

胸高直径測定上の誤差について : 第3報 輸尺のあて方による誤差

高田, 和彦
九州大学農学部

<https://doi.org/10.15017/15784>

出版情報 : 演習林集報. 1, pp.69-77, 1953-10-30. Kyushu University Forests
バージョン :
権利関係 :



胸高直径測定上の誤差について

第 3 報

輪尺のあて方による誤差

高 田 和 彦

Kazuhiko TAKATA: On the Error in the Measurement of Diameter
Breast High

(III) The Error Owing to the Angle between the Caliper and
the Stem Axis

目 次

I 緒 言
II 試 料
III 理 論
III 数 値 的 結 果

V 考 察
参 考 文 献
Résumé

I 緒 言

立木の胸高直径測定において正確な直径を測定するには輪尺を幹軸に対して直角にあてねばならない。しかし実際の測定においてはこのような測定をなす事は不可能に近く、常にいくらか傾けて輪尺をあてているのが普通である。今林分の直径測定においてこの傾斜角が或範囲を等頻度でとるものと仮定すると（この仮定も第2報でのべた測定高における仮定と同様に厳密にはこのような一様分布ではないかも知れぬが、ここでは一応こう考える事にする）。このような場合には当然な結果として誤差を生ずる。又若しも直径の測定方向を任意にとつたり、測定高が胸高を中心として変動していると測定上の誤差は重畳せられる。故にこれらの重畳合成された誤差についても輪尺のあて方による誤差と共に考察を加える事にする。

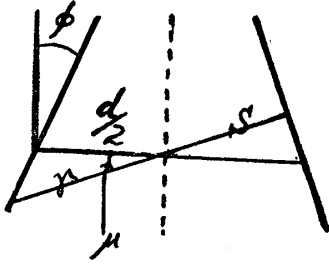
II 試 料

試料は第2報でのべたものと同一の物、即ち 1953 年 5 月 20 日に調査した菊池深葉国有林 3 林班り小班のスギ人工同令林よりとつたものである。

III 理 論

今 Fig. 1 の様に胸高附近における幹曲線を直線と見做し、幹曲線と幹軸との傾斜角を ϕ とする。又幹軸に直角にあてられた輪尺のよみ即ち真の直径を d 、この直径 d と μ な

Fig. 1.



る角度即ち幹軸と $\angle R - \mu$ なる角度であてられた輪尺の
よみを $d' (= r + s)$ とすると,

$$r : \frac{d}{2} = \cos \phi : \cos(\mu + \phi)$$

$$s : \frac{d}{2} = \cos \phi : \cos(\mu - \phi)$$

$$r = \frac{d}{2} \frac{\cos \phi}{\cos(\mu + \phi)}$$

$$s = \frac{d}{2} \frac{\cos \phi}{\cos(\mu - \phi)}$$

$$\begin{aligned} \therefore d' = r + s &= \frac{d \cos \phi}{2} \left(\frac{1}{\cos(\mu + \phi)} + \frac{1}{\cos(\mu - \phi)} \right) \\ &= \frac{d \cos \phi}{2} \left(\frac{\cos(\mu - \phi) + \cos(\mu + \phi)}{\cos(\mu + \phi) \cos(\mu - \phi)} \right) \\ &= \frac{d \cos \phi}{2} \left(\frac{\cos \mu \cos \phi + \sin \mu \sin \phi + \cos \mu \cos \phi - \sin \mu \sin \phi}{(\cos \mu \cos \phi - \sin \mu \sin \phi)(\cos \mu \cos \phi + \sin \mu \sin \phi)} \right) \\ &= \frac{d \cos \phi}{2} \left(\frac{2 \cos \mu \cos \phi}{\cos^2 \mu \cos^2 \phi - \sin^2 \mu \sin^2 \phi} \right) \\ &= d \cos^2 \phi \cos \mu \left(\frac{1}{\cos^2 \mu \cos^2 \phi - \sin^2 \mu (1 - \cos^2 \phi)} \right) \\ &= d \cos^2 \phi \cos \mu \left(\frac{1}{\cos^2 \phi (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu) - \sin^2 \mu} \right) \\ &= d \cos^2 \phi \cos \mu \left(\frac{1}{\cos^2 \phi - \sin^2 \mu} \right) \\ &= d \cos^2 \phi \cos \mu \left(\frac{1}{\cos^2 \phi + \cos^2 \mu - 1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

今林分において簡単にするために幹曲線が Kunze 式で表われ $r = 2$ であるとする
 $\cos^2 \phi$ は一定となる. 故に $A = \cos^2 \phi$ とおくと,

$$A = \cos^2 \phi = a \quad (2)$$

となる. ここで a は全材分の $\cos^2 \phi$ の平均値である. 故に A の分散は

$$V(A) = V(a) + V(\epsilon) \quad (3)$$

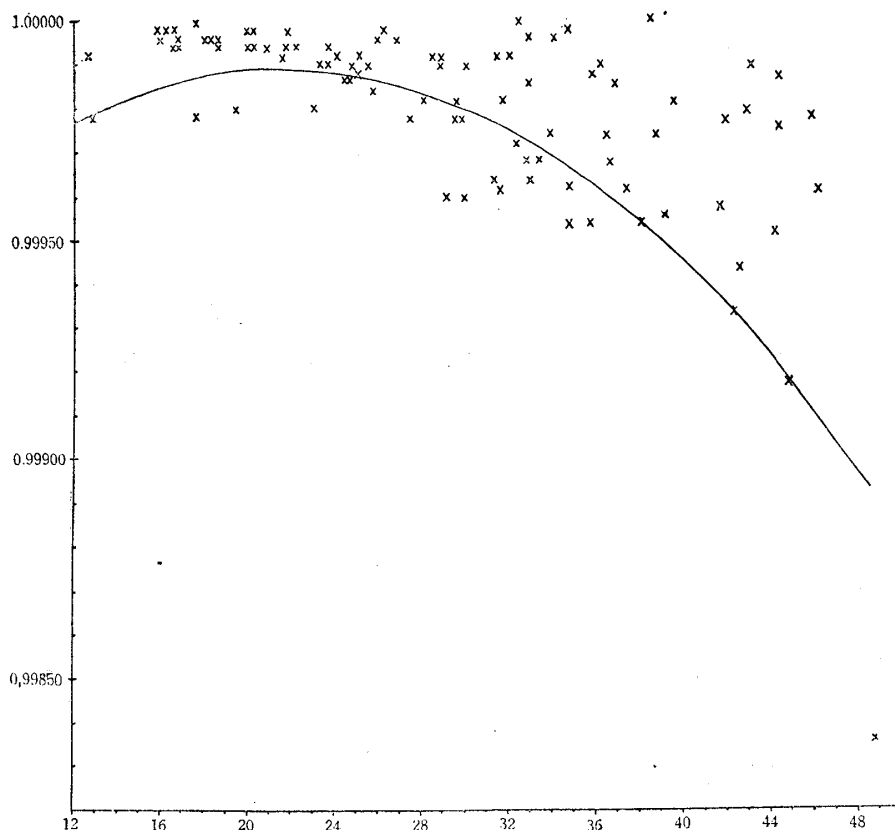
となる. ここで $V(\epsilon)$ は $A = a$ の最小二乗法解の $\frac{\min.S}{n-1} (= \sigma^2)$ である. しかし第2報
でのべた様に, 実際の林分においては r は2でなし又同地位の人工同令林では全林分につ
いて同一の幹曲線を当てはめる事は危険である. 即ち胸高直径の小なる物は大なる物に比
し完満である傾向が見られる. この傾向は第2報で $\tan \phi$ の値と胸高直径との関係は略
直線関係と見做されたが, $\cos \phi$ の値と胸高直径との関係は Fig. 2 の如く拋物線が適合
しているように思われる. 故にこの様な場合には,

$$A = \cos^2 \phi = a + bd + cd^2 \quad (2)'$$

となりその分散は

$$V(A) = V(a) + d^2 V(b) + d^4 V(c) + b^2 V(d) + 4d^2 c^2 V(d) + V(\epsilon) \quad (3)'$$

Fig. 2.



となる。ここで $V(\varepsilon)$ は (2)' 式の最小二乗法解による $\frac{\min.S}{n-3} (= \sigma^2)$ である。

又

$$B = \cos \mu \quad (4)$$

とおくと

$$V(B) = \sin^2 \mu V(\mu) \quad (5)$$

となる。今ここでは μ 、即ち輪尺をあてる角度（これは Radian で表わされたものである）が、或角を平均として或範囲内に等分布するものと仮定したのであるからその範囲を G とすると、

$$V(\mu) = \frac{1}{12} (\bar{G}^2 + \sigma_G^2) \quad (6)$$

となる。

(1) 式を上述の記号 A , B で表わすと、

$$d' = dAB \left(\frac{1}{A + B^2 - 1} \right) \quad (7)$$

となりその分散は

$$V(d') = \left[\frac{\partial d'}{\partial d} \right]^2 V(d) + \left[\frac{\partial d'}{\partial A} \right]^2 V(A) + \left[\frac{\partial d'}{\partial B} \right]^2 V(B) \quad (8)$$

となる, ここで

$$\begin{aligned}\frac{\partial d'}{\partial d} &= \frac{AB}{A+B^2-1} \\ \frac{\partial d'}{\partial A} &= \frac{dB[B^2-1]}{[A+B^2-1]^2} \\ \frac{\partial d'}{\partial B} &= \frac{dA[A-B^2-1]}{[A+B^2-1]^2}\end{aligned}$$

である故これらの値を (8) 式に代入すると,

$$V(d') = \frac{A^2B^2}{[A+B^2-1]^2}V(d) + \frac{d^2B^2[B^2-1]^2}{[A+B^2-1]^4}V(A) + \frac{d^2A^2[A-B^2-1]^2}{[A+B^2-1]^4}V(B) \quad (8)'$$

となる. (8)' 式及 (3)' 式の $V(d)$ は次の如く調査並に測定方法によつて異なる. 即ち

〔A〕 直径が常に正確に胸高で真の直径 (最大直径と最小直径との平均直径) として測定される時.

(a) Sampling 調査の時.

$$V(d) = V(d_t)$$

(b) 毎木調査, 並に個樹について測定を行う時.

$$V(d) = 0$$

〔B〕 正確に胸高で任意方向の直径が測定される時.

(a) Sampling 調査の時

$$V(c) = V(d_t) + \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2)$$

(b) 毎木調査の時.

$$V(d) = \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2)$$

(c) 個樹について測定を行う時.

$$V(d) = \frac{1}{12}(R^2)$$

〔C〕 胸高を中心として或範囲上下を等頻度で測度し, 又方向も任意に測定される時.

(a) Sampling 調査の時.

$$\begin{aligned}V(d) = V(d_t) + \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2) + \frac{1}{3}(l^2 + \sigma_l^2) \Big[\Big[V(d_t) + \frac{1}{12}(\bar{R} + \sigma_R^2) \Big] [4b^2 + 4V(b)] \\ + 4a^2 + 4V(a) + 4b^2d^2 + 4d^2V(b) + 4\sigma^2 \Big] \end{aligned}$$

(b) 毎木調査の時.

$$\begin{aligned}V(d) = \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2) + \frac{1}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2) \Big[\Big[\frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2) \Big] [4b^2 + 4V(b)] \\ + 4a^2 + 4V(a) + 4b^2d^2 + 4d^2V(b) + 4\sigma^2 \Big] \end{aligned}$$

(c) 個樹について測定を行う時.

$$V(d) = \frac{1}{12} + R^2 - \frac{1}{3}l^2 \Big[\frac{1}{12}R^2[4b^2 + 4V(b)] + 4a^2 + 4V(a) + 4b^2d^2 + 4d^2V(b) + 4\sigma^2 \Big]$$

但し〔C〕に属する式は $\tan\alpha$ が材分によつて凡て一定ではなく胸高直径と直線的に比例するという仮定の上に立つている.

IV 数 値 的 結 果

前述の様にこの試料ではA即ち $\cos\phi$ の値は林分を通じて一定とは見做されず, 拋物線状を呈している故, A は (2)' 式を用いなければならない. 最小二乗法により (2)' 式を求めると,

$$A = 0.9993046985 + 0.0000574750d - 0.0000012760 d^2$$

となる. 又

$$\min. S = 0.00004155$$

となる故,

$$\sigma_{\text{ext}} = 0.00000044$$

$$C_{11} = 1.12957970$$

$$C_{22} = 0.00547036$$

$$C_{33} = 0.00000147$$

$$\therefore V(a) = 0.000000497015$$

$$V(b) = 0.000000020407$$

$$V(c) = 0.000000000001$$

となる. 今 (3)' 式に林分の平均直径 29.6cm を代入してみると,

$$\begin{aligned} V(A) &= 0.000000497015 + (876.16)(0.0000000020407) + (767656.3456) \\ &\quad (0.000000000001) + [0.000000003010 + 4(876.16) \\ &\quad (0.0000000000002)]V(d) + 0.000000004384 \\ &= 0.000003378172 + 0.000000010019 V(d) \end{aligned}$$

又 μ は 5° を平均値として 10° の範囲内を等頻度で取るものとする,

$$V(\bar{\mu}) = \frac{1}{96} \frac{1}{12} (0.3491)^2 = 0.00010579 \quad (10^\circ = 0.3491 \text{ radian})$$

$$\sin^2 5^\circ = (0.0871)^2 = (0.0871)^2 = 0.00758641$$

$$\begin{aligned} \therefore V(B) &= (0.00758641)(0.00010579) \\ &= 0.0000008025 \end{aligned}$$

となる. 次に $d = 29.6\text{cm}$ として A を求めると,

$$\begin{aligned} A &= 0.9993046985 + (0.00005747500)(29.6) - (0.0000012760)(876.16) \\ &= 0.9998135005 \end{aligned}$$

$$B = 0.99619$$

$$\therefore [A + B^2 - 1] = 0.9622080166$$

$$[A + B^2 - 1]^2 = 0.9844767486$$

$$[A + B^2 - 1]^4 = 0.9691944689$$

$$A^2 B^2 = 0.9920243866$$

$$d^2 B^2 [B^2 - 1]^2 = 0.0050621020$$

$$d^2 A^2 [A - B^2 - 1]^2 = 862.8858433273$$

$$\therefore \frac{A^2 B^2}{[A + B^2 - 1]^2} = 1.00766664$$

$$\frac{d^2 B^2 [B^2 - 1]^2}{[A + B^2 - 1]^4} = 0.00522300$$

$$\frac{d^2 A^2 [A - B^2 - 1]^2}{[A + B^2 - 1]^4} = 890.312389$$

此等の値を (8)' 式に代入すると

$$\begin{aligned} V(d') &= (1.00766604)[V(d)] + (0.00522300)[0.00000338 + (0.00000001) \\ &\quad V(d)] + (890.312389)(0.00000080) \\ &= 1.00766604[V(d)] + 0.0007145825 \end{aligned} \quad (8)'$$

となる。ここにおいて $V(d)$ は前述の通り調査方法により異なる。従つて夫々の調査法により $V(d')$ の値は異つてくる。即ち

〔A〕 直径が常に正確に胸高で真の直径として測定される時。

(a) Sampling 調査の時

$$V(\bar{d}) = 0.8517$$

$$\begin{aligned} \therefore V(\bar{d}') &= 0.8582 + 0.0007 \\ &= 0.8589 \end{aligned}$$

故に分散の増加は、

$$\frac{0.0072}{0.8517} = 0.8\%$$

である。

(b) 毎木調査の時

$$V(\bar{d}) = 0$$

$$\therefore V(\bar{d}') = 0.0007$$

〔B〕 正確に胸高で任意方向の直径が測定される時。

(a) Sambling 調査の時

$$V(\bar{d}) = 0.8548$$

$$\begin{aligned} \therefore V(\bar{d}') &= 0.8614 + 0.0007 \\ &= 0.8621 \end{aligned}$$

故に分散の増加率は、

$$\frac{0.0104}{0.8517} = 1.2\%$$

である。

(b) 毎木調査の時

$$V(\bar{d}) = 0.0031$$

$$\begin{aligned} \therefore V(\bar{d}') &= 0.0031 + 0.0007 \\ &= 0.0038 \end{aligned}$$

〔C〕 胸高を中心として 10cm 上下を等頻度で測定し、又方向も任意に測定される時。

(a) Sampling 調査の時

$$V(\bar{a})=0.8552$$

$$\therefore V(\bar{a}')=0.8618+0.0007 \\ =0.8625$$

故に分散の増加率は、

$$\frac{0.0108}{0.8517}=1.3\%$$

である。

(b) 毎木調査の時

$$V(\bar{a})=0.0035$$

$$\therefore V(\bar{a}')=0.0035+0.0007 \\ =0.0042$$

となる。

又ここで輪尺をあてる角度が平均 5° と仮定したからこの為に正確に輪尺をあてた測定値とは bias する。平均直径 29.6cm を (7) 式に代入すると、

$$d'=(29.6)(0.9998135005)(0.99699)\left(\frac{1}{0.9922080166}\right) \\ =(29.6)\left(\frac{0.996004211}{0.9922080166}\right) \\ =(29.6)(1.00383) \\ =29.7$$

となり 0.1cm の bias がある。この bias は Sampling 調査の時は測定方法の如何にかかわらず有意差は認められないが、毎木調査の時は

(a) 正確に胸高で最大直径が測定される時は

$$\frac{0.1}{\sqrt{0.0007}} > 1.96$$

となり有意差が認められる。

(b) 正確に胸高で任意方向の直径が測定される時は

$$\frac{0.1}{\sqrt{0.0038}} < 1.96$$

となり有意差は認められない。

(c) 胸高を中心として 10cm 上下を等頻度で測定し、又測定方向も任意にとられる時は

$$\frac{0.1}{\sqrt{0.0042}} < 1.96$$

となり有意差は認められない。

V 考 察

IV の数値的結果から明らかな様に直径が正確に胸高で最大直径と最小直径が測定され、それを平均して真の直径と見做す場合輪尺をあてる角度が平均 5° 、この平均 5° を中心として 0° から 10° の間を等頻度でとる時の分散の増加率は Sampling 調査の時は 0.8 %

であり、この data で毎木調査をしたと仮定する時の分散は 0.0007 となる。又測定方向を任意に、測定高も胸高を中心として上下 10cm の間を等頻度で変動し、輪尺をあてる角度も 5° を中心とし 0° から 10° 迄の間を等頻度で変動する時の直径測定値の分散の増加率は 1.2 % でこの data を毎木調査したと仮定した時の分散は 0.0024 となり後者の場合でも 95 % の確率で、誤差率は

$$\frac{(1.96)(0.064)}{29.6} = 0.4\%$$

即ち 0.4 % に過ぎないので実用上は胸高直径は任意方向で測定高は胸高を中心として上下 10cm の間を等頻度で、又輪尺をあてる角度は 0° から 10° の間を等頻度で測定しても差支えないと思われる。然し正確に胸高で最大直径と最小直径を測定する場合には、輪尺をあてる角度による bias は有意となるので、この場合は正確に幹軸と直角にあてねばならない。他の場合には 0° から 10° 位迄の間に等頻度であてられるならば有意差は認められないので、この程度の測定を行つてよい。

最後に本研究を御指導下さつた木梨助教授並に調査を便宜を与えられた熊本営林局並川技官及菊池営林署に謝意を表する。(1953 年 6 月 3 日)

参 考 文 献

- (1) 高田 和彦：胸高直径測定上の誤差について
 第一報 測定方向による誤差
 第二報 測定高による誤差
- (2) Tischendorf : Lehrbuch der Holzmassenermittlung
- (3) W. E. Deming : Statistical Adjustment of Data
 森口 繁一：推計学によるデーターの纏め方

R é s u m é

The first report treated the error owing to the direction of measurement and the second report the error owing to the height of measurement. The third report treats the error owing to the angle between the callipers and the stem axis. If the stem curve near the breast height is linear and the angle between the callipers and the stem axis is not rectangular, the diameter measurement value is expressed by Equation (1) (see Fig. 1). When the stem curves of all trees are expressed by Kunze's stem curve equation and γ is about 2 in the stand, the $\cos^2 \phi$ is expressed by Equation (2), and its variance is expressed by Equation (3). As was stated in the second report, γ is not 2 and the stem curves of all trees are not identical (see Fig. 2). In this case, the equation corresponding to (2) is (2'), so that the variance of A is expressed by Equation (3'). When $\cos \mu$ is denoted by B, the variance of B is expressed by Equation (5). If the angle between the callipers and the stem axis is taken

by equal frequency within the range of G , the $v(\mu)$ is expressed by Equation (6). When the Equation (1) is expressed by A and B , Equation (1) turns out to be Equation (7). The variance of Equation (7) is expressed by Equation (8), where $V(d)$ is varied by the measurement method (as shown in the first and the second reports). Inserting the practical data in Equation (8), $V(d')$ is expressed by Equation (8''). When the diameter is measured exactly (i.e. at the breast height and at the average direction of the maximum and the minimum directions) and the angle between the calliper and the stem axis is not rectangle, the increase of variance is 0.8 per cent. And the increase of variance is 1.3 per cent, when the diameter is measured at random directions, the measurement height being varied 10 cm about the breast height, and the angle between the callipers and the stem axis from 90° to 100° . After all, the variation of the measurement method of the diameter breast high is out of the question.