

生長錐による過去直径及び過去断面積推定の誤差について

高田, 和彦
九州大学農学部

<https://doi.org/10.15017/15798>

出版情報：演習林集報. 5, pp.1-12, 1955-10-30. Kyushu University Forests
バージョン：
権利関係：



成長錐による過去直径及び過去断面積 推定の誤差について

高 田 和 彦

Kazuhiko TAKATA: On the Error in the Estimates
of the Past-Diameter and -Basal Area
by the Increment Borer

目 次

I 緒 論	B 過去断面積の推定
II 資 料	a 単木について
III 理論及び結果	b 林分について
A 過去直径の推定	IV 考 察
a 単木について	V 参 考 文 献
b 林木について	Résumé

I 緒 論

立木の過去直径又は過去断面積を推定するには、輪尺により現在直径を測定し、次に成長錐により一定年数の直径成長量を測定し、前者から後者を減じたものを過去直径とし、過去直径の自乗に $\pi/4$ を乗じたものを過去断面積としている。但しこの場合において立木の直径とは立木の断面積と等面積を有する円の直径であると仮定する。従つて我々が輪尺で現在直径を測定するのはその断面積と等面積を有する円の直径を測定するのであり、その測定方法としては従来種々の方法が用いられているが、筆者の研究結果によると⁽¹⁾ 任意方向の直径を測定することが最も妥当であるとの結果を得たので、ここでは任意方向の直径測定値をもつてその樹木の直径とする。また成長錐により成長量を推定する場合にも筆者の研究結果によると、⁽²⁾ やはり任意方向に成長錐を挿入した場合の成長量をもつてその樹木の直径成長量とするのが最も妥当であるとの結果を得たのでこれもまた任意方向に挿入した時の成長錐の読みを成長量とする。従つて上述の方法により過去直径又は過去断面積を推定する時は任意方向で測定するための誤差、及び立木の断面型が円でないための誤差を生ずる。前者は抽出変動に当り、後者は偏倚に相当するものと認めることが出来る。故にこの両者について、単木についてと、林分より幾本か抽出してその抽出木により全林分についての平均過去直径又は平均過去断面積を推定する場合の4つの場合にわけて論ずることとする。但し成長錐の挿入方向において髓心に向う互に相対する2点からの挿入の読みの和をもつて成長錐の読みとする。

II 資 料

資料は 1954 年 1 月 26 日～28 日の間、宮崎県南那珂郡 福島営林署管内、福島経営区大矢取国有林 23 林班 3 小班スギ 40 年生林分で組織的に 20 本抽出した抽出木を胸高断面で玉切り写真機 (Canon III A, Serener 1:1.8, $f=50$ mm) で撮影し (minicopy film 使用, 絞り $f:11$, $t=1/2$, reflector flood lamp 100 V-300 W 2 個照明), $1/2$ の縮尺で引伸した写真を用いた (但し 1 本は玉切りの際破損したので用いなかつた). 尙お過去は 5 年前とした. 従つて以後の計算に用いた数値は皆実際の数値の $1/2$ である.

また輪尺による直径測定値の分布型の検討のためには上記の資料の外に 1952 年 7 月 25 日, 宮崎県北諸県郡西嶽村霧島国有林 26 林班 (宮崎営林署管内) スギ 42 年生人工林において東西, 南北方向に各々 40 m 間隔の格子状測点を入れ, 各測点より一番近い樹木を抽出し (この抽出法は厳密には等確率ではないが), 抽出木を伐倒, 胸高にて玉切り断面を現地で西洋紙に写しとつた資料を用いた.

III 理論及び結果

A 過去直径の推定

a 単木について

今, 任意方向に輪尺をあてて測定した直径測定値を y_i , この樹木の真の直径 (上述の意味での) を η , 任意方向に輪尺をあてるために起る誤差を e_{yi} , その偏倚を g_y とすると,

$$y_i = \eta + g_y + e_{yi} \quad (1)$$

となる. また任意方向に成長錐を挿入して推定した成長量測定値を x_i , この樹木の真の成長量を ξ , 任意方向に成長錐を挿入するために起る誤差を e_{xi} , その偏倚を g_x とすると

$$x_i = \xi + g_x + e_{xi} \quad (2)$$

となる (但し (2) 式は互に相対する 2 方向の成長量測定値の和を表わす). 故に過去直径 $D_{i \text{ past}}$ は (1) から (2) を減ずることにより

$$D_{i \text{ past}} = y_i - x_i = (\eta + g_y + e_{yi}) - (\xi + g_x + e_{xi}) \quad (3)$$

となる. ここで e_{yi} 及び e_{xi} の分布型を検討してみるために霧島及び福島大矢取の資料について吟味すると第 1 表の如くなる.

第 1 表より明らかな様に e_{yi} の分布は福島大矢取国有林の資料では 19 の中 7 つは 5% 以下の危険率で, その中 4 は 1% の危険率で一様分布とは認められないが, 他の 12 は一様分布と認められる. また霧島国有林の資料については 35 の中 18 は 5% 以下の危険率で, その中 13 は 1% の危険率で一様分布とは認められないが, 他の 17 は一様分布と認められる. この一様分布と認められない 18 の中 10 は 5% 以下の危険率で, その中 7 は 1% の危険率で正規分布とは認められないが, 他の 8 は正規分布と認められる. 以上の結果 e_{yi} の分布は大半は一様分布であり, それ以外のものの大半は正規分布に近いが他のものは不規則な分布をしているものと考えられる.

第 1 表

e_{yi} の 分 布						e_{xi} の 分 布	
一 様 性 検 討				正 規 性 検 討		正 規 性 検 討	
大 矢 取		霧 島		霧 島		大 矢 取	
円盤番号	χ^2	円盤番号	χ^2	円盤番号	χ^2	円盤番号	χ^2
A 12	2.26	406	9.51*	406	5.37	A 12	5.80
A 21	1.85	310	2.14	310	—	A 21	2.27
A 23	2.14	201	3.78	201	—	A 23	1.93
A 25	22.34**	202	21.50**	202	1.68	A 25	1.21
A 32	13.89**	203	7.80	203	—	A 32	14.60**
A 34	10.62**	511	2.10	511	—	A 34	2.34
A 41	6.32	312	10.99*	312	7.82**	A 41	4.22
A 43	10.35*	311	7.00	311	—	A 43	2.44
A 45	11.64*	306	8.68	306	—	A 45	6.03*
A 54	2.18	305	22.25**	305	21.96**	A 54	3.87
B 12	2.55	303	7.26	303	—	B 12	7.22
B 21	5.70	107	4.35	107	—	B 21	4.57
B 23	1.47	708	14.96**	708	20.07**	B 23	2.10
B 32	9.21*	309	3.99	309	—	B 32	4.05
B 34	4.88	512	6.56	512	—	B 34	2.31
B 41	3.60	510	18.41**	510	5.68	B 41	2.83
B 43	7.38	509	16.76**	509	12.75**	B 43	11.11**
B 45	4.24	508	11.61**	508	31.80**	B 45	0.44
B 54	16.32**	507	9.81**	507	3.41	B 54	2.06
		206	7.00	206	—		
		205	11.41**	205	6.92*		
		204	8.00*	204	0.07		
		304	12.55*	304	6.06		
		302	0.23	302	—		
		402	14.03**	402	2.41		
		403	1.12	403	—		
		404	9.61*	404	4.39*		
		413	7.00	413	—		
		405	4.05	405	—		
		412	2.73	412	—		
		411	20.71**	411	5.99*		
		410	19.22**	410	16.05**		
		409	13.53**	409	5.26		
		408	7.45	408	—		
		407	15.80**	407	17.95**		

そこで本稿においては e_{yi} の分布は一応一様分布とみなした。次に e_{xi} の分布は 19 の中 3 つは 5 % 以下の危険率で、その中 2 は 1 % の危険率で正規分布と認められないが他の 16 は正規分布とみなされるので本稿では一応正規分布とみなした。以上の仮定のもとで

$$E(e_{yi}) = 0$$

$$E(e_{xi}) = 0$$

となる。故に過去直径の期待値は

$$E(D_{i \text{ past}}) = (\eta + g_y) - (\xi + g_x) \quad (4)$$

となる。又 (3) 式の分散は η , ξ , g_y 及び g_x は単木については変化しない故に

$$V(D_{i \text{ past}}) = V(e_{yi}) + V(e_{xi}) - 2 \text{Cov}(e_{yi} e_{xi}) \quad (5)$$

となる。従つて (3) 式の標準偏差 $D(D_{i \text{ past}})$ は

$$D(D_{i \text{ past}}) = [V(e_{yi}) + V(e_{xi}) - 2 \text{Cov}(e_{yi} e_{xi})]^{1/2} \quad (6)$$

となる。(5) 式から明らかな様に、 e_{yi} と e_{xi} の相関関係が高い程精度がよくなるので、この観点から前述の如く輪尺での測定方向と成長錐の挿入方向とを一致させたわけである。輪尺での測定方向が任意方向である限り、これと同一方向に成長錐を挿入しても成長錐

の挿入方向の任意性は失はれないであろう。 e_{yi} と e_{xi} との相関係数を求めてみると第2表の如く19の中12は5%以下の危険率で、その中9は1%の危険率で正の相関があることが認められるが、他の7は相関関係があるとは認められない。しかし一般に云つて e_{yi} と e_{xi} との間には相関関係があると思はれるので (5) 式の右辺の最後の項を計算から除くことは分散の過大推定になるであろう。

第 2 表

円盤番号	相関係数	円盤番号	相関係数
A 12	0.1519	B 12	0.4258*
A 21	0.5389**	B 21	0.5094**
A 23	0.6175**	B 23	0.3661*
A 25	0.5288**	B 32	-0.2611
A 32	0.7365**	B 34	0.3413*
A 34	-0.1412	B 41	0.2313
A 41	0.6519**	B 43	0.7232**
A 43	0.5095**	B 45	-0.0016
A 45	0.2850	B 54	-0.1520
A 54	0.8227**		

$V(e_{yi})$ は e_{yi} が一様分布をしている故、その樹木の最大直径と最小直径との差を R_y とすると

$$V(e_{yi}) = \frac{R_y^2}{12} \quad (7)$$

となる。又 $V(e_{xi})$ は e_{xi} が正規分布をしている故 e_{xi} の範囲が 0 を中心として 3σ の中にすべて入ると仮定し e_{xi} の最大値と最小値との差を R_x とすると

$$V(e_{xi}) = \frac{R_x^2}{36} \quad (8)$$

となる。(7) 式より $V(e_{yi})$ は立木の最大直径と最小直径を測定することにより簡単に推定出来るが $V(e_{xi})$ は (8) 式の如く最大値と最小値とを知らねば推定出来ない。しかし第2表の如く e_{yi} と e_{xi} との間には正の相関関係が認められるので最大直径方向と最小直径方向の成長量をそれぞれ e_{xi} の最大値及び最小値とみなすと概略の $V(e_{xi})$ は求めることが出来る。

資料について $V(D_{i \text{ past}})$, $D(D_{i \text{ past}})$, $E(D_{i \text{ past}})$, $D_{i \text{ past}}$ の偏倚, 誤差率, すなわち $\frac{D(D_{i \text{ past}})}{E(D_{i \text{ past}})}$, 及び $\frac{\text{bias}}{D(D_{i \text{ past}})}$ を求めると第3表の如くなる。

第3表より明らかな様に $D(D_{i \text{ past}})$ は最小 0.16 cm から最大 0.45 cm の間に分布し、平均は 0.29 cm である。 $D(D_{i \text{ past}})$ と $E(D_{i \text{ past}})$ との間の相関係数を求めてみると $r = 0.3373$ となり、この相関係数の有意差検訂を行うと $t = 1.48 < 2.11$ となり、5% の危険率で相関関係があるとは認められない。即ち $D(D_{i \text{ past}})$ と $E(D_{i \text{ past}})$ とは互に独立に分布

第 3 表

円盤番号	$V(D_{i \text{ past}})$	$D(D_{i \text{ past}})$	$E(D_{i \text{ past}})$	bias	誤差率	$\frac{\text{bias}}{D(D_{i \text{ past}})}$
A 12	0.1061	0.33	14.12	0.16	2.31 %	0.49
A 21	0.1464	0.38	12.18	0.30	3.14	0.78
A 23	0.2030	0.45	15.70	0.36	2.87	0.80
A 25	0.0599	0.24	13.46	0.48	1.82	1.96
A 32	0.0678	0.26	12.84	0.44	2.03	1.69
A 34	0.0454	0.21	13.82	0.12	1.54	0.56
A 41	0.0455	0.21	14.82	0.12	1.44	0.56
A 43	0.1636	0.40	12.32	0.14	3.28	0.34
A 45	0.1152	0.34	12.44	0.12	2.73	0.35
A 54	0.1433	0.38	11.64	0.30	3.25	0.79
B 12	0.2068	0.45	12.06	0.22	3.77	0.48
B 21	0.0511	0.23	13.16	-0.02	1.72	0.09
B 23	0.1341	0.37	14.50	0.26	2.53	0.70
B 32	0.0398	0.20	11.22	0.02	1.78	0.10
B 34	0.0417	0.20	10.72	0.02	1.90	0.10
B 41	0.0642	0.25	10.02	-0.10	2.53	0.40
B 43	0.0248	0.16	9.74	-0.06	1.62	0.38
B 45	0.0419	0.20	8.40	0.02	2.44	0.10
B 54	0.1010	0.32	11.96	0.06	2.66	0.19

する故、 $D(D_{i \text{ past}})$ の値は $E(D_{i \text{ past}})$ の如何にかかわらず平均して略々 0.3 cm 位と考えられる。誤差率は最小 1.44 %, 最大 3.77 %, 平均 2.39 % である。他方偏倚は絶対値で最小 0.02 cm, 最大 0.48 cm, 平均 0.18 cm であり、 $\frac{\text{bias}}{D(D_{i \text{ past}})}$ は最小 0.09, 最大 1.96, 平均 0.57 である。

b 林分について

以上の論議は単木についての過去直径推定の誤差に関してであつたが、林分についての過去直径推定の方がむしろ実際には重要な問題となるであろう。標本調査の立場から林分の過去直径を推定するには、林分より i なる樹木 ($i=1 \sim N$) を抽出し、その樹木について α なる測定 ($\alpha=1 \sim n$) をなして i なる樹木の過去直径を推定し、それに基づいて林分の平均過去直径を推定することになる。そこで i なる樹木の α なる直径測定値 $y_{i\alpha}$ は

$$y_{i\alpha} = \eta_i + g_{yi} + e_{yi\alpha} \quad (9)$$

となる。ここで η_i は i なる樹木の真の直径、 g_{yi} は i なる樹木の任意方向の直径を輪尺で測定することによる偏倚、 $e_{yi\alpha}$ は i なる樹木での任意方向の直径を測定することによる誤差である。又 i なる樹木の α なる成長量測定値 $x_{i\alpha}$ は

$$x_{i\alpha} = \xi_i + g_{xi} + e_{xi\alpha} \quad (10)$$

となる。ここで ξ_i は i なる樹木の成長量、 g_{xi} は i なる樹木の任意方向に成長錐を挿入することによる誤差である。故に i なる樹木の過去直径 $D_{i\alpha \text{ past}}$ は (9) から (10) を減ずることにより

$$\begin{aligned}
D_{i\alpha \text{ past}} &= y_{i\alpha} - x_{i\alpha} \\
&= (\eta_i + g_{yi} + e_{yi\alpha}) - (\xi_i + g_{xi} + e_{xi\alpha})
\end{aligned} \tag{11}$$

となる. ここで前述のように $E_i(e_{yi\alpha}) = 0$, $E_i(e_{xi\alpha}) = 0$ であるゆえ, $E_i E_i(e_{yi\alpha}) = 0$, $E_i E_i(e_{xi\alpha}) = 0$ である. E_i は第 i 番目の樹木のすべての測定値の平均を表し, E はすべての樹木についての平均を表わす.

故に林分の平均過去直径の期待値は

$$E(D_{i\alpha \text{ past}}) = \frac{1}{N} [\bar{S}(\eta_i) + \bar{S}(g_{yi}) - \bar{S}(\xi_i) - \bar{S}(g_{xi})] \tag{12}$$

となる. (11) 式の分散は

$$\begin{aligned}
V(D_{i\alpha \text{ past}}) &= V(\eta_i) + V(g_{yi}) + V(e_{yi\alpha}) + V(\xi_i) + V(g_{xi}) + V(e_{xi\alpha}) \\
&+ 2 \text{Cov}(\eta_i g_{yi}) + 2 \text{Cov}(\eta_i e_{yi\alpha}) - 2 \text{Cov}(\eta_i \xi_i) - 2 \text{Cov}(\eta_i g_{xi}) \\
&- 2 \text{Cov}(\eta_i e_{xi\alpha}) + 2 \text{Cov}(g_{yi} e_{yi\alpha}) - 2 \text{Cov}(g_{yi} \xi_i) - 2 \text{Cov}(g_{yi} g_{xi}) \\
&- 2 \text{Cov}(g_{yi} e_{xi\alpha}) - 2 \text{Cov}(e_{yi\alpha} \xi_i) - 2 \text{Cov}(e_{yi\alpha} g_{xi}) - 2 \text{Cov}(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha}) \\
&+ 2 \text{Cov}(\xi_i g_{xi}) + 2 \text{Cov}(\xi_i e_{xi\alpha}) + 2 \text{Cov}(g_{xi} e_{xi\alpha})
\end{aligned} \tag{13}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\eta_i e_{yi\alpha}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{yi\alpha} (\eta_i - \bar{\eta})\} \\
\text{Cov}(g_{yi} e_{yi\alpha}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{yi\alpha} (g_{yi} - \bar{g}_y)\} \\
\text{Cov}(g_{yi} e_{xi\alpha}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{xi\alpha} (g_{yi} - \bar{g}_y)\} \\
\text{Cov}(e_{yi\alpha} \xi_i) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{yi\alpha} (\xi_i - \bar{\xi})\} \\
\text{Cov}(e_{yi\alpha} g_{xi}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{yi\alpha} (g_{xi} - \bar{g}_x)\} \\
\text{Cov}(e_{xi\alpha} \xi_i) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{xi\alpha} (\xi_i - \bar{\xi})\} \\
\text{Cov}(g_{xi} e_{xi\alpha}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{xi\alpha} (g_{xi} - \bar{g}_x)\} \\
\text{Cov}(\eta_i e_{xi\alpha}) &= \frac{1}{N-1} \bar{S} E_i \{e_{xi\alpha} (\eta_i - \bar{\eta})\}
\end{aligned}$$

であるが, $E_i e_{yi\alpha} = 0$, $E_i e_{xi\alpha} = 0$ である故, 以上の共分散はすべて 0 になる. 又

$$\text{Cov}(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha}) = \frac{1}{N} \bar{S} E_i \{e_{yi\alpha} e_{xi\alpha}\}$$

である. 次に $\text{Cov}(\eta_i g_{yi})$, $\text{Cov}(\eta_i \xi_i)$, $\text{Cov}(\eta_i g_{xi})$, $\text{Cov}(g_{yi} \xi_i)$, $\text{Cov}(g_{xi} \xi_i)$ および

第 4 表

	$\rho_{\eta g_y}$	$\rho_{\eta \xi_x}$	$\rho_{\eta g_x}$	$\rho_{g_y \xi}$	$\rho_{g_x \xi}$	$\rho_{g_y g_x}$
相関係数	0.5359*	0.6512**	0.0379	0.3455	-0.5125*	0.1893
t の 値	2.62	3.54	0.16	1.52	2.46	0.79

1% 危険率 $t = 2.90$ 5% 危険率 $t = 2.11$

$Cov(g_{yi} g_{xi})$ であるが、上記の共分散に相当する相関係数を計算してその有意差検訂を行つてみると第4表の如く、 η_i と ξ_i との間には 1% の危険率で相関関係が認められ、又 η_i と g_{yi} 及び ξ_i と g_{xi} との間には 5% の危険率で相関関係が認められるが他の場合には相関関係が認められない。故に $Cov(\eta_i \xi_i)$ 、 $Cov(\eta_i g_{yi})$ 及び $Cov(\xi_i g_{xi})$ のみ有効となる。以上の条件を (13) 式に入れると

$$\begin{aligned}
 V(D_{i\alpha \text{ p.i. sl.}}) &= V(\eta_i) + V(g_{yi}) + V(e_{yi\alpha}) + V(\xi_i) + V(g_{xi}) + V(e_{xi\alpha}) \\
 &\quad + 2 Cov(\eta_i g_{yi}) + 2 Cov(\xi_i g_{xi}) - 2 Cov(\eta_i \xi_i) - 2 Cov(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha})
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 V(\eta_i) &= \frac{1}{N-1} \sum^N (\eta_i - \bar{\eta})^2 \\
 V(g_{yi}) &= \frac{1}{N-1} \sum^N (g_{yi} - \bar{g}_y)^2 \\
 V(\xi_i) &= \frac{1}{N-1} \sum^N (\xi_i - \bar{\xi})^2 \\
 V(g_{xi}) &= \frac{1}{N-1} \sum^N (g_{xi} - \bar{g}_x)^2 \\
 V(e_{yi\alpha}) &= \frac{1}{N} \sum_i^N E(e_{yi\alpha})^2 \\
 V(e_{xi\alpha}) &= \frac{1}{N} \sum_i^N E(e_{xi\alpha})^2
 \end{aligned}$$

である。林分平均過去直径 (12) 式の分散は

$$\begin{aligned}
 V(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}}) &= \frac{1}{N} [V(\eta_i) + V(g_{yi}) + V(e_{yi\alpha}) + V(\xi_i) + V(g_{xi}) + V(e_{xi\alpha}) \\
 &\quad + 2 Cov(\eta_i g_{yi}) + 2 Cov(\xi_i g_{xi}) - 2 Cov(\eta_i \xi_i) - 2 Cov(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha})]
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

となる。そしてその標準偏差は

$$\begin{aligned}
 D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}}) &= \left\{ \frac{1}{N} [V(\eta_i) + V(g_{yi}) + V(e_{yi\alpha}) + V(\xi_i) + V(g_{xi}) + V(e_{xi\alpha}) \right. \\
 &\quad \left. + 2 Cov(\eta_i g_{yi}) + 2 Cov(\xi_i g_{xi}) - 2 Cov(\eta_i \xi_i) - 2 Cov(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha})] \right\}^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

となる。資料について $V(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}})$, $D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}})$, $E(D_{i\alpha \text{ past}})$, 誤差率, $E(D_{i\alpha \text{ past}})$ の偏倚及び $\frac{\text{bias}}{D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}})}$ を求めると

$$\begin{aligned} V(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}}) &= 0.1879 \\ D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}}) &= 0.43 \text{ cm} \\ E(D_{i\alpha \text{ past}}) &= 12.37 \text{ cm} \\ \text{誤差率} &= 3.50 \% \\ \text{bias} &= 0.16 \text{ cm} \\ \frac{\text{bias}}{D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}})} &= 0.08 \end{aligned}$$

となる。

次に、若しも真の現在直径 η_i 及び真の成長量 ξ_i が測定出来るものとする、真の平均過去直径の期待値 $E(D_{i \text{ past}})$ は

$$E(D_{i \text{ past}}) = \frac{1}{N} [\sum^N S(\eta_i) - \sum^N S(\xi_i)] \quad (17)$$

となり、その分散は

$$V(\overline{D_{i \text{ past}}}) = \frac{1}{N} [V(\eta_i) + V(\xi_i) - 2 \text{Cov}(\eta_i \xi_i)] \quad (18)$$

その標準偏差は

$$D(\overline{D_{i \text{ past}}}) = \left\{ \frac{1}{N} [V(\eta_i) + V(\xi_i) - 2 \text{Cov}(\eta_i \xi_i)] \right\}^{1/2} \quad (19)$$

となる。資料についてこれらを計算すると

$$\begin{aligned} E(D_{i \text{ past}}) &= 12.21 \text{ cm} \\ V(\overline{D_{i \text{ past}}}) &= 0.1642 \\ D(\overline{D_{i \text{ past}}}) &= 0.41 \text{ cm} \\ \text{誤差率} &= 3.32 \% \end{aligned}$$

となる。これと任意方向を測定した場合とを比較すると任意方向の測定をなしたための分散の増加率は

$$\frac{0.1879 - 0.1642}{0.1642} = 0.1443$$

即ち 14.4 % である。しかし標準偏差の増加量は 0.0283 cm で極く僅かであるので問題にはならないと思はれる。しこうして林分の平均過去直径を求める時は $\frac{\text{bias}}{D(\overline{D_{i\alpha \text{ past}}})}$ は 8 % 位になり、許容限界内に入るので bias もこの場合には問題にならない。任意方向の測定のための分散の増加量が 14.4 % にもなり、割合に大きいのは、この資料をとつた林分が割に齊一な林分であつたためである。

B 過去断面積の推定

a 単木について

過去断面積は過去直径の2乗に $\pi/4$ を乗じたものである故、過去断面積 $G_{i \text{ past}}$ は (3) 式より

$$\begin{aligned} G_{i \text{ past}} &= \frac{\pi}{4} (y_i - x_i)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} [(\eta + g_y + e_{yi}) - (\xi + g_x + e_{xi})]^2 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。(20)式に前述の仮定を用いて過去断面積の期待値 $E(G_{i \text{ past}})$ を求めると

$$E(G_{i \text{ past}}) = \frac{\pi}{4} \{[(\eta + g_y) - (\xi + g_x)]^2 + E(e_{yi}^2) + E(e_{xi}^2) - 2E(e_{yi}e_{xi})\} \quad (21)$$

となる。又 (20) 式の分散は η , ξ , g_y 及び g_x は単木については変化しない故に

$$\begin{aligned} V(G_{i \text{ past}}) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \left[E(e_{yi}^4) + E(e_{xi}^4) - 4E(e_{yi}^3e_{xi}) - 4E(e_{yi}e_{xi}^3) \right. \\ &\quad + 4\{[(\eta + g_y) - (\xi + g_x)][E(e_{yi}^3) - E(e_{xi}^3)]\} \\ &\quad + 4\{[(\eta + g_y) - (\xi + g_x)]^2[E(e_{yi}^2) + E(e_{xi}^2) - 2E(e_{yi}e_{xi})]\} \\ &\quad + 6E(e_{yi}^2e_{xi}^2) + 12\{[(\eta + g_y) \\ &\quad \left. - (\xi + g_x)][E(e_{yi}e_{xi}^2) - E(e_{yi}^2e_{xi})]\} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

となる。(22)式は余りに繁雑であるので2次以上の項は微少量である故除くと次の近似式が得られる。即ち

第 5 表

円盤番号	$D(G_{i \text{ past}})$	$E(G_{i \text{ past}})$	bias	誤差率	$\frac{\text{bias}}{D(G_{i \text{ past}})}$
A 12	7.2603	156.6722	3.6122	4.63%	0.50
A 21	6.6616	116.6107	5.7637	5.71	0.87
A 23	9.8167	193.7186	8.9017	5.07	0.91
A 25	4.4008	142.3261	10.0016	3.09	2.27
A 32	7.2617	129.7685	9.0054	5.60	1.24
A 34	4.0636	150.0333	2.6216	2.71	0.65
A 41	3.8458	172.7536	3.0365	2.23	0.79
A 43	6.9765	119.3121	2.7961	5.85	0.40
A 45	6.0660	121.6193	2.4094	4.99	0.40
A 54	5.7907	106.4921	5.4931	5.44	0.95
B 12	7.3730	114.3588	4.2570	6.45	0.58
B 21	4.1344	133.5824	-0.3783	3.10	0.09
B 23	7.7235	165.2197	5.9582	4.67	0.77
B 32	3.6553	98.9066	0.3860	3.70	0.11
B 34	2.3831	90.2727	0.3525	2.64	0.15
B 41	3.8598	78.9007	-1.5356	4.89	0.40
B 43	2.0853	73.9129	-0.9024	2.82	0.43
B 45	2.6838	55.4499	0.2957	4.84	0.11
B 54	5.9432	112.4208	1.2003	5.29	0.20

$$V(G_{i \text{ past}}) = \frac{\pi^2}{4} \left[\{(\eta_i + g_{yi}) - (\xi_i + g_{xi})\}^2 \{E(e_{yi}^2) + E(e_{xi}^2) - 2E(e_{yi} e_{xi})\} \right] \quad (23)$$

となる。標準偏差 $D(D_{i \text{ past}})$ は夫々 (22) 式または (23) 式の平方根である。資料について (22) 式を用いて $D(G_{i \text{ past}})$, $E(G_{i \text{ past}})$, $E(G_{i \text{ past}})$ の偏倚, 誤差率, 及び $\frac{\text{bias}}{D(G_{i \text{ past}})}$ を求めると第5表の如くなる。

第5表より明らかな様に $D(G_{i \text{ past}})$ は最小 2.0853 cm² から最大 9.8167 cm² の間に分布し, 平均 5.3676 cm² である。誤差率は最小 2.23 %, 最大 5.71 %, 平均 4.41 % である。他方 bias は絶対値で最小 0.2957 cm², 最大 10.0019 cm², 平均 3.6004 cm² であり, $\frac{\text{bias}}{D(G_{i \text{ past}})}$ は最小 0.09, 最大 2.27, 平均 0.62 である。

b 林分について

林分の平均過去断面積は (11) 式より

$$G_{i\alpha \text{ past}} = \frac{\pi}{4} \left[(\eta_i + g_{yi} + e_{yi\alpha}) - (\xi_i + g_{xi} + e_{xi\alpha}) \right]^2 \quad (24)$$

となる。これに前述の仮定を用いると林分の平均過去断面積の期待値 $E(G_{i\alpha \text{ past}})$ は

$$E(G_{i\alpha \text{ past}}) = \frac{\pi}{4N} \left\{ S \{ [(\eta_i + g_{yi}) - (\xi_i + g_{xi})]^2 + E(e_{yi}^2) + E(e_{xi}^2) - 2E(e_{yi} e_{xi}) \} \right\} \quad (25)$$

となる。又 (25) 式の分散は前述の仮定と 2 次以上の項を省略すると

$$\begin{aligned} V(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}}) = \frac{\pi^2}{4N} \left[S \{ (\eta_i + g_{yi}) - (\xi_i + g_{xi}) \}^2 \{ V(\eta_i) + V(g_{yi}) + V(\xi_i) + V(g_{xi}) \right. \\ \left. + E_i E_i(e_{yi\alpha}) + E_i E_i(e_{xi\alpha}^2) - 2E_i E_i(e_{yi\alpha} e_{xi\alpha}) + 2Cov(\eta_i g_{yi}) \right. \\ \left. + 2Cov(\xi_i g_{xi}) - 2Cov(\eta_i \xi_i) \} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

となる。その標準偏差 $D(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}})$ は (26) 式の平方根である。資料について $D(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}})$, $E(G_{i\alpha \text{ past}})$, 誤差率, $E(G_{i\alpha \text{ past}})$ の偏倚及び $\frac{\text{bias}}{D(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}})}$ を求めると

$$D(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}}) = 8.5101 \text{ cm}^2$$

$$E(G_{i\alpha \text{ past}}) = 122.7543 \text{ cm}^2$$

$$\text{誤差率} = 7.0 \%$$

$$\text{bias} = 3.3302 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\text{bias}}{D(\overline{G_{i\alpha \text{ past}}})} = 0.10$$

となる。

次に若しも真の現在直径 η_i 及び真の成長量 ξ_i が測定出来るものとする, 真の平均過去断面積 $E(G_{i \text{ past}})$ は

$$E(G_{i \text{ past}}) = \frac{\pi}{4N} \sum_{i=1}^N (\eta_i - \xi_i)^2 \quad (27)$$

となり、その分散 $V(G_{i \text{ past}})$ は

$$V(\overline{G_{i \text{ past}}}) = \frac{\pi^2}{4N} [\sum_{i=1}^N (\eta_i - \xi_i)^2] [V(\eta_i) + V(\xi_i) - 2 \text{Cov}(\eta_i, \xi_i)] \quad (28)$$

となり、その標準偏差は (28) 式の平方根である。資料についてこれらを計算すると

$$E(G_{i \text{ past}}) = 119.4240 \text{ cm}^2$$

$$D(G_{i \text{ past}}) = 7.8488 \text{ cm}^2$$

$$\text{誤差率} = 6.6 \%$$

となる。これと任意方向を測定した場合とを比較すると、任意方向の測定をしたための分散の増加率は

$$\frac{7.3380 - 6.2417}{6.2417} = 0.176$$

即ち 17.6 % である。しかし標準偏差の増加量は 0.6613 cm^2 で僅かである。

IV 考 察

輪尺と成長錐を用いて過去直径ままは過去断面積を推定するのに、測定方向を任意方向にとる場合についてその誤差の程度及び偏倚について論じたのであるが、過去直径推定の場合には単木では誤差率は平均約 3 % で精度はよいが、 $\frac{\text{bias}}{\text{標準偏差}}$ は平均 0.57 となり大きすぎるので、この点から云えば bias をもう少し小さくするか又は標準偏差を大にしなければ好ましくない。bias を小さくすることは樹木の断面型が不規則な型をなしている以上、この断面積と等面積を有する円の直径を真の直径とする限り避けえないので困難であろう。標準偏差を大にすることは測定の精度が悪くなるのでこれもまた困難な問題となる。しかし林分の平均直径測定の立場からみると $\frac{\text{bias}}{\text{標準偏差}}$ は 0.08 となり小さくなるのでこの問題は解決される。そして誤差率も 3.50 % 位になり小さいが任意方向にて測定したためにこの資料では約 14 % もの分散の増加を見たが、本資料については林分が略齊一であつたために真の直径間の変動が小さかつたことに由来している。林分の変動が大になれば任意方向の測定のための分散の増加は小になる筈である。他方過去断面積の場合には単木では誤差率は平均約 4.4 % となり直径の場合よりも大である。 $\frac{\text{bias}}{\text{標準偏差}}$ は平均 0.62 であり、これについては直径の場合と同様なことが云える。林分についての平均断面積測定の立場からみると $\frac{\text{bias}}{\text{標準偏差}}$ は 0.10 となり、これは平均直径推定の場合よりも小さくなっている。そして誤差率は 7.0 % となり、平均直径の場合よりも僅かに大になつてはいるが、これは真の平均面積の変動は平均直径の場合よりも大であり、即ち前者の誤差率は 6.6 % であり、後者の誤差率は 3.3 % であることに基くためである。任意方向にて測定したための分散の増加率は約 18 % であるが、これもまた林分が比較的齊一なためにこ

の様な値になつたものと思はれる。

結局任意方向の測定による輪尺と成長錐を用いての過去直径及び過去断面積の推定は単木の場合は今後究明すべき点を残しているが、林分の平均過去直径又は断面積推定にはかなり高精度の推定値を与える。そして林分の直径間の変動が比較的小さい時にでも断面積間の変動はかなり大きいことに注意しなければならない。

最後に種々御教示頂いた木梨助教授並びに資料の整備、写真撮影及び planimeter 測定に労をとられた堂上龍雄、林重佐の両氏に謝意を表する。尙お本稿の一部は木梨助教授と共著にて標本抽出法による森林蓄積調査第 IV 報に報告したものである。

(1955 年 4 月 10 日)

参 考 文 献

- (1) 高田 和 彦：胸高直径測定上の誤差について 九大演習林集報 第 1 号 1953.
- (2) 高田 和 彦：成長錐の挿入方向について 第 64 回日本林学会大会講演集 1955.

R é s u m é

This report treats the errors of the past-diameter and the past-basal area measured with the caliper and the increment borer. If the measuring directions of the caliper and the increment borer are selected at random, the past-diameter of a single tree is expressed by Eq. (4), its expected value by Eq. (5), and its variance by Eq. (6). The average past-diameter of a stand is expressed by Eq. (11), its expected value by Eq. (12), and its variance by Eq. (13). On the same assumption, the past-basal area of a single tree is expressed by Eq. (20), its expected value by Eq. (21), and its variance by Eq. (22). When the terms of the second order and above are neglected, Eq. (22) becomes Eq. (23). The average past-basal area of a stand is expressed by Eq. (24), its expected value by Eq. (25), and its variance by Eq. (26), (approximate equations). Inserting the actual numerical data, the error of the past-diameter of a single tree is about 3 per cent, and that of a stand is about 3.5 per cent. Since the measuring directions are selected at random, the variance increases about 14 per cent. The error of the past-basal area of a single tree is about 4.4 per cent and that of a stand is about 7.0 per cent. Since the measuring directions are selected at random, the variance increases about 18 per cent. This is owing to the fact that the variance between the true values is small. If the stand is heterogeneous, the increases of variance owing to the random selection of the measuring directions will be smaller.