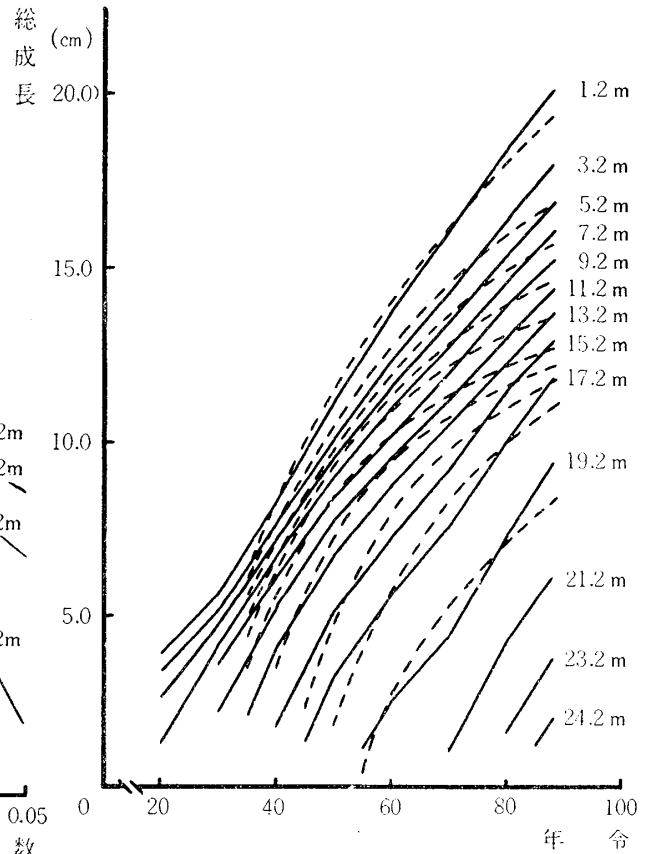


図 2-7 総成長曲線



式, 残差平方和 (S. S. R.), 回帰係数の標準誤差 ( $S_b$ ) および計算に用いた資料数 ( $n$ ) を表 2-5 に, その計算値の曲線を図 2-5 に点線でしめす。

つぎに各円板の年輪数を独立変数とし, 年令の場合と同じ資料にもとづいて回帰式を計

表 2-5 年令にもとづく回帰式

| 断面高   | $\log GZ_r = a - b(1/x)$            | S. S. R. | $\pm S_b$ | $n$ |
|-------|-------------------------------------|----------|-----------|-----|
| 1.2m  | $\log GZ_r = 1.603 - 27.452 (1/x)$  | 0.001111 | 0.575     | 12  |
| 3.2m  | $\log GZ_r = 1.535 - 25.957 (1/x)$  | 0.001419 | 0.649     | 12  |
| 5.2m  | $\log GZ_r = 1.511 - 26.231 (1/x)$  | 0.000998 | 0.545     | 12  |
| 7.2m  | $\log GZ_r = 1.506 - 27.413 (1/x)$  | 0.000770 | 0.479     | 12  |
| 9.2m  | $\log GZ_r = 1.500 - 28.782 (1/x)$  | 0.000626 | 0.431     | 12  |
| 11.2m | $\log GZ_r = 1.521 - 32.152 (1/x)$  | 0.000506 | 0.592     | 12  |
| 13.2m | $\log GZ_r = 1.563 - 37.489 (1/x)$  | 0.001366 | 0.869     | 11  |
| 15.2m | $\log GZ_r = 1.636 - 46.442 (1/x)$  | 0.000122 | 0.495     | 9   |
| 17.2m | $\log GZ_r = 1.791 - 63.145 (1/x)$  | 0.000186 | 0.870     | 8   |
| 19.2m | $\log GZ_r = 2.241 - 110.878 (1/x)$ | 0.000408 | 1.895     | 7   |
| 21.2m | $\log GZ_r = 2.834 - 178.935 (1/x)$ | 0.001528 | 18.403    | 4   |
| 23.2m | $\log GZ_r = 4.147 - 313.155 (1/x)$ | 0.000996 | 38.728    | 3   |

算すれば表 2-6 に掲げるとおりであり，これらの回帰式による計算値を図 2-7 に点線でしめす。

表 2-6 年輪数にもとづく回帰式

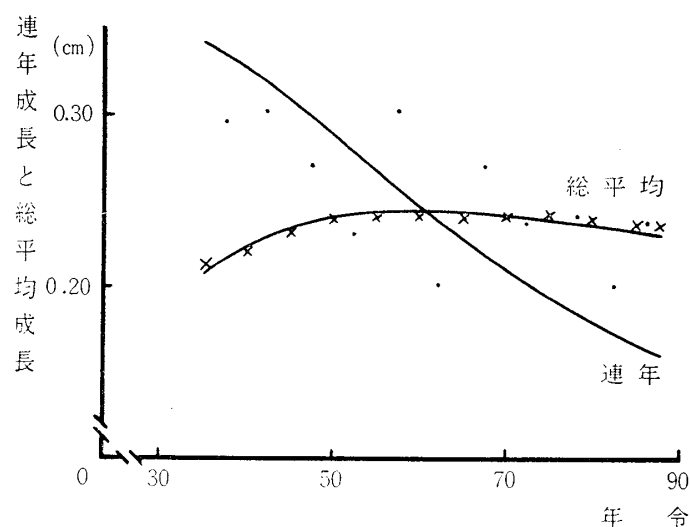
| 断面高   | $\log GZ_r = a' - b'(1/x - m)$          | S. S. R. | $\pm S_b$ |
|-------|-----------------------------------------|----------|-----------|
| 1.2m  | $\log GZ_r = 1.574 - 24.309 (1/x - 3)$  | 0.001676 | 0.626     |
| 3.2m  | $\log GZ_r = 1.441 - 16.589 (1/x - 10)$ | 0.004252 | 0.723     |
| 5.2m  | $\log GZ_r = 1.387 - 14.243 (1/x - 13)$ | 0.005117 | 0.676     |
| 7.2m  | $\log GZ_r = 1.333 - 11.603 (1/x - 17)$ | 0.007799 | 0.654     |
| 9.2m  | $\log GZ_r = 1.273 - 9.028 (1/x - 21)$  | 0.011484 | 0.591     |
| 11.2m | $\log GZ_r = 1.226 - 7.691 (1/x - 24)$  | 0.015272 | 0.520     |
| 13.2m | $\log GZ_r = 1.209 - 7.200 (1/x - 29)$  | 0.012331 | 0.511     |
| 15.2m | $\log GZ_r = 1.221 - 7.770 (1/x - 36)$  | 0.007639 | 0.673     |
| 17.2m | $\log GZ_r = 1.218 - 8.637 (1/x - 41)$  | 0.007274 | 0.761     |
| 19.2m | $\log GZ_r = 1.120 - 7.876 (1/x - 50)$  | 0.020784 | 0.998     |
| 21.2m | $\log GZ_r = 1.017 - 5.322 (1/x - 66)$  | 0.000208 | 0.632     |
| 23.2m | $\log GZ_r = 0.777 - 2.775 (1/x - 75)$  | 0.000201 | 0.153     |

図 2-5 および図 2-7 を比較すれば，年令あるいは年輪数のいずれが独立変数として適当であるかは明らかであるが，それを残差平方和によって判断すれば，殆んどの断面高円板について年令を独立変数とする方が適当であると考えられる。したがって以下においては，胸高位置の円板および力枝付近の円板として断面高 1.2 m および 11.2m の円板を代表例として検討する。

両円板について (2-2) 式および (2-7) 式から連年成長および総平均成長の各曲線式を求め，それぞれの計算値を図 2-8 および図 2-9 に実線で，測定値を点でしめす。

これらの図によれば総平均成長の計算値と測定値は一致し，連年成長の両者は類似の傾

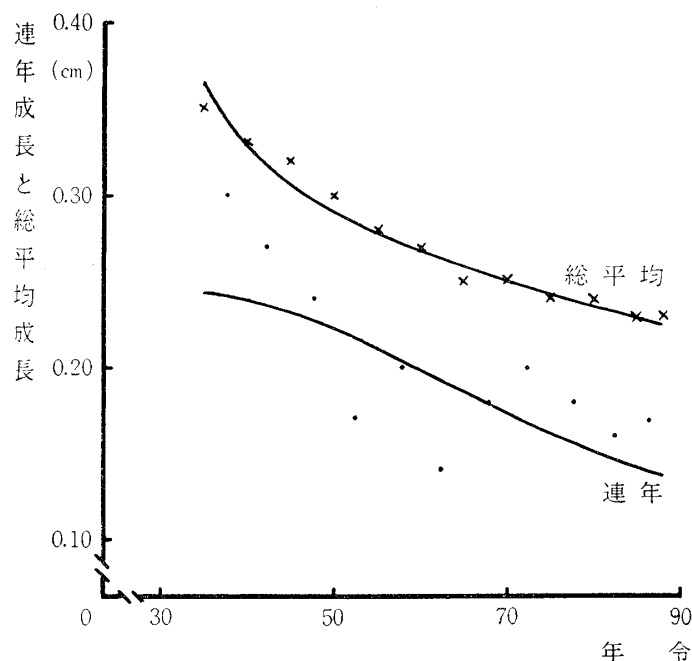
図 2-8 連年，総平均成長曲線



向をもっていることが観察される。総平均成長は胸高の円板では 60 年、11.2m の円板では実数の範囲にはない。

以上によって半径成長における I および II の各曲線式は、年令の逆数対総成長の対数の関係が直線的にあらわされる場合にはよく適合するものと認められる。

図 2-9 連年，総平均成長曲線



## 第 2 節 円板の面積成長

前節の結果にもとづいて検討を進める。

### I 幹足部の円板

面積の総成長を  $GZ_f$ ，連年成長を  $Z_f$ ，総平均成長を  $DZ_f$ ，円板の年令（年輪数）を  $x$  であらわす。

総成長曲線式は

$$GZ_f = \pi 10^{2[a-b(1/x)]} \quad (2-17)$$

である。

連年成長曲線式は (2-17) 式の  $x$  に関する一次微分から

$$Z_f = \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2} \quad (2-18)$$

となる。

(2-18) 式の  $x$  に関する一次微分を  $Z_f'$  であらわせば

$$Z_f' = \frac{4\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^2} [b - (\log e)x] \quad (2-19)$$

で与えられ，これを 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b}{(\log e)}$$

である。したがって (2-18) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において勾配が 0 になり、それより小さい、あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加、あるいは減少の状態にある。

(2-18) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a-(\log e)]}}{b} \quad (2-20)$$

に達する。

また (2-18) 式は常にマイナスではなく、したがって (2-17) 式は  $x$  の増加関数であり、 $x = \frac{b}{(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長曲線式は、(2-17) 式を  $x$  で割り

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} \quad (2-21)$$

で与えられる。

(2-21) 式の  $x$  に関する一次微分を  $DZ_f'$  であらわせば

$$DZ_f' = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^3} [2b - (\log e)x] \quad (2-22)$$

となり、これを 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{2b}{(\log e)}$$

である。したがって (2-21) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において勾配が 0 になり、それより小さい、あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加、あるいは減少の状態にある。

(2-21) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi (\log e) 10^{2a-(\log e)}}{2b} \quad (2-23)$$

に達する。

連年成長および総平均成長の各曲線式を比較すれば、最大値に達する年令は前者が後者の  $\frac{1}{2}$  倍、最大値は 1.47 倍である。

また面積成長が最大値に達する年令を半径成長と比較すれば、連年成長および総平均成長ともに半径成長の 2 倍である。

## II 幹足部以外の円板

### 1) 年令を採る場合

総成長および連年成長の各曲線式は幹足部円板と同形で (2-17) 式および (2-18) 式であり、連年成長曲線は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値に達し、総成長曲線は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長曲線式は (2-17) 式を (2-6) 式で割り

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} \quad (2-24)$$

である。

(2-24) 式の  $x$  に関する一次微分  $DZ_f'$  は

$$DZ_f' = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)[x(x-m)]^2} [2b(x-m) - (\log e)x^2] \quad (2-25)$$

となり, これを 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)} \quad b^2 - 2bm(\log e) > 0$$

である。

(2-24) 式の  $x$  に関する二次微分

$$DZ_f'' = \frac{2\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2(x-m)]^2} \left[ \frac{(\log e)^2}{(x-m)} x^4 - 3b(\log e)x^2 + bm(\log e)x + 2b^2(x-m) \right] \quad (2-26)$$

にこれら 2 根を代入しその符号を検討すれば

$$f \left[ \frac{b - \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)} \right] > 0$$

および

$$f \left[ \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)} \right] < 0$$

である。したがって総平均成長曲線式は

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

において最大値に達する。

2) 年輪数を探る場合

年輪数は (2-6) 式であらわされる。

総成長曲線式は

$$GZ_f = \pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]} \quad (2-27)$$

である。

また連年成長曲線式は (2-27) 式の  $x$  に関する一次微分から

$$Z_f = \frac{2\pi b' 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2} \quad (2-28)$$

として与えられ, この式の  $x$  に関する一次微分  $Z_f'$  は

$$Z_f' = \frac{4\pi b' 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{[(\log e)(x-m)^2]^2} [b' - (\log e)(x-m)] \quad (2-29)$$

となり, これを 0 にする  $x$  は

$$x = m + \frac{b'}{(\log e)}$$

である。したがって (2-28) 式は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において勾配が 0 になり、それより小さい、あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加、あるいは減少の状態にある。

(2-28) 式は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a' - (\log e)]}}{b'} \quad (2-30)$$

に達する。

また (2-28) 式は常にマイナスではなく、したがって (2-27) 式は  $x$  の増加関数であり、 $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長曲線式は、(2-27) 式を (2-6) 式で割り

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x - m)} \quad (2-31)$$

で与えられ、この式の  $x$  に関する一次微分は

$$DZ_f' = \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(\log e)(x - m)^3} [2b' - (\log e)(x - m)] \quad (2-32)$$

となり、これを 0 にする  $x$  は

$$x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$$

である。したがって (2-31) 式は  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  において勾配が 0 になり、それより小さい、あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加、あるいは減少の状態にある。

(2-31) 式の最大値は、 $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  において

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi(\log e) 10^{2a' - (\log e)}}{2b'} \quad (2-33)$$

である。

### 第 3 節 区分材積成長

区分材積を HUBER 式によって求める。したがってこれは面積成長の各曲線式に区間長  $L$  を掛けたものである。

#### I 幹足部の材積

材積の総成長を  $GZ_v$ 、連年成長を  $Z_v$ 、総平均成長を  $DZ_v$ 、円板の年令 (年輪数) を  $x$ 、区間長を  $L$  であらわせば、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式はそれぞれ

$$GZ_v = \pi 10^{2[a - b(1/x)]} L \quad (2-34)$$

$$Z_v = \frac{2\pi b 10^{2[a - b(1/x)]}}{(\log e)x^2} L \quad (2-35)$$

$$DZ_v = \frac{\pi 10^{2[a - b(1/x)]}}{x} L \quad (2-36)$$

である。

(2-35) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{v\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a-(\log e)]}}{b} L \quad (2-37)$$

に達し、また (2-36) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{v\max.} = \frac{\pi(\log e) 10^{2a-(\log e)}}{2b} L \quad (2-38)$$

に達する。したがって連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は面積成長と一致し、最大値の相対的大きさも変らない。

## II 幹足部以外の区分材積

### 1) 年令を採る場合

総成長および連年成長の各曲線式は (2-34) 式および (2-35) 式である。

総平均成長曲線式は (2-34) 式を (2-6) 式で割り

$$DZ_v = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} L \quad (2-39)$$

であらわされ、面積成長の場合と同様に

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

において最大値に達する。

### 2) 年輪数を採る場合

総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式はそれぞれ

$$GZ_v = \pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]} L \quad (2-40)$$

$$Z_v = \frac{2\pi b' 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L \quad (2-41)$$

$$DZ_v = \frac{\pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(x-m)} L \quad (2-42)$$

であらわされ、(2-41) 式は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において、また (2-42) 式は  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  においてそれぞれの最大値に達する。

## III 適用例

### 1) 幹足部の材積

普通の樹幹析解における幹足材積は、断面高 1.2 m および 0.2 m の両円板にもとづいて 0.0 m の位置の円板半径を計算し、SMALIAN 式によって計算されているが、ここでは考え方を単純化し、かつまた幹足部を代表して測定の対象とされる円板の半径成長を幹足部の材積成長と直接に関連させるために、幹足部の材積を円板の面積と区間長 0.2 m の積として計算する。

幹足部材積の総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は、(2-34)、(2-35) および (2-36) 式によってそれぞれ

$$GZ_v = \pi 10^{3.358-55.776(1/x)} \times 0.2$$

$$Z_v = \frac{55.776\pi 10^{3.358-55.776(1/x)}}{(\log e) x^2} \times 0.2$$

$$DZ_v = \frac{\pi 10^{3.358-55.776(1/x)}}{x} \times 0.2$$

であらわされる。

連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、それぞれ

$$x = \frac{27.888}{(\log e)} = 64 \quad \text{および}$$

$$x = \frac{55.776}{(\log e)} = 128 \quad \text{であり、両曲線式とも半径成長の2倍である。}$$

以上の各成長曲線式は半径総成長曲線式から導いたものであり、これが材積の測定値にもとづいて計算された成長曲線式と一致するかどうかについて検討しなければならない。

図 2-10 は年令対幹足部材積の関係を、また図 2-11 は年令の逆数対総成長の対数の関係をしめす。

図 2-10 総成長曲線

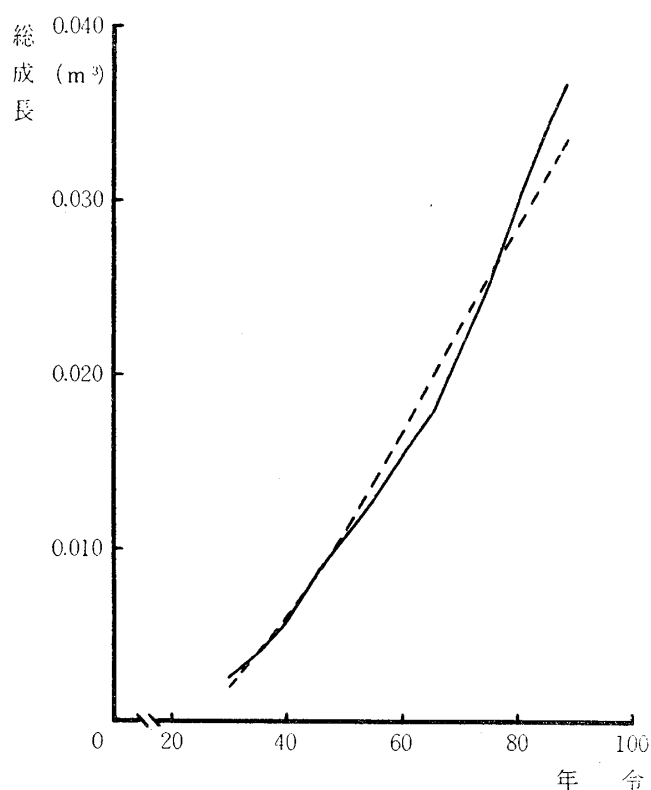
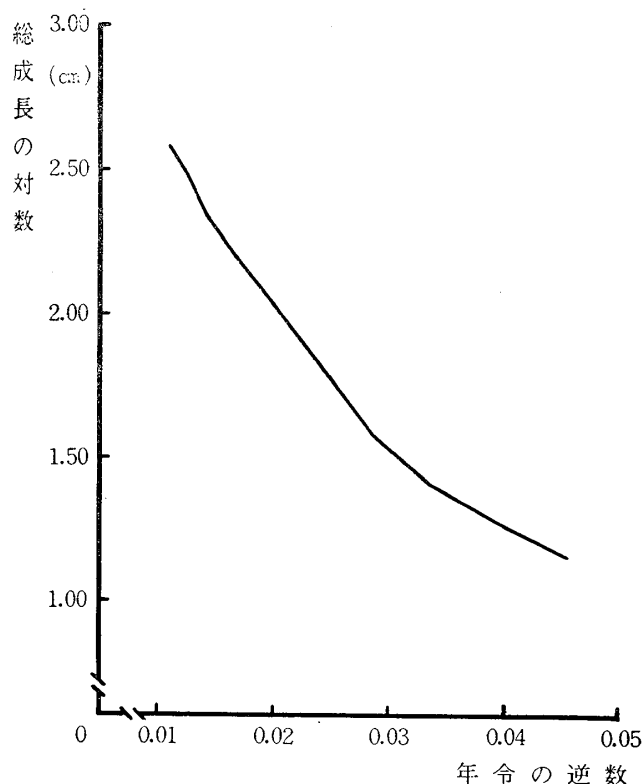


図 2-11 年令の逆数対総成長の対数



半径成長と同一条件の下で回帰式を計算するために、それと同範囲の年令の測定値を利用する。

総成長曲線式は

$$GZ_v = 10^{3.162-56.195(1/x)}$$

で与えられ、その計算値を図2-10に点線でしめす。これによれば、図2-11に大体直線でしめされる範囲では測定値と計算値は殆んど一致する。

材積総成長の測定値にもとづく上記の式と半径総成長曲線式から求めた式を比較するために後者を前者に変形すれば

$$GZ_v = 10^{3.157-55.778(1/x)}$$

となり、両式は殆んど等しい。また半径総成長曲線式の回帰係数 27.888と材積総成長の測定値にもとづく回帰係数 56.195の比は 1:

2.015である。したがって (2-34) 式は幹足部材積の総成長曲線式として適用できると考えられる。

連年成長および総平均成長の各曲線式は、またつぎの各式によっても与えられる。

$$Z_v = \frac{56.195 \cdot 10^{3.162 - 56.195(1/x)}}{(\log e)x^2}$$

$$DZ_v = \frac{10^{3.162 - 56.195(1/x)}}{x}$$

これら両曲線式によるそれぞれの計算値を図 2-12 に実線で、測定値を点でしめす。

図 2-12 連年，総平均成長曲線図

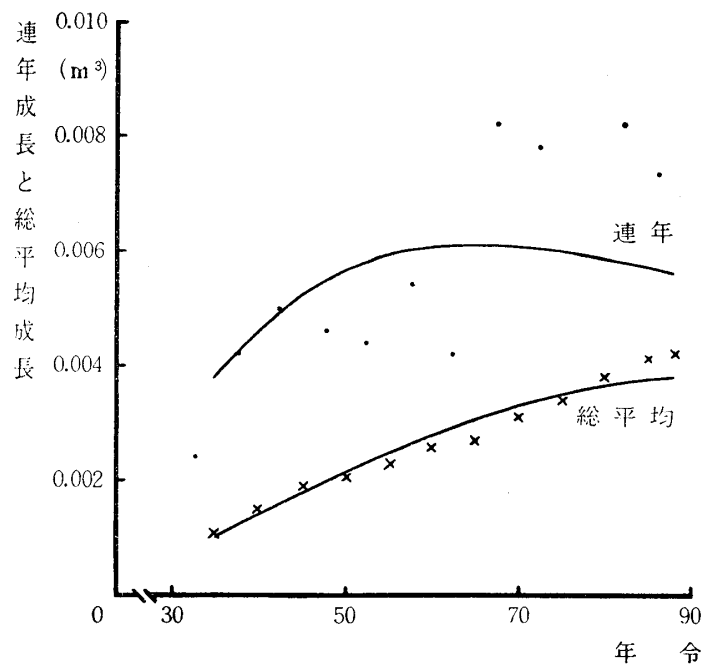


図 2-12 によれば連年成長の計算値が測定値と似た傾向をあらわすが、総平均成長ではよく一致する。

## 2) 幹足部以外の区分材積

まず断面高 1.2m および 11.2m の円板における半径総成長曲線式にもとづいて各区分材積の総成長，連年成長および総平均成長の各曲線式を求める。

断面高 0.2m-2.2m の区分材積では

$$GZ_v = \pi 10^{3.207 - 54.904(1/x)} \times 2.0$$

$$Z_v = \frac{54.904 \pi 10^{3.207 - 54.904(1/x)}}{(\log e)x^2} \times 2.0$$

$$DZ_v = \frac{\pi 10^{3.207 - 54.904(1/x)}}{(x-3)} \times 2.0$$

となり，連年成長および総平均成長の各曲線式は 63年および 123年においてそれぞれ最大値に達する。

断面高 10.2m-12.2m の区分材積では

$$GZ_v = \pi 10^{3.042-64.303(1/x)} \times 2.0$$

$$Z_v = \frac{64.303\pi 10^{3.042-64.303(1/x)}}{(\log e)x^2}$$

$$DX_v = \frac{\pi 10^{3.042-64.303(1/x)}}{(x-24)} \times 2.0$$

となり、連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、それぞれ 74 年および 118 年である。

両区分材積について、その連年成長曲線式が最大値に達する年令は半径成長の 2 倍であるが、総平均成長曲線式ではこのような簡単な関係がない。

つぎに各区分材積総成長の測定値にもとづいて回帰式を計算し、上記の各総成長曲線式と比較する。

両区分材積の年令対総成長の関係を図 2-13 に、年令の逆数対総成長の対数の関係を図 2-14 にしめす。

図 2-13 総成長曲線

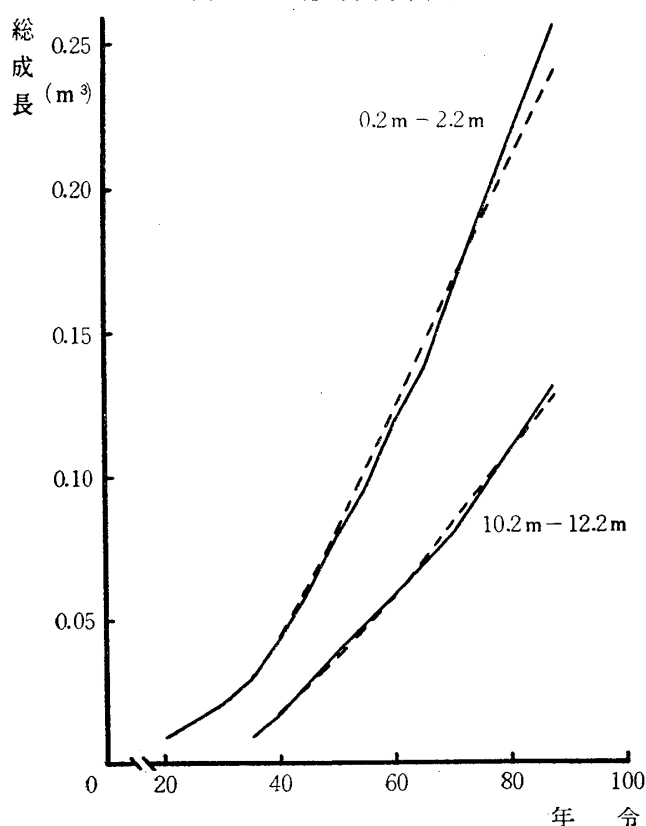


図 2-14  
年令の逆数対総成長の対数

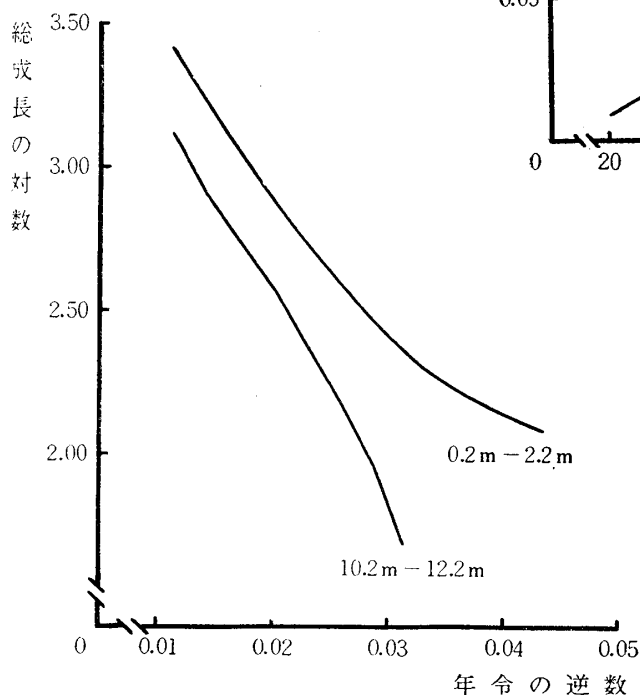


図 2-14 において 35 年以上では、半径成長の場合と同様に殆んど直線としてあらわされるので、その資料にもとづいて計算すれば、総成長曲線式は断面高 0.2m-2.2m の区分材積では

$$GZ_v = 10^{4.005-54.946(1/x)}$$

10.2m-12.2m の区分材積では

は

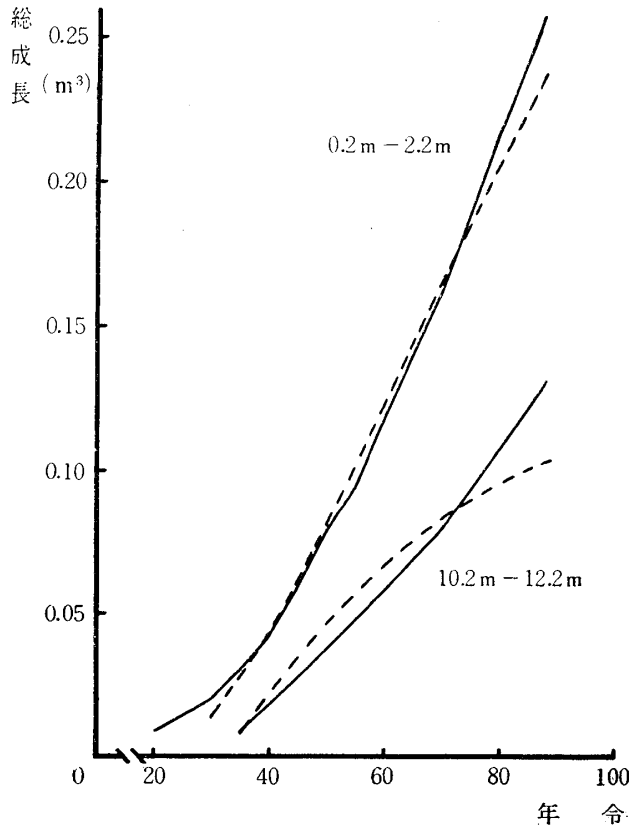
$$GZ_v = 10^{3.841-64.385(1/x)}$$

となり、それによる計算値を図

2-13 に点線でしめす。

区分材積の総成長曲線式も年輪数より年令を独立変数とする方が測定値に適合する。

図 2-15 総成長曲線



半径総成長曲線式にもとづく材積総成長曲線式を変形すれば、断面高 0.2m-2.2m の区分材積では

$$GZ_v = 10^{4.004-54.904(1/x)}$$

10.2m-12.2m の区分材積では

$$GZ_v = 10^{3.849-54.303(1/x)}$$

となり、それぞれ材積総成長の測定値にもとづいて計算された回帰式と殆んど等しい。

上記の両総成長曲線式によれば、連年成長および総平均成長の各曲線式はそれぞれつぎのようにあらわされる。すなわち断面高 0.2m-2.2m の区分材積では

$$Z_v = \frac{54.946 \cdot 10^{4.005-54.946(1/x)}}{(\log e)x^2}$$

$$DZ_v = \frac{10^{4.005-54.946(1/x)}}{(x-3)}$$

また 10.2m-12.2m の区分材積では

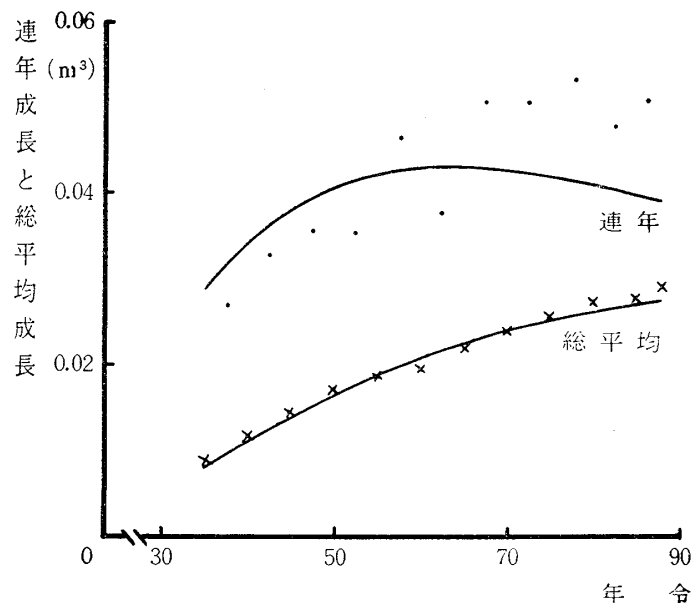
$$Z_v = \frac{64.385 \cdot 10^{3.841-64.385(1/x)}}{(\log e)x^2}$$

$$DZ_v = \frac{10^{3.841-64.385(1/x)}}{(x-24)}$$

となり、連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、前者の区分材積では 63 年および 123 年、後者の区分材積では 74 年および 118 年とそれぞれ推定され、両区分材積とも半径総成長曲線式にもとづいて推定される年令に等しい。

図 2-16 および図 2-17 は区分材積別の連年成長および総

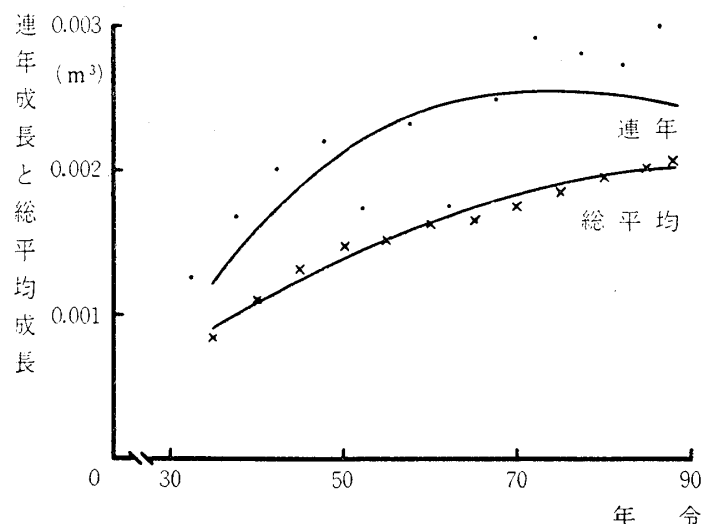
図 2-16 連年、総平均成長曲線



平均成長の計算値を実線で、測定値を点でしめす。

両区分材積とも連年成長の計算値は測定値に似た傾向をもち、総平均成長では計算値が測定値と一致すると認められる。

図 2-17 連年，総平均成長曲線



### 第 3 章 単位年輪の容積密度数

本章では比較的 macro な意味において年輪内の色相の差異によって春材および秋材の境界をきめ、淡白部分を春材、濃褐色部分を秋材とし、単位年輪の容積密度数について、年輪巾と秋材率の関係および秋材率と単位年輪の容積密度数の関係を想定される二つの場合について検討し、その適用例を述べる。

#### 第 1 節 年輪巾と秋材率の関係

年輪巾と秋材率の関係が重量成長におよぼす影響を考察するために、両者の関係についてつぎの二つの場合を想定する。

##### I 秋材率が一定の場合

秋材率を  $s$  であらわせば

$$s = A \quad (3-1)$$

で与えられる。

##### II 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合

年輪巾すなわち半径の連年成長を  $Z_r$  であらわせば、秋材率は

$$s = A + BZ_r \quad (3-2)$$

で与えられる。

##### III 適用例

試験片はつぎの方法によって採取した。

樹幹析解の断面高別に厚さ約 4cm の各円板から、半径 4 方向を中心線として巾約、2cm, その半径を長さとする十字状の木片を採取する。これを上下に折半して厚さ 2cm の同形

の2個の十字に分け、上半分から、樹幹析解における年令と円板の年輪を対応させて5年間隔で試験体を区分する。この試験体について測定した容積密度数の半径4方向の平均値を、試験体の属する令階の材積に掛けて重量を計算し、同様な計算を各令階について繰返すことによって円板の代表する区分重量成長を求める。

また下半分の各木片から、同一方向の半径について木口面にあらわれた年輪が大体直線とみなされる程度の巾約7mmを半径方向の中心線を含んで取り、厚さおよび巾とも1/20mmの精度で測定した。この矩形断面で円板半径を長さとする木片から、色彩の相違を基準として肉眼で識別される春、秋材を割り取り、同一の精度で春、秋材巾を測定した。この両者の和を年輪巾とし、これと秋材巾から秋材率を計算した。

年輪巾と秋材率の関係を、例として、第2章におけると同様に幹足部、断面高1.2mおよび11.2mの各円板について、図3-1以下図3-3に示す。

両者の相関係数は幹足部の円板から順に-0.268, -0.554 および -0.733 でいずれも

図 3-1 年輪幅対秋材率

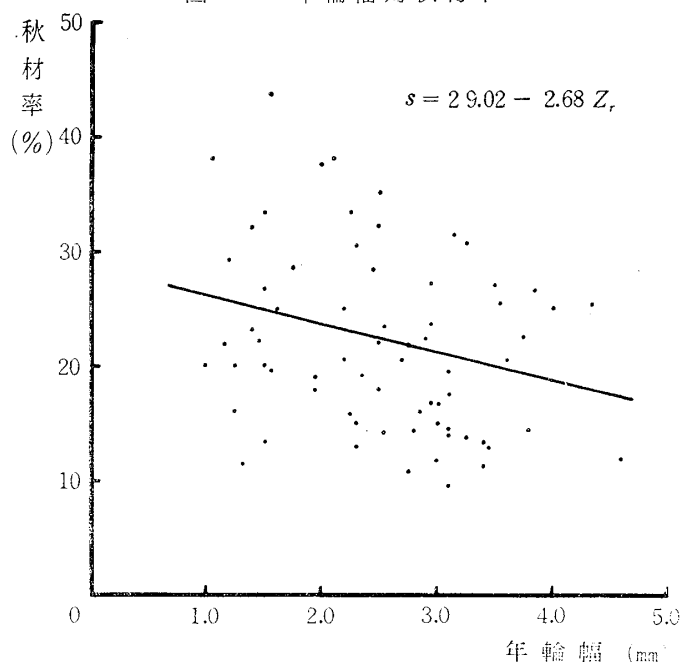


図 3-2 年輪幅対秋材率

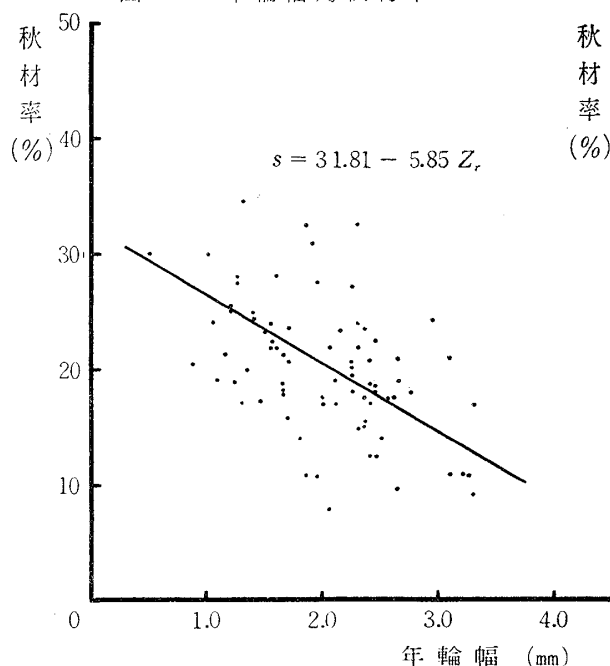
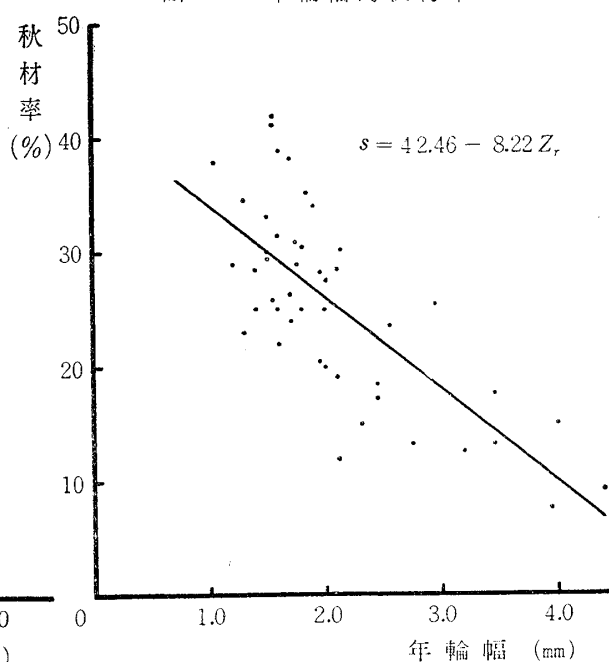


図 3-3 年輪幅対秋材率



有意<sup>17)</sup>であり、年輪巾を独立変数、秋材率を従属変数として回帰式を計算すると、幹足部から順に

$$s = 29.02 - 2.98 Z_r$$

$$s = 31.81 - 5.85 Z_r$$

および

$$s = 42.46 - 8.22 Z_r$$

である。したがってこれらはいずれも (3-2) 式に相当し、秋材率は年輪巾の小さい程大きいという関係が認められる。

## 第 2 節 単位年輪の容積密度数

図 3-4 のように 1 個の春材および秋材から構成される年輪の一部分において、春材および秋材の容積密度数をそれぞれ  $r_{fo}$  および  $r_{so}$ 、秋材率を  $s$  であらわせば、単位年輪の容積密度数  $R_0$  は

$$R_0 = r_{fo} + s(r_{so} - r_{fo})^{18)} \quad (3-3)$$

であらわされる。

### I 秋材率と単位年輪の容積密度数

(3-3) 式に年輪巾と秋材率の関係を導入し、単位年輪の容積密度数をつぎの二つの場合に分けて検討する。

すなわち秋材率が一定の場合には、容積密度数は (3-3) 式に (3-1) 式を代入し

$$R_0 = r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo}) \quad (3-4)$$

また秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には、(3-3) 式に (3-2) 式を代入し

$$R_0 = r_{fo} + (A + BZ_r)(r_{so} - r_{fo}) \quad (3-5)$$

となる。

### II 適用例

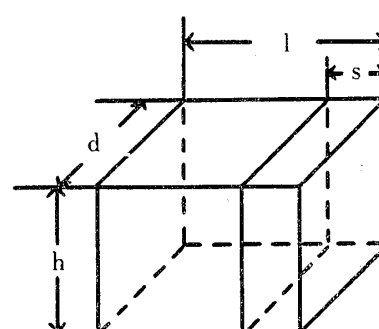
まず年輪の構成因子である春、秋材それぞれの容積密度数について、辺、心材による変化の有無を検討する。

前節の春、秋材各試験片を約 100°C の熱風恒温槽の中に約 75 時間放置し、全乾状態に達したことを確かめた後、化学天秤を用いて 2 mmg の精度でその重量を測定した。試験片の材積は、すでに測定した縦、横および高さの三因子の積として求め、この材積で全乾重量を割って春材および秋材の容積密度数を計算する。

表 3-1 春、秋材容積密度数

| 断面高   | 材     |       |     | 材     |       |     |
|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-----|
|       | 春材    | 秋材    | 測定数 | 春材    | 秋材    | 測定数 |
| 0.2m  | 0.230 | 0.764 | 10  | 0.270 | 0.921 | 60  |
| 1.2m  | 0.232 | 0.901 | 20  | 0.311 | 1.059 | 67  |
| 11.2m | 0.210 | 0.636 | 21  | 0.283 | 0.807 | 25  |

図 3-4 年輪構成模式図



前節と同様に幹足部、断面高 1.2m および 11.2m の各円を例にすれば、各円板の春、秋材容積密度数はそれぞれ辺、心材間に有意の差が認められた。

表 3-1 は各円板における春、秋材容積密度数の平均値を辺、心材別にしめす。

したがって秋材率と単位年輪の容積密度数の関係は、辺材と心材とに分けて検討しなければならない。これら両者の関係を辺材、心材別に、図3-5以下図3-10に示す。各図とも秋材率が高い程単位年輪の容積密度数は大きいという関係が観察される。すなわち前者を独立変数、後者を従属変数とし(3-3)式の形で回帰式を計算すれば、いずれの回帰係数も有意であり、またそれらの常数項および回帰係数にもとづいて春、秋材容積密度数を推定すれば、各円板における数値は表3-1に近似した数値が得られる。したがって春、秋材容積密度数は同一円板における辺材、心材別にそれぞれ安定的であると考えられる。

各円板について辺材、心材別の秋材率と単位年輪の容積密度数による回帰式およびその直線を、図3-5以下図3-10の各図に示す。

図 3-5 秋材率対単位年輪の容積密度数

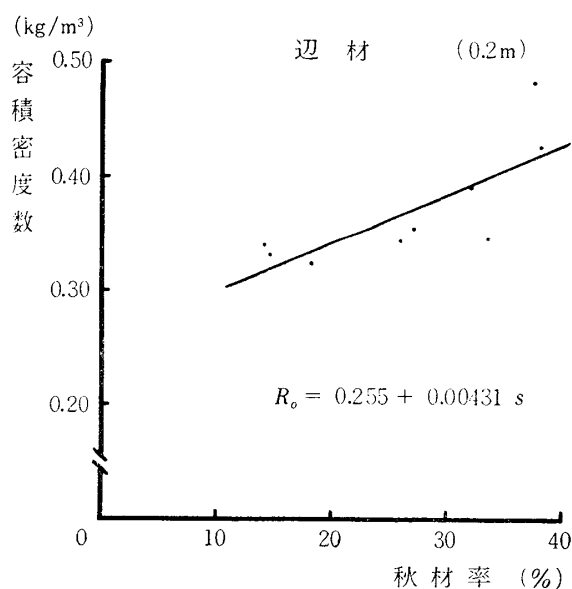


図 3-6 秋材率対単位年輪の容積密度数

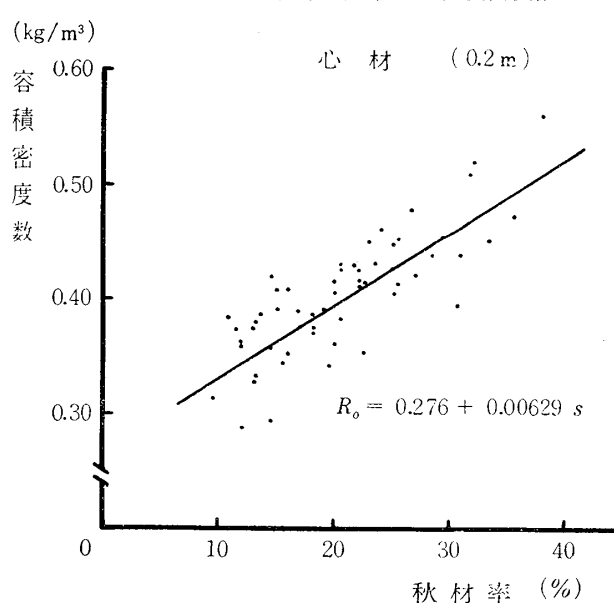


図 3-7 秋材率対単位年輪の容積密度数

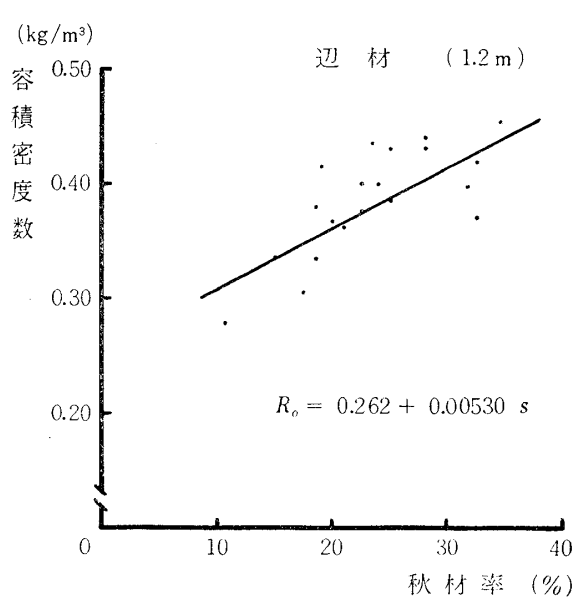


図 3-8 秋材率対単位年輪の容積密度数

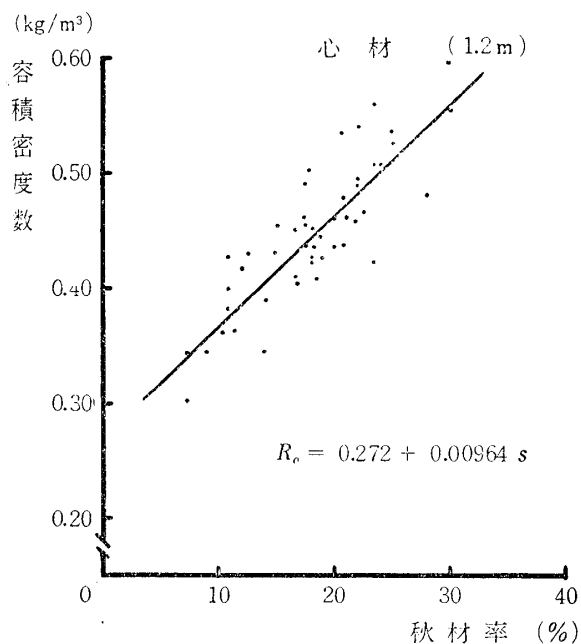


図 3-9 秋材率対単位年輪の容積密度数

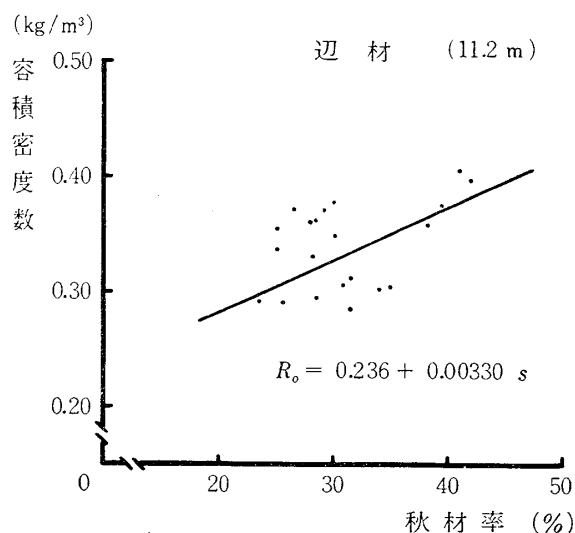
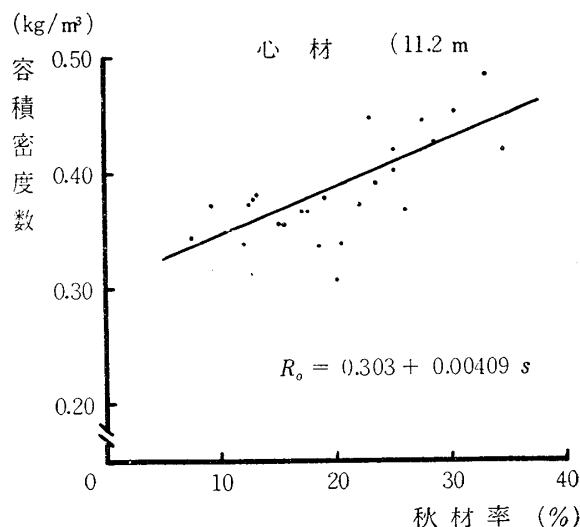


図 3-10 秋材率対単位年輪の容積密度数



これらの各回帰式の独立変数に，前節の年輪巾と秋材率の関係を導入して年輪巾と単位年輪の容積密度の関係 (3-5) 式にまとめれば，表 3-2 にしめすとおりである。

表 3-2 年輪幅対単位年輪の容積密度数

|    | 断面高   | $R_o = r_{fo} + (r_{so} - r_{fo})(A + B Z_r)$ |
|----|-------|-----------------------------------------------|
| 辺材 | 0.2m  | $R_o = 0.255 + 0.00431 (29.02 - 2.68 Z_r)$    |
|    | 1.2m  | $R_o = 0.262 + 0.00530 (31.81 - 5.85 Z_r)$    |
|    | 11.2m | $R_o = 0.236 + 0.00330 (42.46 - 8.22 Z_r)$    |
| 心材 | 0.2m  | $R_o = 0.276 + 0.00629 (29.02 - 2.68 Z_r)$    |
|    | 1.2m  | $R_o = 0.272 + 0.00964 (31.81 - 5.85 Z_r)$    |
|    | 11.2m | $R_o = 0.303 + 0.00409 (42.46 - 8.22 Z_r)$    |

#### 第 4 章 区分重量および単木重量成長

本章においては重量成長経過を材積成長経過と関連させて把握するために，第 3 章までの各章での検討による結果を統一的に組み立て，重量成長経過を理論的に考察してその適用例を述べる。

区分重量の連年成長を  $Z_w$ ，総成長を  $GZ_w$ ，総平均成長を  $DZ_w$  であらわすとき，連年成長曲線式は区分材積の連年成長曲線式 (2-35) あるいは (2-41) 式と単位年輪の容積密度数 (3-3) 式の積

$$Z_w = [r_{fo} + s(r_{so} - r_{fo})] Z_v \quad (4-1)$$

で与えられる。

また総成長曲線式は (4-1) 式を 0 年からある年令あるいは年輪数まで積分する

$$GZ_w = \int_0^x R_0 \cdot Z_v dx, \quad GZ_w = \int_0^{x-m} R_0 \cdot Z_v dx \quad (4-2)$$

によって求められ，総平均成長曲線式は (4-2) 式を年令あるいは年輪数で割り

$$DZ_w = \frac{GZ_w}{x}, \quad DZ_w = \frac{GZ_w}{(x-m)} \quad (4-3)$$

となる。

### 第 1 節 幹足部の重量成長

最初に秋材率が一定の場合を, ついで年輪巾の一次関数であらわされる場合を検討する。

#### I 秋材率が一定の場合

連年成長曲線式は (2-35) 式と (3-4) 式の積

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2} L \quad (4-4)$$

であらわされる。

(4-4) 式の  $x$  に関する一次微分  $Z_w'$  は

$$Z_w' = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] [b - (\log e)x] \frac{4\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^2} L \quad (4-5)$$

となり, この式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{b}{(\log e)}$$

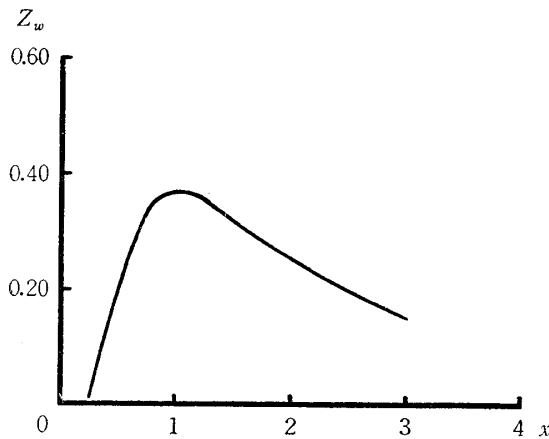
である。したがって (4-4) 式の曲線は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において勾配が 0, それより小さい, あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加, あるいは減少の状態にある。

(4-4) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{w \max.} = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a-(\log e)]}}{b} L \quad (4-6)$$

に達する。

図 4-1  $Z_w$



$x$  の単位:  $\frac{b}{(\log e)}$

$Z_w$  の単位:

$$\frac{b}{[r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] 10^{2a}} L$$

総成長曲線式は (4-4) 式を 0 から  $x$  まで積分し

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L \quad (4-7)$$

となる。(4-7) 式は  $x$  の増加関数であり,  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長曲線式は (4-7) 式を  $x$  で割った

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L \quad (4-8)$$

であらわされる。

(4-8) 式の  $x$  に関する一次微分  $DZ_w'$  は

$$DZ_w' = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] [2b - (\log e)x] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^3} L \quad (4-9)$$

となり、この式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{2b}{(\log e)}$$

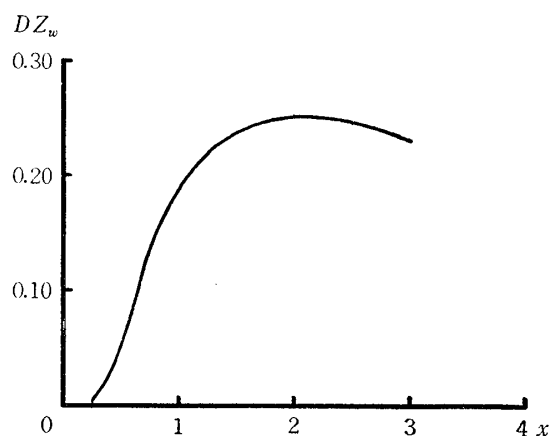
である。したがって (4-8) 式の曲線は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において勾配が 0, それより小さい, あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加, あるいは減少の状態にある。

(4-8) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{w\max.} = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi (\log e) 10^{2a - (\log e)}}{2b} L \quad (4-10)$$

に達する。

図 4-2  $DZ_w$



$x$  の単位:  $\frac{b}{(\log e)}$

$DZ_w$  の単位:

$$\frac{b}{[r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] 10^{2a} L}$$

以上の検討から明らかなように、秋材率が一定の場合には重量の総成長, 連年成長および総平均成長の各曲線式は, 材積の各曲線式 (2-34), (2-35), および (2-36) 式と常数の容積密度数 (3-4) 式の積としてあらわされる。したがって重量の連年成長および総平均成長の各曲線式は, 材積のそれらの曲線式が最大値に達する年令において最大値に達し, その縮尺を  $\frac{1}{r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})}$  にすることによって同一の曲線としてあらわされる。

すなわち (4-4) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値 (4-6) 式に達し, また (4-7) 式は変曲する。(4-8)式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において最大値 (4-10) 式に達する。

連年成長および総平均成長の各曲線式は, 最大値に達する年令については前者が後者の  $\frac{1}{2}$  倍, 最大値については 1.47 倍の関係がある。

II 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合

連年成長曲線式は (2-35) 式と (3-5) 式の積

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2} L + B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b^2 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^2} L \quad (4-11)$$

であらわされる。

(4-11) 式の右辺を第 1 項および第 2 項に分けそれぞれを  $Z_{w1}$  および  $Z_{w2}$  であらわせば、 $Z_{w1}$  は (4-4) 式と同形であり、 $Z_{w2}$  は

$$Z_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b^2 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^2} L \quad (4-12)$$

である。したがって  $Z_{w1}$  の総成長および総平均成長の各曲線式に相当する  $GZ_{w1}$  および  $DZ_{w1}$  は、それぞれ (4-7) 式および (4-8) 式であらわされる。

(4-12) 式の総成長および総平均成長の各曲線式に相当する  $GZ_{w2}$  および  $DZ_{w2}$  はそれぞれ

$$GZ_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^2} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-13)$$

$$DZ_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^3} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-14)$$

である。

(4-12) 式の  $x$  に関する一次微分  $Z'_{w2}$  は

$$Z'_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) [3b - 4(\log e)x] \frac{2\pi b^2 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^3} L \quad (4-15)$$

となり、この式を 0 にする  $x$  は

$$x = \frac{3b}{4(\log e)}$$

である。

(4-15) 式を  $f(x)$  であらわし  $0 < x_1 < \frac{3b}{4(\log e)} < x_2 < +\infty$  であるとするとき、 $f(x)$  の符号は  $B(r_{so} - r_{fo})$  の積の符号によってきまる。すなわち

$$B(r_{so} - r_{fo}) \leq 0$$

であるとき

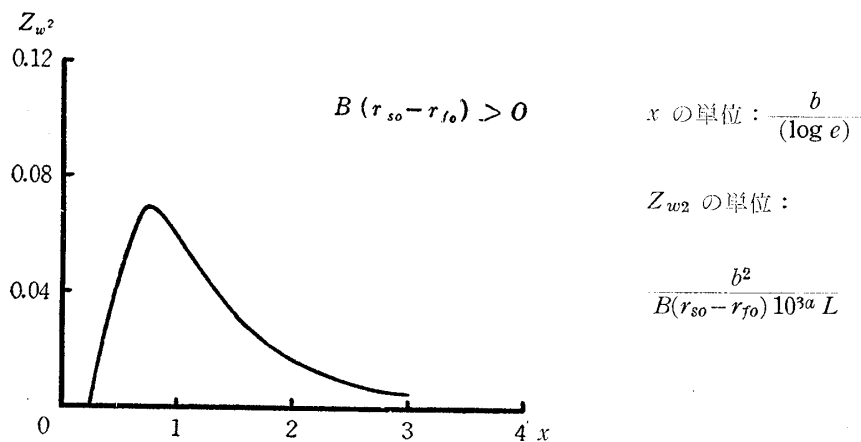
$$f(x_1) \leq 0$$

$$f\left[\frac{3b}{4(\log e)}\right] = 0$$

$$f(x_2) \leq 0$$

となり、 $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  において (4-12) 式の曲線は勾配が 0 になる。

まず  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  の場合には、 $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  より小さい、あるいは大きい  $x$  の範囲ではそれぞれ増加、あるいは減少の状態をしめし、これと反対に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  の場合には、曲線の形は  $x$  軸を対称軸として逆の形をしめす。したがって (4-12) 式は  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  において、前の場合には最大値、後の場合には最小値をもち、(4-13) 式は変曲する。

図 4-3  $Z_{w2}$ 

(4-14) 式の  $x$  に関する一次微分  $DZ'_{w2}$  は

$$DZ'_{w2} = B(r_{s0} - r_{f0}) \left[ \frac{27b^3 - 9b^2(\log e)x - 6b(\log e)^2x^2 - 2(\log e)^3x^3}{27b(\log e)^2x^5} \right] \cdot 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-16)$$

となり, この式を 0 にする  $x$  は

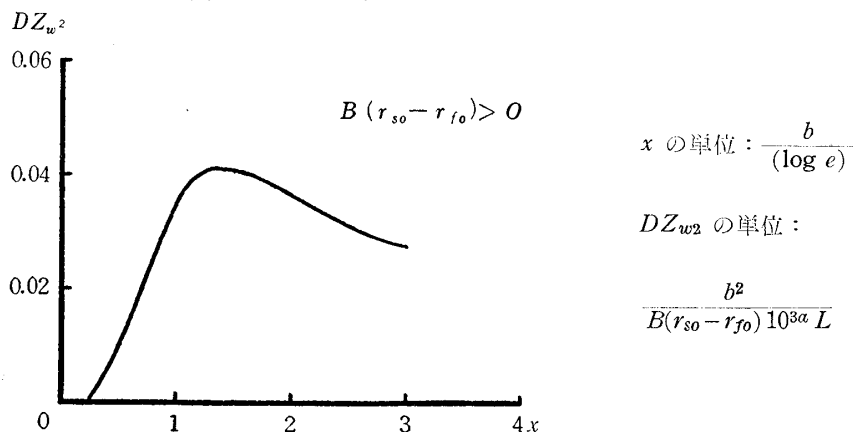
$$x = \frac{1.322b}{(\log e)}$$

の 1 根である。

(4-14) 式の  $x$  に関する二次微分に  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  を代入すれば

$$f\left[\frac{1.322b}{(\log e)}\right] = -0.992 B(r_{s0} - r_{f0}) \left[\frac{(\log e)}{1.322b}\right]^4 2\pi(\log e)^2 10^{3[a-(\log e)/1.322]} L \quad (4-17)$$

となり,  $B(r_{s0} - r_{f0}) > 0$  の場合にはマイナス,  $B(r_{s0} - r_{f0}) < 0$  の場合にはプラスの値をもつ。したがって (4-14) 式は  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  において前の場合には最大値, 後の場合には最小値にそれぞれ達する曲線をしめす。

図 4-4  $DZ_{w2}$ 

以上第 1 項および第 2 項に分けて考察した結果にもとづいて, 重量の連年成長, 総成長,

および総平均成長の各曲線式について検討する。

連年成長曲線式は (4-11) 式であらわされ、その最大値に達する年令は  $x$  に関する一次微分を 0 にする  $x$  を求めればよいが、これは直接には計算できないので間接的に推定する。

$$Z'_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] [b - (\log e)x] \frac{4\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^3} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) [3b - 4(\log e)x] \frac{2\pi b^3 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^3} L \quad (4-18)$$

いま (4-18) 式を  $f(x)$ , その  $x$  に (4-15) および (4-5) の各式を 0 にする  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  および  $x = \frac{b}{(\log e)}$  を代入すれば

$$f\left[\frac{3b}{4(\log e)}\right] = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \left[\frac{4}{3}\right]^4 \left[\frac{(\log e)}{b}\right]^2 \pi 10^{2[a-4(\log e)/3]} L \quad (4-19)$$

および

$$f\left[\frac{b}{(\log e)}\right] = -B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi(\log e)^3 10^{3[a-(\log e)]}}{b^3} L \quad (4-20)$$

となる。(4-19) 式は常にプラスの値をしめすので、(4-11) 式は  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  においては増加の状態にある。

$x = \frac{b}{(\log e)}$  における (4-20) 式の符号は  $B(r_{so} - r_{fo})$  の積の符号によって変化するので、この式は

$$B(r_{so} - r_{fo}) > 0$$

および

$$B(r_{so} - r_{fo}) < 0$$

の場合とに分けて検討しなければならない。

$B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  の場合には (4-20) 式の符号はマイナスになり、(4-11) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  においては最大値に達した後の減少の状態にある。すなわち連年成長が最大値に達する年令は材積成長の場合よりも早い、(4-19) 式から明らかなように  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  より早くはならない。

$B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  の場合には (4-20) 式の符号はプラスであり、(4-11) 式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  においては最大値に達する前の増加の状態にある。すなわち連年成長が最大値に達する年令は材積の連年成長よりも遅いが、(4-18) 式を近似的に解けば

$$x = \sqrt{\left[\frac{b}{(\log e)}\right]^2 + \frac{4}{p}} \quad p = - \frac{2[r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})](\log e)}{B(r_{so} - r_{fo}) b \cdot 10^a}$$

より遅くはない。

したがって秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には、重量および材積の連年成長経過は一致せず、最大値に達する年令は  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば前者が後者よりも早い、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば遅くなる。

総成長曲線式は (4-11) 式を 0 から  $x$  まで積分した

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^2} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-21)$$

によってあらわされ、変曲する年令は材積成長と異なる。

総平均成長曲線式は(4-21)式を  $x$  で割って

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^3} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-22)$$

で与えられる。

(4-22)式が最大値に達する年令は、

$$DZ'_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] [2b - (\log e)x] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^3} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{27b^3 - 9b^2(\log e)x - 6b(\log e)x^2 - 2(\log e)^3 x^3}{27b(\log e)^2 x^5} \right] \cdot \\ 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-23)$$

を 0 にする  $x$  を求めればよいが、(4-18) 式の場合と同様に直接には計算できないので、間接的に推定する。

いま (4-23) 式を  $f(x)$ 、(4-16) および (4-9) の各式を 0 にする  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  および  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  を  $x$  に代入すれば

$$f\left[\frac{1.322b}{(\log e)}\right] = 0.514[r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \left[\frac{(\log e)}{1.322b}\right]^2 \pi 10^{2[a-(\log e)/1.322]} L \quad (4-24)$$

および

$$f\left[\frac{2b}{(\log e)}\right] = -0.648B(r_{so} - r_{fo}) \left[\frac{(\log e)}{2b}\right]^3 \pi 10^{3[a-(\log e)/2]} L \quad (4-25)$$

となる。(4-24) 式は常にプラスの値をしめすので、(4-22) 式は  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  においては増加の状態にある。

$x = \frac{2b}{(\log e)}$  における (4-25) 式の符号は  $B(r_{so} - r_{fo})$  の積の符号によって変化するので、この式は

$$B(r_{so} - r_{fo}) > 0$$

および

$$B(r_{so} - r_{fo}) < 0$$

の場合とに分けて検討しなければならない。

$B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  の場合には(4-25)式の符号はマイナスになり、(4-22) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  においては最大値に達した後の減少の状態にある。すなわち総平均成長が最大値に達する年令は材積成長の場合よりも早い、(4-24) 式から明らかなように  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  より早

くはならない。

$B(r_{so}-r_{fo})<0$  の場合には (4-25) 式の符号はプラスであり, (4-22) 式は  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  においては最大値に達する前の増加の状態にある。すなわち総平均成長が最大値に達する年令は材積の総平均成長よりも遅い。

したがって重量および材積の総平均成長経過は一致せず, 最大値に達する年令は

$B(r_{so}-r_{fo})>0$  ならば前者が後者よりも早い, 逆に  $B(r_{so}-r_{fo})<0$  ならば遅くなる。

以上によって明らかなように, 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には, 重量の連年成長, 総成長および総平均成長の各曲線は材積成長のそれらの曲線と一致しない。換言すれば重量の連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は, 材積成長のそれらの年令  $x = \frac{b}{(\log e)}$  および  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  と異なり,  $B(r_{so}-r_{fo})>0$  の場合には早く, 逆に  $B(r_{so}-r_{fo})<0$  の場合には遅くなる。

## 第 2 節 幹足部以外の区分重量成長

### I 年令を採る場合

秋材率が一定の場合と年輪巾の一次関数であらわされる場合とに分けて検討する。

#### 1) 秋材率が一定の場合

連年成長および総成長の各曲線式は幹足部におけると同様に (4-4) 式および (4-7) 式であらわされる。したがって  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において連年成長曲線は最大値に達し, 総成長曲線は変曲する。

総平均成長曲線式は総成長曲線式を年輪数で割って

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} L \quad (4-26)$$

であらわされ, 材積成長の場合と同様に

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

において最大値に達する。

#### 2) 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合

連年成長および総成長の各曲線式は幹足部におけると同様に (4-11) 式および (4-21) 式であらわされる。すなわち連年成長曲線が最大値に達する年令は, 材積成長の  $x = \frac{b}{(\log e)}$  とは一致せず, したがって総成長曲線が変曲する年令も材積成長と異なる。

総平均成長曲線式は総成長曲線式を年輪数で割って

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} L + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^2(x-m)} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \quad (4-27)$$

であらわされ, その曲線が最大値に達する年令は, (4-27) 式の  $x$  に関する一次微分

$$\begin{aligned}
DZ'_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] [2b(x-m) - (\log e)x^2] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2(x-m)^2} L \\
+ B(r_{so} - r_{fo}) \left[ 27b^3 - \frac{9b^2(\log e)x^2 + 6b(\log e)^2x^3 + 2(\log e)^3x^4}{(x-m)} \right] \cdot \\
\frac{2\pi 10^{3[a-b(1/x)]}}{27b[(\log e)x^2]^2(x-m)} L \quad (4-28)
\end{aligned}$$

を 0 にする  $x$  を求めればよい。

これを間接的に推定すれば、総平均成長曲線式が最大値に達する年令は、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  の場合には材積成長における  $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$  よりも早く、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  の場合には遅くなる。

したがって秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には区分重量成長経過と区分材積成長経過は一致しない。すなわち連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば材積成長におけるよりも早く、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば遅くなる。

## II 年輪数を探る場合

### 1) 秋材率が一定の場合

連年成長曲線式は (2-41) 式と (3-4) 式の積

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b' 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L \quad (4-29)$$

であらわされ、材積成長の場合と同様に  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において最大値に達する。

総成長曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-30)$$

であらわされ  $x$  の増加関数であり  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において変曲する。

総平均成長曲線式は (4-30) 式を (2-6) 式で割って

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x-m)} L \quad (4-31)$$

となり  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  において最大値に達する。

したがって秋材率が一定の場合には区分重量の各成長曲線式は区分材積成長曲線式と常数の容積密度数との積であらわされるので、両者の成長経過は一致する。

### 2) 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合

連年成長曲線式は (2-41) 式と (3-5) 式の積であらわされる。すなわち

$$\begin{aligned}
Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b' 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L \\
+ B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b'^2 10^{3[a' - b'(1/x - m)]}}{[(\log e)(x-m)^2]^2} L \quad (4-32)
\end{aligned}$$

で与えられ、この式の右边を第 1 項および第 2 項に分けそれぞれを  $Z_{w1}$  および  $Z_{w2}$  であらわせば、 $Z_{w1}$  は (4-29) 式と同形であり、 $Z_{w2}$  は

$$Z_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b'^2 10^{3[a' - b'(1/x - m)]}}{[(\log e)(x - m)^2]^2} L \quad (4-33)$$

となる。したがって  $Z_{w1}$  の総成長および総平均成長の各曲線式に相当する  $GZ_{w1}$  および  $DZ_{w1}$  は、それぞれ (4-30) 式および (4-31) 式であらわされる。また (4-33) 式の総成長および総平均成長の各曲線式に相当する  $GZ_{w2}$  および  $DZ_{w2}$  はそれぞれ

$$GZ_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2(x - m)^2 + 6b'(\log e)(x - m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x - m)^2} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-34)$$

および

$$DZ_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2(x - m)^2 + 6b'(\log e)(x - m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x - m)^3} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-35)$$

である。

(4-33) 式の  $x$  に関する一次微分

$$Z'_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) [3b' - 4(\log e)(x - m)] \frac{2\pi b'^2 10^{3[a' - b'(1/x - m)]}}{[(\log e)(x - m)^2]^3} L \quad (4-36)$$

は  $x = m + \frac{3b'}{4(\log e)}$  において 0, したがって (4-33) 式は  $x = m + \frac{3b'}{4(\log e)}$  において  
 最大値, あるいは最小値をしめし, (4-34) 式は変曲する。

(4-35) 式の  $x$  に関する一次微分

$$DZ'_{w2} = B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{27b'^3 - 9b'^2(\log e)(x - m) - 6b'(\log e)^2(x - m)^2 - 2(\log e)^3(x - m)^3}{27b'(\log e)^2(x - m)^5} \right] \cdot 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-37)$$

は  $x = m + \frac{1.322b'}{(\log e)}$  において 0, したがって (4-35) 式は  $x = m + \frac{1.322b'}{(\log e)}$  において  
 最大値, あるいは最小値に達する。

以上の 2 項に分けて検討した結果を総合すれば, (4-32) 式であらわされる連年成長曲線  
 式は,  $x = m + \frac{3b'}{4(\log e)}$  においては増加の状態にあり, 材積成長が最大値に達する

$x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  においては,  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば最大値に達した後の減少の状態, 逆に  
 $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば最大値に達する前の増加の状態にある。

総成長曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2(x - m)^2 + 6b'(\log e)(x - m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x - m)^2} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-38)$$

であらわされ, その変曲点に達する年令は材積成長と一致しない。

総平均成長曲線式は

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x - m)} L$$

$$+ B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2(x-m)^2 + 6b'(\log e)(x-m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x-m)^3} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L \quad (4-39)$$

であらわされ、 $x = m + \frac{1.322b'}{(\log e)}$  においては増加の状態にあり、材積成長が最大値に達す

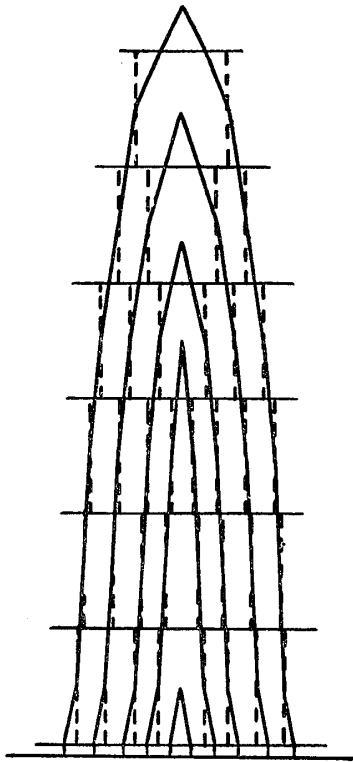
る  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  においては、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば最大値に達した後の減少の状態、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば最大値に達する前の増加の状態にある。

したがって秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には区分重量成長経過と区分材積成長経過は一致しない。すなわち連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば材積成長におけるよりも早く、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば遅い。

### 第3節 単木の重量成長

本節においては、図4-5に示すように単木材積（実線）を各区分材積の積み重ね（点線）として理解し、材積成長と重量成長の関係をつぎの二つに分けて検討する。

図 4-5 樹幹断面模式図



#### I 秋材率が一定の場合

樹幹を区間長  $L$  の  $n$  個の区分材積に分け、各区分材積を幹足部から順に  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 、区分材積の連年成長あるいは総平均成長の曲線式が最大値に達する年令を  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 、幹材積を  $V$ 、単木の材積成長が最大値に達する年令を  $x_v$  とするとき、単木の材積成長が最大値に達する年令は

$$x_v = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n}{V} \quad (4-40)$$

であらわされる。

また各区分材積における単位年輪の容積密度数を  $R_{o1}, R_{o2}, \dots, R_{on}$ 、区分重量を  $w_1, w_2, \dots, w_n$ 、幹重量を  $W$ 、単木の重量成長が最大値に達する年令を  $x_w$  とするとき、各区分重量は

$$\begin{aligned} w_1 &= R_{o1} \cdot v_1 \\ w_2 &= R_{o2} \cdot v_2 \\ &\vdots \\ w_n &= R_{on} \cdot v_n \end{aligned}$$

単木の重量成長が最大値に達する年令は

$$x_w = \frac{w_1(x_1 + 0) + w_2(x_2 + 0) + \dots + w_n(x_n + 0)}{W} \quad (4-41)$$

であらわされる。

したがって各区分材積における単位年輪の容積密度数が

$$R_{o1} = R_{o2} = \dots = R_{on}$$

である場合には、材積と重量が最大値に達する年令は一致するが、そうでない場合には異なる。

## II 秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合

各区分の材積成長と重量成長の最大値に達する年令の差を  $d_1, d_2, d_n$  とするとき、単木の重量成長が最大値に達する年令は

$$x_w = \frac{w_1(x_1 + d_1) + w_2(x_2 + d_2) + \cdots + w_n(x_n + d_n)}{W} \quad (4-42)$$

であらわされる。

樹種によって年輪巾に対応する秋材率の変化の仕方および春、秋材容積密度数の大小がきまるならば、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  の場合には  $d$  はマイナス、逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  の場合にはプラスと考えられるので、材積と重量の各成長が最大値に達する年令は一致しない。

## 第4節 適用例

### I 幹足部の重量成長

すでに述べたように幹足部の材積は、断面高 0.2m の円板面積と区間長 0.2m の積として求められる。

第3章における検討の結果、この円板では年輪巾と秋材率の間の相関係数は有意であり、前者を  $Z_r$ 、後者を  $s$  であらわすとき両者の間には

$$s = 29.02 - 2.68 Z_r$$

の関係が成立し、また秋材率と単位年輪の容積密度数の間には、前者を  $s$ 、後者を  $R_o$  であらわすとき、辺材部では

$$R_o = 0.255 + 0.00431 s$$

心材部では

$$R_o = 0.276 + 0.00629 s$$

の関係が認められた。したがって秋材率に  $s = 29.02 - 2.68 Z_r$  を代入すれば単位年輪の容積密度数は、辺材部では

$$R_o = 0.380 - 0.0116 Z_r$$

心材部では

$$R_o = 0.458 - 0.0169 Z_r$$

であらわされる。

これらを(4-21)式に代入して求めた総成長の計算値を図4-6に実線（辺材容積密度数）および点線（心材容積密度数）でしめす。また(4-11)式および(4-22)式に代入して求めた連年成長および総平均成長の計算値を図4-7にしめす。

図 4-6 総成長曲線

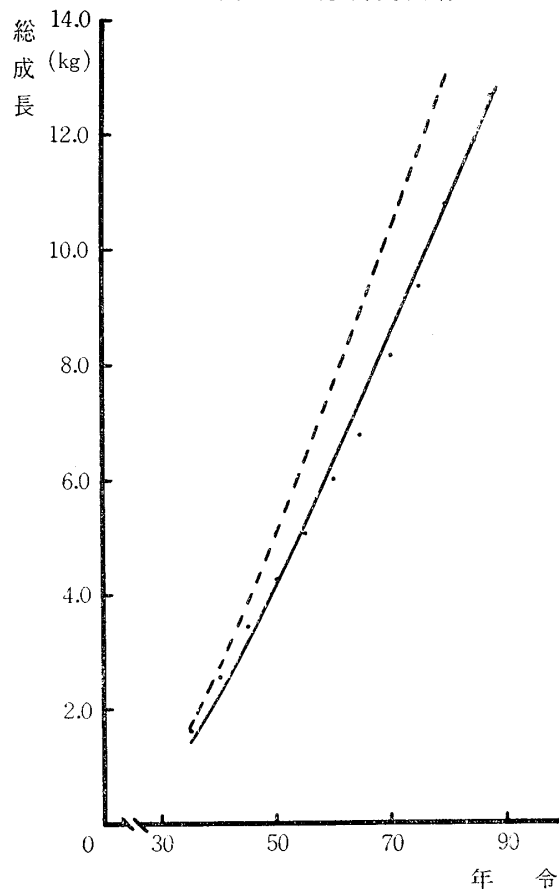
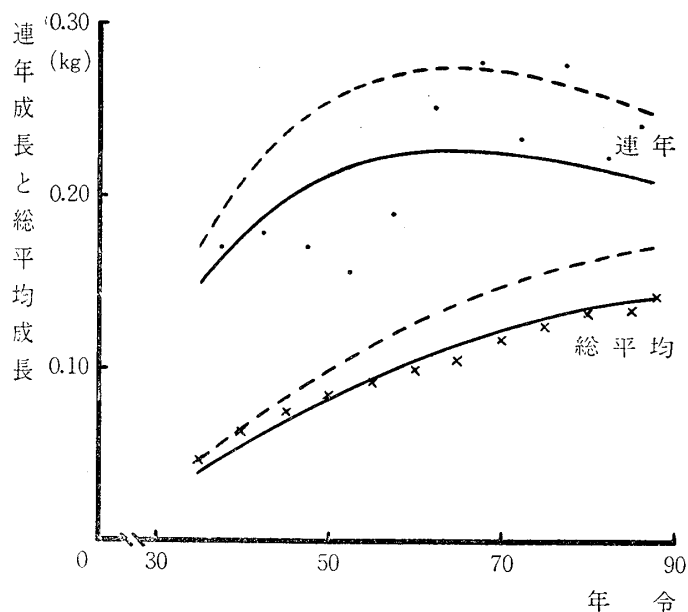


図 4-7 連年，総平均成長曲線



つぎに総成長，連年成長および総平均成長の各測定値を図4-6および図4-7に落してみる。これら両図によれば辺材部の単位年輪の容積密度数にもとづく計算値が測定値とよく似ているが，連年成長の場合には幾分異なっている。これは半径成長における測定値と計算値が多少異なっていることに起因するのであろう。

ここで材積成長との比較を試みる。前章での測定から，(3-5)式において  $B < 0$  および  $(r_{so} - r_{fo}) > 0$ ，したがって  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$ ，であることを

明らかにした。すなわち重量の連年成長および総平均成長がそれぞれの最大値に達する年令は，材積成長における64年および128年より遅れると推定される。

表4-1は連年成長および総平均成長の各曲線式の第一次微分(4-18)式および(4-23)式に，64年および128年以降を1年刻みに代入して符号の変る年令をしめしたものである。したがって連年成長および総平均成長の両曲線は，材積成長に対して約1年の遅れが認められる。

表 4-1  $Z'_w$  と  $DZ'_w$ 

| $Z'_w$ |        |        | $DZ'_w$ |        |        |
|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| 年 令    | 辺材     | 心材     | 年 令     | 辺材     | 心材     |
| 63     | 0.409  | 0.495  | 128     | 0.099  | 0.079  |
| 64     | 0.080  | 0.098  | 129     | 0.001  | 0.009  |
| 65     | -0.250 | -0.299 | 130     | -0.173 | -0.187 |
| 66     | -0.580 | -0.696 | 131     | -0.337 | -0.384 |

## II 幹足部以外の区分重量成長

断面高11.2mの円板における年輪巾と単位年輪の容積密度数の関係は，辺材部では

$$R_o = 0.376 - 0.0271 Z_r$$

心材部では

$$R_o = 0.477 - 0.0336 Z_r$$

であらわされる。

これらを(4-21)式に代入して求めた総成長の計算値を図4-8に，(4-11)式および(4-

27) 式に代入した連年成長および総平均成長の計算値を図4-9に、またそれぞれの測定値も同時にしめす。

この円板は約60年に相当する年輪まで心材が形成されており、前掲の図4-8および図4-9によれば測定値は、計算値に対して約60年までは心材容積密度数にもとづく曲線に近く、それ以後は辺材にもとづく曲線に近くなっている。

この円板が代表する区分重量においてもその連年成長および総平均成長がそれぞれ最大値に達する年令は、材積成長の74年および118よりも遅くな

図4-8 総成長曲線

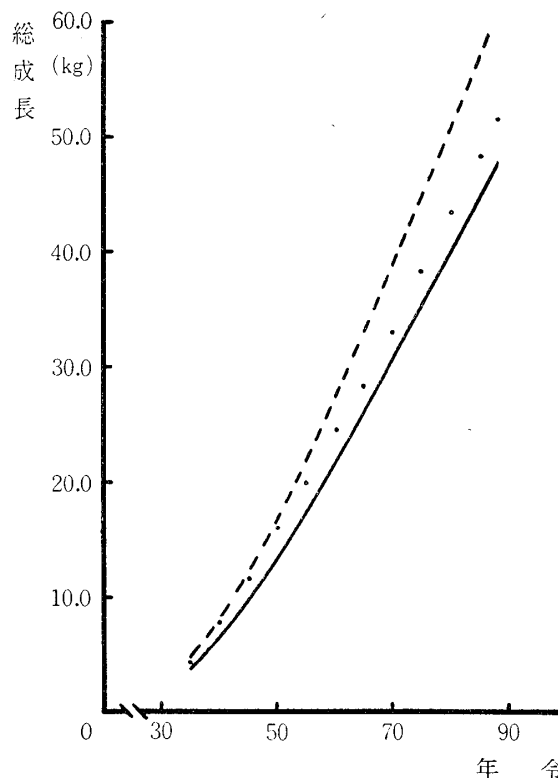
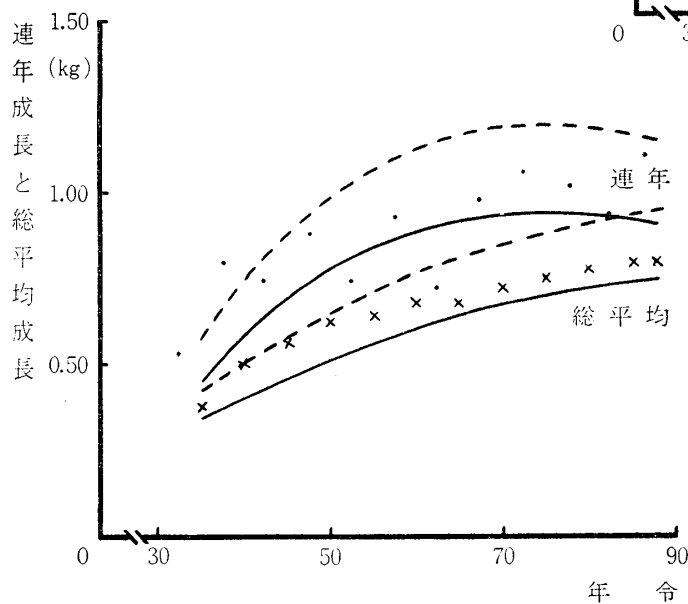


図4-9 連年、総平均成長曲線



ると推定される。

表4-2は連年成長および総平均成長の各曲線式の第一次微分(4-18)式および(4-28)式に、74年および118年以降を1年刻みに代入して符号の変る年令をしめしたものである。したがって連年成長および総平均成長の両曲線は、材積成長に対して約1年の遅れが認められる。

表4-2  $Z'_w$  と  $DZ'_w$

| $Z'_w$ |        |        | $DZ'_w$ |        |        |
|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| 年 令    | 辺材     | 心材     | 年 令     | 辺材     | 心材     |
| 73     | 0.475  | 0.598  | 118     | 0.002  | 0.002  |
| 74     | 0.154  | 0.191  | 119     | -0.151 | -0.191 |
| 75     | -0.166 | -0.216 | 120     | -0.303 | -0.385 |
| 76     | -0.488 | -0.623 | 121     | -0.456 | -0.579 |

### Ⅲ 単木の重量成長

単木の重量成長は前項 I および II に述べた幹足部およびそれ以外の各区分重量を積み重ねたものである。ゆえにこの場合については適用例を省略する。

## 第 5 章 結 論

本研究は、樹幹の区分材積成長と重量成長および単木の材積成長と重量成長の関係を成長曲線式によって理論的に究明し、あわせてその実証を試みたものである。

以下、理論展開の順序にしたがって要約考察を行なう。

### I 成長曲線式

BRUCE, SCHUMACHER による総成長の実験式

$$\log GZ = a + b(1/x)$$

を本研究の基本的な総成長曲線式として適用するにあたり、この式の常数および係数の符号の各組合せについて検討し、

$$GZ = 10^{a-b(1/x)}$$

の場合に総成長曲線の一般的特徴を満足することを明らかにした。

連年成長曲線式は総成長曲線式の  $x$  に関する一次微分として一般にあらわされるので、上記の総成長曲線式を  $x$  について微分した

$$Z = \frac{b 10^{a-b(1/x)}}{(\log e) x^2}$$

の特徴を、 $GZ$  の  $x$  に関する二次微分および極限值によって検討した結果、この式は連年成長曲線の一般的特徴を満足し、 $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において最大値

$$Z_{\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a-2(\log e)}}{b}$$

に達すること、また上記の総成長曲線式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において変曲することを明らかにした。

総平均成長曲線式は一般に総成長曲線式を  $x$  で割ったものとしてあらわされる。上記の総成長曲線式を  $x$  で割った

$$DZ = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x}$$

の特徴を連年成長曲線式の場合と同じ方法によって検討した結果、この式は総平均成長曲線の一般的特徴を具備し、 $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{\max.} = \frac{(\log e) 10^{a-(\log e)}}{b}$$

に達することが明らかにされた。

連年成長および総平均成長の各曲線式の関係は、最大値に達する年令については後者が前者の 2 倍、最大値の大きさについては前者が後者の 1.47 倍であり、両式の曲線の関係が一般に総平均成長曲線は連年成長曲線より変化の状態がゆるやかであるとされる事実と一致する。

これを要するに, BRUCE, SCHUMACHER による総成長曲線の実験式は  $b < 0$  の場合に総成長曲線式であり, その年令に関する一次微分は連年成長曲線式, 年令で割った式は総平均成長曲線式としてそれぞれ適用できることを理論的に明らかにした。

## II 半径成長

前項において明らかにした結果を半径成長に適用し, これを総平均成長曲線式の除数に対する考慮から樹幹における円板の位置によって幹足部の円板およびそれ以外の円板に分けて考察した。

幹足部の円板半径における総成長, 連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_r = 10^{a-b(1/x)}$$

$$Z_r = \frac{b \cdot 10^{a-b(1/x)}}{(\log e)x^2}$$

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x}$$

によってそれぞれあらわされ, 連年成長曲線式は  $x = \frac{b}{2(\log e)}$  において最大値

$$Z_{r \max.} = \frac{4(\log e) \cdot 10^{a-2(\log e)}}{b}$$

に達し, また総平均成長曲線式は  $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{r \max.} = \frac{(\log e) \cdot 10^{a-(\log e)}}{b}$$

に達する。

幹足部以外の円板における半径成長は, 成長曲線式の独立変数が年令あるいは年輪数のいずれである場合を適當とするかによって二つに分けられる。

年令を独立変数とする場合には, 総成長および連年成長の各曲線式は幹足部とそれぞれ同形である。

総平均成長曲線式は, 総成長曲線式を年輪数

$$X = x - m$$

で割り

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(x-m)}$$

であらわされ,  $b^2 - 4bm(\log e) \geq 0$  ならば

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4bm(\log e)}}{2(\log e)}$$

において最大値に達するが,  $b^2 - 4bm(\log e) < 0$  ならば最大値に達する年令は存在しない。したがって円板の断面高によっては, 半径総平均成長が最大値に達する年令のない場合も起り得る。

年輪数を独立変数とする場合には, 総成長, 連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_r = 10^{a'-b'(1/x-m)}$$

$$Z_r = \frac{b' 10^{a'-b'(1/x-m)}}{(\log e)(x-m)^2}$$

$$DZ_r = \frac{10^{a'-b'(1/x-m)}}{(x-m)}$$

であらわされ、連年成長曲線式は  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$  において最大値

$$Z_{r\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a'-2(\log e)}}{b'}$$

に達し、また総平均成長曲線式は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{r\max.} = \frac{(\log e) 10^{a'-(\log e)}}{b'}$$

に達する。

したがって幹足部以外の各円板における半径成長曲線式は、年輪数を独立変数とする場合には、幹足部円板の半径成長曲線式における独立変数に年輪数を代入することによって、常数および係数は異なるけれども、それらと同形であらわされる。

### III 面積成長

面積成長は、半径成長の場合と同様の考慮にもとづいて幹足部の円板およびそれ以外の円板に分けて検討した。

幹足部円板の面積総成長曲線式は、半径総成長曲線式にもとづいて

$$GZ_f = \pi 10^{2[a-b(1/x)]}$$

であらわされ、この式の  $x$  に関する一次微分

$$Z_f = \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2}$$

は連年成長曲線の一般的特徴を具備し、 $x = \frac{b}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a-(\log e)]}}{b}$$

に達する。また総成長曲線式を  $x$  で割った

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x}$$

は総平均成長曲線の特徴を備え、 $x = \frac{2b}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi(\log e) 10^{2a-(\log e)}}{2b}$$

に達する。

連年成長および総平均成長の各曲線式の関係は、最大値に達する年令については前者が後者の  $\frac{1}{2}$  倍、最大値の大きさについては 1.47 倍であって、これらの関係は半径成長曲線式の場合と同じである。

また面積の連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令を半径成長の場合と比較すれば、両曲線式とも半径成長の 2 倍である。

幹足部以外の円板の面積成長曲線式は、その独立変数が年令であるか、あるいは年輪数であるかによって分けて検討した。

年令を独立変数とする場合には、総成長および連年成長の各曲線式は幹足部の円板と同形であらわされるが、総平均成長曲線式は総成長のそれを年輪数で割って

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)}$$

で与えられる。この式は総平均成長曲線の一般的特徴を具備し、 $b^2 - 2bm(\log e) \geq 0$  ならば

は  $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$  において最大値に達するものである。

年輪数を独立変数とする場合には、総成長連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$DZ_f = \pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}$$

$$Z_f = \frac{2\pi b' 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(\log e)(x-m)^2}$$

および

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x-m)}$$

であらわされる。

この場合連年成長曲線式は  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  において最大値

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a' - (\log e)]}}{b'}$$

に達し、総平均成長曲線式は  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  において最大値

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi(\log e) 10^{2a' - (\log e)}}{2b'}$$

に達する。

#### IV 区分材積成長

各区分材積を HUBER 式によって計算すれば、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は面積成長の各曲線式に区間長  $L$  を掛けたものであり、したがって最大値も面積成長の場合の  $L$  倍としてあらわされ、最大値に達する年令は変らない。

#### V 単位年輪の容積密度数

単位年輪の容積密度数が重量成長におよぼす影響を考察するために、秋材率が一定の場合を

$$s = A$$

年輪巾の一次関数であらわされる場合を

$$s = A + BZ_r$$

であらわす。

1 個の春材および秋材から構成される単位年輪の容積密度数は

$$R_o = r_{fo} + s(r_{so} - r_{fo})$$

である。したがって秋材率が一定の場合、あるいは年輪巾の一次関数であらわされる場合

の単位年輪の容積密度数は

$$R_o = r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})$$

あるいは

$$R_o = r_{fo} + (A + B Z_r)(r_{so} - r_{fo})$$

であらわされる。

## VI 区分重量成長

区分重量成長の各曲線式は、区分材積の連年成長曲線式に単位年輪の容積密度数を掛けた連年成長曲線式、それをある年令あるいは年輪数まで積分した総成長曲線式、総成長曲線式を年令あるいは年輪数で割った総平均成長曲線式の順に求められる。

区分重量成長を幹足部およびそれ以外に分け、それぞれについて秋材率が一定の場合および年輪巾の一次関数であらわされる場合を検討し、つぎのことを明らかにした。

### 1) 幹足部の重量成長

秋材率が一定の場合、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L$$

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2} L$$

および

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L$$

であらわされる。

連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、それぞれ  $x = \frac{b}{(\log e)}$  および  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  であり材積成長の場合と一致する。したがってこれらは縮尺を適当にすることによって同一の曲線であらわされる。

秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L$$

$$+ B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^2} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L$$

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e)x^2} L + B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b^2 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e)x^2]^2} L$$

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L$$

$$+ B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^3} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L$$

であらわされる。

連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、区分材積成長の場合の

$x = \frac{b}{(\log e)}$  および  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  とは異なり、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならばそれぞれ材積

成長よりも早い  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  および  $x = \frac{1.322b}{(\log e)}$  よりも早くなることはなく、また逆に  $B(r_{so}-r_{fo}) < 0$  ならば材積成長よりも遅くなる。

## 2) 幹足部以外の区分重量成長

成長曲線式の独立変数によって分けて検討した。

### i) 年令を独立変数とする場合

秋材率が一定の場合には、総成長および連年成長の各曲線式は幹足部の成長曲線式と同形であらわされるが、総平均成長曲線式は総成長曲線式を年輪数で割った

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} L$$

であらわされ、 $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$  において最大値に達する。したがってこの場合には材積成長と一致する。

秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合にも、総成長および連年成長の各曲線式は幹足部と同形であらわされるが、総平均成長曲線式は

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27(\log e)x^2(x-m)} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L$$

であらわされる。

連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は材積成長の  $x = \frac{b}{(\log e)}$  および  $x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$  とは異なり、 $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$  ならば早く、また逆に  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$  ならば遅くなる。

### ii) 年輪数を独立変数とする場合

秋材率が一定の場合には、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]} L \\ Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b' 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L \\ DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(x-m)} L$$

であらわされ、連年成長および総平均成長の両曲線式は、材積成長の場合と同様にそれぞれ  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  および  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  において最大値に達する。したがって重量成長経過は材積成長のそれと一致する。

秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には、総成長、連年成長および総平均成長の各曲線式は

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 (x-m)^2 + 6b'(\log e)(x-m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x-m)^2} \right] 2\pi 10^{3[a'-b'(1/x-m)]} L$$

$$Z_w = [r_{f0} + A(r_{s0} - r_{f0})] \frac{2\pi b' 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(\log e)(x - m)^2} L + B(r_{s0} - r_{f0}) \frac{2\pi b'^2 10^{3[a' - b'(1/x - m)]}}{[(\log e)(x - m)^2]^2} L$$

および

$$DZ_w = [r_{f0} + A(r_{s0} - r_{f0})] \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x - m)} L \\ + B(r_{s0} - r_{f0}) \left[ \frac{2(\log e)^2(x - m)^2 + 6b'(\log e)(x - m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x - m)^3} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L$$

であらわされる。

連年成長および総平均成長の各曲線式が最大値に達する年令は、材積成長の  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  および  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  とは異なり、 $B(r_{s0} - r_{f0}) > 0$  ならば材積成長よりも早いそれぞれ  $x = m + \frac{3b'}{4(\log e)}$  および  $x = m + \frac{1.322 b'}{(\log e)}$  よりも早くなることはなく、また逆に  $B(r_{s0} - r_{f0}) < 0$  ならば遅くなる。

これを要するに秋材率が一定の場合には、区分重量の成長経過は幹足部の重量あるいはそれ以外の区分重量に関係なく、また年令あるいは年輪数のいずれを独立変数とするかを問わず、区分材積の成長経過と一致する。

秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には両者は一致せず、重量成長の最大値に達する年令と材積成長のそれらの年令との関係は、年輪巾に対応する秋材率の変化の仕方および春、秋材容積密度数の大小関係によってきまる。すなわち  $B(r_{s0} - r_{f0}) > 0$  ならば区分重量の連年成長および総平均成長が最大値に達する年令はそれぞれ区分材積成長よりも早く、また逆に  $B(r_{s0} - r_{f0}) < 0$  ならば遅くなることを理論的に究明した。

## VII 単木の重量成長

単木材積の連年成長あるいは総平均成長が最大値に達する年令を

$$x_v = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n}{V}$$

であらわすとき、単木の重量成長が最大値に達する年令  $x_w$  は、秋材率が一定の場合には

$$x_w = \frac{w_1(x_1 + 0) + w_2(x_2 + 0) + \cdots + w_n(x_n + 0)}{W}$$

であらわされる。これは各区分重量を重みとする各区分材積成長が最大値に達する年令の加重平均である。したがって単位年輪の容積密度数に断面高にもとづく変動がないならば、単木の重量成長が最大値に達する年令は材積成長と一致するが、変動がある場合には異なる。

秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には、単木の重量成長が最大値に達する年令は

$$x_w = \frac{w_1(x_1 + d_1) + w_2(x_2 + d_2) + \cdots + w_n(x_n + d_n)}{W}$$

であらわされる。したがって樹種によって春、秋材容積密度数の大小関係および年輪巾に対応する秋材率の変化の仕方がきまるならば、区分重量成長曲線式における  $B(r_{s0} - r_{f0})$  の積の符号がきまるので、上式における区分材積および重量の各成長が最大値に達する年

令の差  $d_1, d_2, \dots, d_n$  の符号もきまる。ゆえに単木の材積成長と重量成長の経過は一致しない。

### VIII 適用例

以上の理論的研究の結果を88年生のスギについて適用し、その妥当性が裏付けられた。

単木の材積あるいは重量は区分材積あるいは重量の総合されたものであり、これらを代表するものとして幹足部、胸高および望高の各円板に各項の理論を適用した結果を要約する。

1) 半径総成長曲線式は幹足部の円板では  $GZ_r = 10^{1.679-27.888(1/x)}$  であらわされる。一方幹足部以外の各円板についても、殆んどの円板が年令を独立変数とする場合に、年輪数が独立変数である場合よりも測定値に適合し、断面高 1.2m および 11.2m の各円板ではそれぞれ  $GZ_r = 10^{1.603-27.452(1/x)}$  および  $GZ_r = 10^{1.521-32.152(1/x)}$  であらわされる。

半径総平均成長曲線式が最大値に達する年令は、幹足部および胸高の各円板ではそれぞれ 64 年および 60 年であり、断面高 11.2m の円板には存在しない。

2) 区分材積の総成長曲線式は面積の総成長曲線式と区間長  $L$  の積である。したがって半径総成長曲線式にもとづく区分材積の総成長曲線式は、幹足部から順に  $GZ_v = \pi 10^{3.358-55.778(1/x)} \times 0.2$ ,  $GZ_v = \pi 10^{3.206-51.904(1/x)} \times 2.0$  および  $GZ_v = \pi 10^{3.043-61.304(1/x)} \times 2.0$  によってそれぞれあらわされる。

一方、上記の各区分材積について総成長の測定値から  $GZ_v = 10^{a''-b''(1/x)}$  の形で総成長曲線式を計算すれば、幹足部から順に  $GZ_v = 10^{3.162-56.195(1/x)}$ ,  $GZ_v = 10^{4.005-51.946(1/x)}$  および  $GZ_v = 10^{3.841-61.385(1/x)}$  となる。

半径総成長曲線式にもとづく区分材積の総成長曲線式を上記の形に変形すれば、幹足部から順にそれぞれ  $GZ_v = 10^{3.157-55.778(1/x)}$ ,  $GZ_v = 10^{4.004-51.904(1/x)}$  および  $GZ_v = 10^{3.849-61.303(1/x)}$  となって上記の各式と殆んど等しく、半径総成長曲線式にもとづく区分材積の総成長曲線式の適当であることが確かめられる。

各区分材積の連年成長曲線式が最大値に達する年令は、幹足部から順に 64 年、63 年および 74 年であり、総平均成長曲線式については 129 年、112 年および 118 年においてそれぞれの最大値に達するものと推定された。

3) 年輪巾と秋材率の関係では、年輪巾の広狭に対応して秋材率の減増する一次関数的な関係が認められ、幹足部の円板から順に  $s = 29.02 - 2.68 Z_r$ ,  $s = 31.81 - 5.85 Z_r$  および  $s = 42.46 - 8.22 Z_r$  であらわされた。また各円板の春、秋材容積密度数は秋材が春材よりも大きく、それぞれ辺、心材間に有意差があり心材において辺材よりも大きな値をしめした。

単位年輪の容積密度数と秋材率の関係では、辺、心材ともに単位年輪容積密度数は秋材率の増減にともなって増減する一次関数的な関係が認められた。

以上の結果を重量成長曲線式に代入して最大値に達する年令を材積成長と比較するとき、いずれも 1 年ないし 2 年程度の遅れがあることを明らかにした。

### IX 考 察

近年工業原料材の需要増大にともなって林木の量産が強く要求され、林種転換による人工林化、密植、施肥その他短期育成林業に関する技術的研究が急速に進みつつある。また

これと同時に林木の実質量についての関心が高まり、樹性、林令、立木密度、立地条件等の違いによって、林木の材積成長経過と重量成長経過の異なる事実が注目されるにいたった。

本研究は、樹幹各部における容積密度数が心材形成の有無、年輪巾の広狭、秋材率の変化等によって異なることにもとづき、材積成長経過と重量成長経過の関係を成長曲線式によって理論および実証の両面から究明することを試みたもので、上記の原料材生産技術に対する理論的基礎の一部を与えんとしたものである。すなわち、BRUCE, SCHUMACHERの総成長曲線式、これから誘導される連年成長および総平均成長の各曲線式を検討して半径、面積および材積の各成長に適用し、それぞれの成長について特徴を明らかにするとともに、単位年輪の容積密度数を媒介として重量成長経過を推定した。

これらの研究を通じて考察すれば、秋材率が一定で単位年輪の容積密度数に断面高による変化がない場合には単木の材積と重量の成長経過は一致するものであるが、容積密度数が断面高によって変化する場合には一致しない。これに対して秋材率が年輪巾の一次関数であらわされる場合には材積と重量の成長経過は明らかに一致しない。すなわち、1) 秋材率が年輪巾の広狭に対応して増減し、秋材容積密度数が春材のそれよりも大きい場合、ならびに秋材率が年輪巾の広狭に対応して減増し、春材容積密度数が秋材よりも大きい場合には、単木の重量成長が最大値に達する年令は材積成長よりも早い。しかし、2) 秋材率が年輪巾の広狭に対応して増減し、春材容積密度数が秋材よりも大きい場合、ならびに秋材率が年輪巾の広狭に対応して減増し、秋材容積密度数が春材よりも大きい場合には、重量成長が最大値に達する年令は材積成長よりも遅いことが本研究によって明らかにされた。したがってこれら両因子は、樹種別に単木の材積成長と重量成長の関係を推定するための指標と考えられよう。

このようにして単木における両成長の関係が明らかにされるならば、施肥あるいは本数密度の加減等の施業方法によって林木の年輪密度や秋材率の変化等に調節を加えることの可能性が考えられ、あるいはまた林分構成や直径級による標準容積密度数の変動等の研究と相まって、林分における材積成長と重量成長の関係を究明し、さらには材積収穫最多あるいは重量収穫最多の伐期令を検討することもできるであろう。

## 引 用 文 献

- 1) R. HARTIG: Untersuchungen aus Forstbotanischen Institut zu München. 2 (1882)
- 2) 加 納 孟: 木材材質の森林生物学的研究 第14報 林業試験場報告 101, (1957)
- 3) 平井 信二: 林木の重量生長に関する研究 第1報 東大演報 35, (1947)
- 4) 平井 信二: 同 上 第2報 東大演報 38, (1950)
- 5) 平井 信二: 同 上 第3報 東大演報 39, (1951)
- 6) 平井 信二: 同 上 第4報 東大演報 45, (1953)
- 7) 平井 信二: 同 上 第5報 東大演報 48, (1955)
- 8) 辻本 克己: リュウキュウマツの重量成長に関する研究 鹿大農学部学術報告 13, (1963)
- 9) GRAMM: Omkonstrktion of Normal Tilvaextoversigter. Tidskrift for Skovburg. III Bd. (1827)

- 10) R. WEBER: Lehrbuch der Forsteinrichtung mit besonderer Berücksichtigung der Zuwachs-gesetze der Waldbäume. (1891)
- 11) 寺崎 渡: 信州地方落葉松林の生長及収額の研究 林業試験報告 4, (1907)
- 12) 長岡文之進: 林分材積生長曲線方程式に就て 大日本山林会報 408, (1916)
- 13) 吉田 正男: 同齡單純林に於ける単木及林木の生長曲線に関する研究 東大演報 5, (1928)
- 14) BRUCE, SCHUMACHER: Forest Mensuration. (1950)
- 15) 嶺 一三: 測樹 (1953)
- 16) 井上 由扶・宮原 秀光: 粕屋演習林スギ林分收穫表の調製 九大演集 2, (1954)
- 17) R. A. FISHER: Statistical Methods for Research Workers. (1954)
- 18) YLINEN, A.: Über den Einfluss des Spätholzanteils und der Jahrringbreite auf die Rohwichte beim finischen Kiefernholz. Holz als Roh-und Werkstoff. 9, 12, (1951)

## Résumé

The present study aims at theoretical clarification and experimental proof of the relationship between the growths in sectional volume and sectional weight of stem and the relationship between the volume growth of individual trees. The summary is presented in the following in the order of development of the theory.

### I. Growth Formulas

BRUCE, SCHUMACHER's empirical formula of the total growth

$$\log GZ = a + b(1/x)$$

was adopted as the basic total growth formula for the present study, and it was first made clear by the study of the signs of the constants and factors that

$GZ$ : Total growth

$$GZ = 10^{a-b(1/x)}$$

$x$  : Age in years

satisfied the general characteristics of the total growth curve.

Since the current annual growth is generally expressed by the derived function of the first order of the total growth formula regarding  $x$ , the characteristics of

$$Z = \frac{b 10^{a-b(1/x)}}{(\log e) x^2}$$

$Z$ : Current annual growth

$$\log e = 0.43429448$$

obtained by differentiating the total growth formula, were checked by the use of the derived function of the second order of  $GZ$  regarding  $x$  and the limiting values, and it was proved that the formula satisfied the general characteristics of the current annual growth curve, and it reached the maximum

$$Z_{\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a-2(\log e)}}{b}$$

at  $x = \frac{2(\log e)}{b}$ , and also that the total growth curve had an inflection point at

$$x = \frac{b}{2(\log e)}$$

The total mean annual growth is generally expressed by the total growth divided by  $x$ , and the characteristics of the formula

$$DZ = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x}$$

$DZ$ : Total mean annual growth

was checked by the same method as above, and it was proved that the formula had the general characteristics of the total mean annual growth curve and reached the maximum

$$DZ_{\max.} = \frac{(\log e) 10^{a-(\log e)}}{b}$$

$$\text{at } x = \frac{b}{(\log e)}.$$

Comparison of the current annual growth formula and the total mean annual growth formula revealed that the latter reached the maximum at two

times the age at which the current annual growth reached the maximum value of the former was 1.47 times that of the latter. This agrees with the fact that the total mean annual growth changes more gradually than the current annual growth.

Thus it was theoretically proved that BRUCE, SCHUMACHER's empirical formula represented the total growth when  $b < 0$ , and the derived function of the first order of the formula regarding the age represented the current annual growth, and the formula divided by age the total mean annual growth.

## II. Growth in Radius

The results clarified in the foregoing section were applied to the growth in radius, and in consideration of the denominator of the total mean annual growth formula, the disk at the foot of stem and disks at the other parts of stem were treated separately.

The total growth, the current annual growth and the total mean annual growth in radius of the disk at the foot of stem are expressed by the following formulas respectively,

$$GZ_r = 10^{a-b(1/x)}$$

$$Z_r = \frac{b 10^{a-b(1/x)}}{(\log e) x^2}$$

and

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{x}$$

And the current annual growth reaches the maximum

$$Z_{r\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a-2(\log e)}}{b}$$

at  $x = \frac{b}{2(\log e)}$ , and the total mean annual growth reaches the maximum

$$DZ_{r\max.} = \frac{(\log e) 10^{a-(\log e)}}{b}$$

at  $x = \frac{b}{(\log e)}$ .

The growth in radius of disks at the other parts than the foot of stem is expressed in two ways by the selection of the independent variable in the growth formula, in which either the age or the number of annual rings is used to suit the case better.

When the age is adopted as the independent variable, the formulas for the total growth and the current annual growth are similar to those for the disk at the foot of stem. The total mean annual growth is expressed by the total growth divided by the number of annual rings

$$X = x - m$$

where  $m$  is the number of years required for the tree height to reach the height of the disk. Namely,

$$DZ_r = \frac{10^{a-b(1/x)}}{(x-m)}$$

and when  $b^2 - 4bm(\log e) \geq 0$ , it reaches the maximum at

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4bm(\log e)}}{2(\log e)}.$$

When  $b^2 - 4bm(\log e) < 0$ , however, the total mean annual growth never reaches the maximum. Thus, there are cases, depending on the height of disks, where the total mean annual growth in radius never attains the maximum.

When the number of annual rings are adopted as the independent variable, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed by the following formulas respectively,

$$GZ_r = 10^{a' - b'(1/x - m)}$$

$$Z_r = \frac{b' 10^{a' - b'(1/x - m)}}{(\log e)(x - m)^2}$$

and

$$DZ_r = \frac{10^{a' - b'(1/x - m)}}{(x - m)}.$$

And the current annual growth reaches the maximum

$$Z_{r\max.} = \frac{4(\log e) 10^{a' - 2(\log e)}}{b'}$$

at  $x = m + \frac{b'}{2(\log e)}$ , and the total mean annual growth reaches the maximum

$$DZ_{r\max.} = \frac{(\log e) 10^{a' - (\log e)}}{b'}$$

at  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$ .

Thus, the growths in radius of disks at the other parts than the foot of stem, when the number of annual rings is used as the independent variable, can be expressed by similar formulas to those for the growths in radius of the disk at the foot of stem, by inserting the number of annual rings as the independent variable in the latter formulas.

### III. Growth in Basal Area

The growth in basal area of the disk at the foot of stem and that at the other parts were treated separately from similar considerations to those in the case of the growth in radius.

From the formula for the total growth in radius, the total growth in basal area of the disk at the foot of stem is expressed by  $GZ_f = \pi 10^{2[a - b(1/x)]}$ .

The derived function of the first order of this formula regarding  $x$

$$Z_f = \frac{2\pi b 10^{2[a - b(1/x)]}}{(\log e) x^3}$$

has the general characteristics of the current annual growth curve, and reaches the maximum

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a - (\log e)]}}{b}$$

at  $x = \frac{b}{(\log e)}$ .

And the total growth divided by  $x$

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x}$$

has the general characteristics of the total mean annual growth curve, and reaches the maximum

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi(\log e) 10^{2a-(\log e)}}{2b}$$

$$\text{at } x = \frac{2b}{(\log e)}.$$

When the current annual growth are compared, the former reaches the maximum at half the age of the latter reaching the maximum, and the maximum value of the former is 1.47 times that of the latter. These relationships are the same as those of the growths in radius.

And the current annual growth and the total mean annual growth in basal area reach their maximums at twice the ages at which the growths in radius reach their maximums.

The growths in basal area of disks at the other parts than the foot of stem were treated separately according as the independent variable was the number of annual rings.

When the age is taken as the independent variable, the total growth and the current annual growth are expressed by similar formulas to those for the disk at the foot of stem, and the total mean annual growth is given by the total growth divided by the number of annual rings, or

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{(x-m)}$$

This formula has the general characteristics of the total mean annual growth curve and reaches the maximum at

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

if  $b^2 - 2bm(\log e) \leq 0$ .

In case the number of annual rings is taken as the independent variable, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed by the following formulas respectively,

$$GZ_f = \pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}$$

$$Z_f = \frac{2\pi b' 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2}$$

and

$$DZ_f = \frac{\pi 10^{2[a'-b'(1/x-m)]}}{(x-m)}$$

In this case, the current annual growth reaches the maximum

$$Z_{f\max.} = \frac{2\pi(\log e) 10^{2[a'-(\log e)]}}{b'}$$

at  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$ , and the total mean annual growth reaches the maximum

$$DZ_{f\max.} = \frac{\pi (\log e) 10^{2a' - (\log e)}}{2b'}$$

$$\text{at } x = m + \frac{2b'}{(\log e)}.$$

#### IV. Growth in Sectional Volume

When the sectional volume is computed by HUBER's formula, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed by the respective growth formulas in basal area multiplied by the length of section  $L$ , and consequently, the maximum values are those of the basal area multiplied by  $L$  and occur at the same ages as those of the basal area.

#### V. Bulk Density of Annual Ring

For the consideration of the influence of the bulk density of annual ring on the weight growth, the constant summer-wood percentage is expressed by

$$s = A \quad s: \text{Summer-wood percentage}$$

and the summer-wood percentage expressed by a linear function of the width of annual ring is expressed by

$$s = A + BZ_r \quad Z_r: \text{Current annual growth in radius}$$

The bulk density of an annual ring composed of a spring-wood and a summer-wood is

$$R_o = r_{fo} + s(r_{so} - r_{fo}). \quad R_o: \text{Bulk density of Unit annual ring}$$

Consequently, the bulk density of annual ring for the above two cases are expressed by

$$R_o = r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})$$

and

$$R_o = r_{fo} + (A + BZ_r)(r_{so} - r_{fo}).$$

#### VI. Growth in Sectional Weight

The formulas for the growths in sectional weight are obtained in the order of the current annual growth formula obtained by the current annual growth in sectional volume multiplied by the bulk density of the unit annual ring, the total growth formula obtained by integrating the current annual growth up to the age or the number of annual rings, and the total mean annual growth formula obtained by dividing the total growth by the age or the number of annual rings.

The growth in sectional weight at the foot of stem and at the other parts were treated separately for the case of constant summer-wood percentage and for the case of summer-wood percentage being a linear function of the width of annual ring, respectively, and the following results were obtained.

##### 1) Growth in Weight at the Foot of Stem

When the summer-wood percentage is constant, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed respectively by

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L$$

$$Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e) x^2} L$$

and

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L.$$

The ages at which the current annual growth and the total mean annual growth reach their maximums are, respectively

$$x = \frac{b}{(\log e)}$$

and

$$x = \frac{2b}{(\log e)}$$

and they agree with those for the volume growths. Therefore, they can be expressed by the same curves by adopting suitable scales.

When the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed by

$$\begin{aligned} GZ_w &= [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[a-b(1/x)]} L \\ &\quad + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e) x + 9b^2}{27b(\log e) x^2} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L \\ Z_w &= [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b 10^{2[a-b(1/x)]}}{(\log e) x^2} L + B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b^3 10^{3[a-b(1/x)]}}{[(\log e) x^2]^2} L \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} DR_w &= [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a-b(1/x)]}}{x} L \\ &\quad + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e) x + 9b^2}{27b(\log e) x^3} \right] 2\pi 10^{3[a-b(1/x)]} L. \end{aligned}$$

The ages at which the current annual growth and the total mean annual growth reach their maximums are different from  $x = \frac{b}{(\log e)}$  and  $x = \frac{2b}{(\log e)}$  for the growths in sectional volume, and are smaller than those ages if  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$ , but never smaller than  $x = \frac{3b}{4(\log e)}$  and  $x = \frac{1.322 b}{(\log e)}$  respectively, and if  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$ , the ages are larger than those for the growths in sectional volume.

## 2) Growth in Sectional Weight at Other Parts than the Foot of Stem

The growths in sectional weight at other parts than the foot of stem were treated separately by the independent variables in the growth formula.

### i) When the age is taken as the independent variable

When the summer-wood percentage is constant, the total growth and the current annual growth formulas are of the same form as the growth formulas for the foot of stem, and the total mean annual growth is expressed by the total growth divided by the number of annual rings, namely

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[\alpha - b(1/x)]}}{(x-m)} L$$

and reaches the maximum at

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

agreeing with the growth in volume.

When the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, also, the total growth and the current annual growth are expressed by the formulas of the same form as those for the foot of stem, and the total mean annual growth is expressed by

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[\alpha - b(1/x)]}}{(x-m)} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 x^2 + 6b(\log e)x + 9b^2}{27b(\log e)x^2(x-m)} \right] 2\pi 10^{3[\alpha - b(1/x)]} L.$$

The ages at which the current annual growth and the total mean annual growth reach their maximums are different from  $x = \frac{b}{(\log e)}$  and

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 2bm(\log e)}}{(\log e)}$$

for the the growths in volume, and are smaller than those if  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$ , and larger if  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$ .

ii) When the number of annual rings are taken as the independent variable

When the summer-wood percentage is constant, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed respectively by

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[\alpha' - b'(1/x-m)]} L \\ Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b' 10^{2[\alpha' - b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L$$

and

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[\alpha' - b'(1/x-m)]}}{(x-m)} L.$$

And the current annual growth and the total mean annual growth reach their maximums at  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  and  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  respectively as in the case of growths in volume. Therefore, the progress of the weight growths agrees with that of the volume growths.

When the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, the total growth, the current annual growth and the total mean annual growth are expressed respectively by

$$GZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \pi 10^{2[\alpha' - b'(1/x-m)]} L \\ + B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 (x-m)^2 + 6b'(\log e)(x-m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x-m)^2} \right] 2\pi 10^{3[\alpha' - b'(1/x-m)]} L \\ Z_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{2\pi b' 10^{2[\alpha' - b'(1/x-m)]}}{(\log e)(x-m)^2} L$$

$$+ B(r_{so} - r_{fo}) \frac{2\pi b'^2 10^{3[a' - b'(1/x - m)]}}{[(\log e)(x - m)^2]^2} L$$

and

$$DZ_w = [r_{fo} + A(r_{so} - r_{fo})] \frac{\pi 10^{2[a' - b'(1/x - m)]}}{(x - m)} L$$

$$+ B(r_{so} - r_{fo}) \left[ \frac{2(\log e)^2 (x - m)^2 + 6b'(\log e)(x - m) + 9b'^2}{27b'(\log e)(x - m)^3} \right] 2\pi 10^{3[a' - b'(1/x - m)]} L.$$

The ages at which the current annual growth and the total mean annual growth reach their maximums are different from  $x = m + \frac{b'}{(\log e)}$  and  $x = m + \frac{2b'}{(\log e)}$  for the volume growths, and are smaller than those for the volume growths if  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$ , but are never smaller than  $x = m + \frac{3b'}{4(\log e)}$  and  $x = m + \frac{1.322b'}{(\log e)}$  respectively, and are larger if  $B(r_{so} - r_{fo}) < 0$ .

To sum up, in case the summer-wood percentage is constant, the progress of growths in sectional weight agrees with the progress of growths in sectional volume, irrespective of the weight of the foot part of stem or the sectional weight at the other parts than the foot of stem, and irrespective of whether the age or the number of annual rings is taken as the independent variable.

In case the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, both progresses do not agree, and the relationship between the ages at which the weight growths reach their maximums and the ages at which the volume growths reach their maximums is determined by the mode of change of the summer-wood percentage according to the width of annual ring and the bulk densities of the spring-wood and the summer-wood. Namely, it was theoretically clarified that if  $B(r_{so} - r_{fo}) > 0$ , the ages at which the current annual growth and the total mean annual growth in sectional weight reach their maximums are smaller than those for the growths in sectional volume, and vice versa.

## VII. Growth in Weight of Stem

When the age at which the current annual growth or the total mean annual growth in volume of stem reaches the maximum is expressed by

$$x_v = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n}{V},$$

$v_1, v_2 \dots v_n$ : Sectional volume

$x_1, x_2 \dots x_n$ : Age at which sectional volume reaches maximum

$V$ : Volume of stem

$x_v$ : Age at which volume reaches maximum

the age  $x_w$  at which the growth in weight of stem reaches the maximum is expressed by

$$x_w = \frac{w_1(x_1+0) + w_2(x_2+0) + \dots + w_n(x_n+0)}{W}$$

$w_1, w_2 \dots w_n$ : Sectional weight

$W$ : Weight of stem

in the case where the summer-wood percentage is constant. This is the weighted mean of the ages at which the sectional volumes reach their maximums, weighted with their respective sectional weights. Therefore, if there is no variation in the bulk density of unit annual ring by the height of the cross-section, the age at which the weight growth of stem reaches the maximum agrees with that for the volume growth, but if there is any variation, it does not.

In case the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, the age at which the growth in weight of stem reaches the maximum is expressed by

$$x_w = \frac{w_1(x_1+d_1) + w_2(x_2+d_2) + \dots + w_n(x_n+d_n)}{W}$$

$d_1, d_2 \dots d_n$ : Difference between ages at which sectional volume and sectional weight reach their maximums

Consequently, if the bulk densities of the spring-wood and the summer-wood, and the mode of change of the summer-wood percentage with respect to the width of annual ring, are determined by the species of trees, the sign of the product  $B(r_{so} - r_{fo})$  in the sectional weight growth formula is determined, and then the signs of  $d_1, d_2 \dots d_n$ , the differences between the ages at which the sectional volume and the sectional weight reach their maximums are determined. Therefore, the progress of volume growth does not agree with the progress of weight growth.

### VIII. Applications

The results of the theoretical studies described in the foregoing were applied to 88-year-old SUGI trees and their validity was confirmed.

The volume or the weight of stem is the summation of the sectional volume or the sectional weight, and the results of application of the theory to the disks at the foot of stem, at the breast height and at 11.2 m above the ground are summarized in the following.

1) The total growth in radius for the disk at the foot of stem is expressed by

$$GZ_r = 10^{1.679 - 27.888(1/x)}$$

On the other hand, with the disks at the other parts than at the foot of stem, the formulas with the age as the independent variable agreed in most cases better with the measurements than the ones with the number of annual rings as the independent variable. The total growths in radius of disks at 1.2 m and 11.2 m above the ground are expressed respectively by

$$GZ_r = 10^{1.603 - 27.452(1/x)}$$

and

$$GZ_r = 10^{1.521 - 32.152(1/x)}$$

The ages at which the total mean annual growth in radius reach the maximum are 64 and 60 years for the disks at the foot of stem and at the breast height, and the maximum is not reached with the disk at 11.2 m above the ground.

2) The formula of the total growth in sectional volume is the product of the formula of the total growth in basal area and the length of section  $L$ . Therefore, the total growths in sectional volume based on the formula of the total growth in radius are expressed in the order from the foot of stem up by

$$GZ_v = \pi 10^{3.353 - 55.776(1/x)} \times 0.2$$

$$GZ_v = \pi 10^{3.236 - 51.934(1/x)} \times 2.0$$

and

$$GZ_v = \pi 10^{3.942 - 64.302(1/x)} \times 2.0.$$

On the other hand, the total growth formulas in the form of  $GZ_v = 10^{a'' - b''(1/x)}$  are calculated from the measurements as follows.

$$GZ_v = 10^{3.162 - 56.195(1/x)}$$

$$GZ_v = 10^{4.005 - 51.946(1/x)}$$

and

$$GZ_v = 10^{3.841 - 64.385(1/x)}$$

And the formulas of the total growths in sectional volume based on the total growth formulas in radius are transformed respectively into

$$GZ_v = 10^{3.157 - 55.778(1/x)}$$

$$GZ_v = 10^{4.004 - 51.904(1/x)}$$

and

$$GZ_v = 10^{3.849 - 64.303(1/x)}.$$

The above two sets of formulas are almost equal, attesting the compatibility of the formulas of the total growths in sectional volume based on the formulas of total growths in radius.

The ages at which the current annual growths in sectional volume reach the maximums are 64, 63 and 74 years in the order from the foot of stem up, and it is estimated that the total mean annual growths will reach their maximums at the ages of 129, 112 and 118 years, respectively.

3) As regards the relationship between the width of annual ring and the summer-wood percentage, it was observed that there existed a linear relation between them and the following formulas were obtained in the order from the foot of stem up.

$$s = 29.02 - 2.68 Z_r$$

$$s = 31.81 - 5.85 Z_r$$

and

$$s = 42.46 - 8.22 Z_r.$$

And the bulk density of the summer-wood was larger than that of the spring-wood in each disk, and there was a highly significant difference between the heart-wood and the sap-wood, the bulk density of the former being larger than that of the latter.

As regards the relationship between the bulk density of the unit annual ring and the summer-wood percentage, there existed a linear relation between them, both with the sap-wood and the heart-wood.

The above results were inserted in the formulas of weight growths and the ages at which the maximums were reached were compared with those of the volume growths, and it was made clear that there were time lags of one to two years.

The study clarifies that when the summer-wood percentage is constant and the bulk density of the unit annual ring is not affected by the height, the progresses of growth in volume and weight of stem agree with each other, but they do not agree if the bulk density changes by height. On the other hand, when the summer-wood percentage is expressed by a linear function of the width of annual ring, the volume and the weight of stem do not agree in the progress of growth. Namely, 1) when the summer-wood percentage changes with the width of annual ring and the bulk density of the summer-wood is larger than that of the spring-wood, and when the summer-wood percentage changes inversely with the change of the width of annual ring and the bulk density of the spring-wood is larger than that of the summer-wood, the weight growth of stem reaches the maximum earlier than the volume growth, but 2) when the summer-wood percentage changes with the width of annual ring and the bulk density of the spring-wood is larger than that of the summer-wood, and when the summer-wood percentage changes inversely with the width of annual ring and the bulk density of the summer-wood is larger than that of the spring-wood, the weight growth reaches the maximum later than the volume growth. Thus, these two factors may be considered as indexes for estimating the relation between the volume growth and the weight growth of stem of different species.

If the relationship between the volume growth and the weight growth of stem is thus made clear, it may become possible to make adjustments of the density of annual rings and the summer-wood percentage by the working method such as fertilization and adjustment of stand density. And together with the studies of the stand composition, the changes of the standard bulk density by diameter class, etc., the present study will make clear the relationship between the volume growth and the weight growth of a stand and further make it possible to determine the felling ages for the maximum volume yields or the maximum weight yields.