

胸高直径測定上の誤差について : 第2報 測定高による誤差

高田, 和彦
九州大学農学部

<https://doi.org/10.15017/15783>

出版情報 : 演習林集報. 1, pp.59-68, 1953-10-30. Kyushu University Forests
バージョン :
権利関係 :



胸高直径測定上の誤差について

第 2 報

測定高による誤差

高 田 和 彦

Kazuhiko TAKATA: On the Error in the Measurement of
Diameter Breast High

(II) The Error owing to the Height of Measurement

目 次

I 緒 言	V 考 察
II 試 料	参 考 文 献
III 理 論	Résumé
III 数 値 的 結 果	

I 緒 言

立木の直径測定において胸高を中心として上下 10cm の所の直径と胸高直径との間には私が先に地蔵松原で行った実験結果によると有意差が認められたから⁽¹⁾常に胸高より高い所又は低い所の直径を測定する時には直径測定値に bias を生ずる事になる。しかし実際の測定においては常に一定高にて測定する事は現場での普通の調査では不可能に近く或点を中心として上下に大体一樣な割合で測定せられるものと考えられる。(厳密にはこの測定高の分布の形状を究明せねばならぬが、ここでは一応一樣分布と仮定した)又直径を任意方向で測定するとこれらの誤差が重畳せられる。故に測定者が或る高さを中心として或る範囲上下を同じ頻度で測定し又測定方向は任意にとられる場合の誤差を明らかにし、この中心高が胸高とどの位 bias すれば有意と認められるかを確め実際の測定における基準を定める事にする。

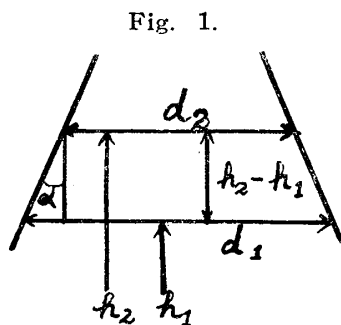
II 試 料

試料は 1953 年 5 月 20 日熊本県菊池郡水源村大字菊池深葉、菊池深葉国有林 3 林班り小班(菊池営林署管内)スギ 49 年生(最小直径 12cm, 最大直径 50cm, 最低樹高 18m, 最高樹高 23m, 平均樹高 20m)人工林においてとられたものである。この林分は直径級により群状に集つており、それは大体において 25cm 以下、25cm 以上の二つの型にわけられるのでこの二つの階層において 25cm 以下を 2 ケ所、25cm 以上を 3 ケ所(1 ケ所において 20 本)計 5 ケ所 100 本を任意抽出し、抽出木につき測定高として正確に 100, 110, 120, 130, 140cm の箇所に印をつけ各々の測定高につき最大直径と最小直径を mm 迄輪尺で読み、その平均直径を真の直径と見做した。(この時の bias については第 1 報参照)抽

出木 100 本中 4 本は樹幹が不規則であつた為棄却し、残りの 96 本を試料として用いた。

III 理 論

今測定点附近における樹幹曲線を直線と見做し（厳密には直線と見做す事は出来ず特に胸高直径が大になるにつれて根張りの影響を受けて胸高より下部の方が上部の方よりも急傾斜である事が認められるが、ここでは簡単にする為に直線と見做した。この為に最小二乗法解による σ は曲線と見做した場合よりも稍大になる事は免れない。）或る高さ h_1 における真の直径を d_1 , h_2 なる高さにおける真の直径を d_2 とすると Fig. 1 より明らかな様に



$$d_1 - d_2 = 2 \tan \alpha (h_2 - h_1)$$

ここで α は樹幹曲線と幹軸との傾斜角である。

$$\therefore d_2 = d_1 - 2 \tan \alpha (h_2 - h_1)$$

ここで簡単にする為に若しも同一林分の樹木についてはすべて Kunze の幹曲線を有し $r=2$ と仮定すると α はすべての樹木について同一となる。故に

$$\tan \alpha = A$$

とおく、又 $h_2 - h_1$ は或る基準高と実際の測定高との偏差で

$$h_2 - h_1 = l$$

とおくと

$$d_2 = 2Al$$

ここで l は一様分布であると仮定したから平均値 0, 分数 $\frac{1}{3}(\bar{l}^2) = \frac{1}{3}(\bar{l}^2 + \sigma l^2)$ に従う確率変数である。然し (1) 式は実際の data については厳密に成立たず誤差を含む。故に (1) 式は

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 - 2(A + \epsilon)l \\ &= d_1 - 2Al - 2\epsilon l \end{aligned} \quad (2)$$

となる、ここで ϵ は平均値 0, 分数は実際の data を最小二乗法解した時の $\frac{\min. S}{n-1}$ ($= \sigma^2$) で表わされるものである。今 (2) 式において d_1 に Δd_1 , A に ΔA , l に Δl の誤差があると仮定すると d_2 の誤差 Δd_2 は

$$\begin{aligned} d_2 + \Delta d_2 &= d_1 + \Delta d_1 - 2(A + \Delta A)(l + \Delta l) - 2(\epsilon)(l + \Delta l) \\ &= d_1 + \Delta d_1 - 2Al - 2A\Delta l - 2\Delta Al - 2\Delta A\Delta l - 2\epsilon l - 2\epsilon\Delta l \\ \therefore \Delta d_2 &= \Delta d_1 - 2A\Delta l - 2\Delta A\Delta l - 2\epsilon\Delta l \\ &= V(d_1) + 4A^2V(l) + 4V(A)V(l) + 4V(\epsilon)V(l) \\ &= V(d_1) + 4V(l)[A^2 + V(A) + V(\epsilon)] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $V(d_1)$ は

[A] 任意方向の直径をとる時

(a) Sampling 調査の時には第一報の記号を用いて

$$V(d_1) = V(d_t) + \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2) \quad d_{it} \text{ は } d_1 \text{ の真の直径}$$

(b) 毎木調査の時には

$$V(d_1) = \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2)$$

(c) 単木調査の時には

$$V(d_1) = \frac{1}{12}(R^2)$$

[B] 真の直径を測定する時には

(a) Sampling 調査の時

$$V(d_1) = V(d_{it})$$

(b) 毎木調査及び単木調査の時には

$$V(d_1) = 0$$

$V(A)$ は A の分散

$V(\epsilon)$ は σ^2

$$V(l) \text{ は } \frac{1}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2)$$

である。故に (3) 式は

$$V(d_2) = V(d_1) + \frac{4}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2)[A^2 + V(A) + \sigma^2] \quad (4)$$

となる。(4) 式の $V(d)$ には其時の調査方法に応じた上述の値を入れればよい。

以上の理論は前述の通り同一林分の樹木についてはすべて Kunze の幹曲線を有し $r=2$ という仮定の上に立っているのである。しかし実際の林分においては Kunze 式は許されずとしても r は 2 ではなく特に同地位における同令人工林等においては樹高は略々同一であり、従つて胸高直径の大なる物ほど梢殺で従つて胸高直径の小さい物ほど完満な形状を呈するものである。この data をとつた林分において地上 1.0 m の点の直径と 1.4 m の点の直径との差を図示してみると Fig. 2 の如く明らかにこの傾向がみられる。このような場合には上述の (1) (2) (3) (4) 式を用いると A の誤差は大となり適当ではない。故に次の様に考えなければならない。Fig. 2 より胸高直径が大になるにつれて 1.0 m の直径と 1.4 m の直径との差は大になつてゐる故胸高直径が大になるにつれて α が小になつてゐる事になる。この胸高直径と α との関係は直線関係とみられる故に (1) 式に相当する式はこの場合には

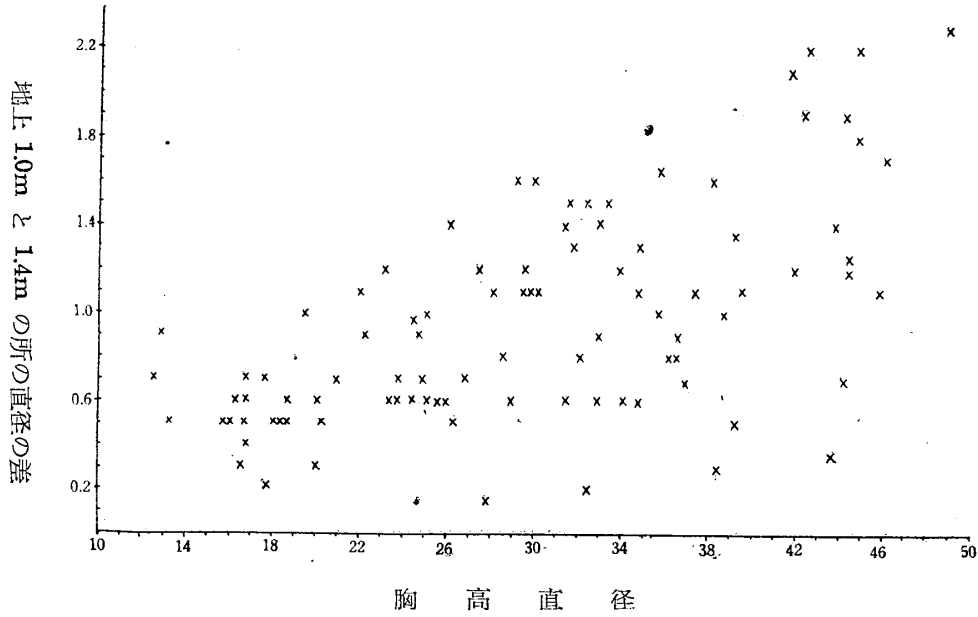
$$d_2 = d_1 - 2(a + b d_1)l \quad (1)'$$

となる。ここで a, b は夫々常数である。然し (1)' 式は実際の data については厳密に成立たず誤差を含む。故に (1)' 式は

$$d_2 = d_1 - 2(a + b d_1 + \epsilon)l \quad (2)'$$

となる。ここで ϵ は平均値 0, 分散は実際の data を最小二乗法解した時の $\frac{\min S}{n-2} (= \sigma^2)$ で表わされる物である。今 (2)' 式において d_1 に Δd_1 , a に Δa , b に Δb , l に Δl

Fig. 2.



の誤差があつたと仮定すると d_2 の誤差 Δd_2 は

$$\begin{aligned}
 d_2 + \Delta d_2 &= d_1 + \Delta d_1 - 2[a + \Delta a + (b + \Delta b)(d_1 + \Delta d_1) + \epsilon](l + \Delta l) \\
 &= d_1 + \Delta d_1 - 2[a + \Delta a + bd_1 + \Delta bd_1 + \Delta l \Delta d_1 + 2\epsilon](l + \Delta l) \\
 &= d_1 - 2al - 2bd_1l + \Delta d_1 - 2a\Delta l - 2\Delta a\Delta l - 2bd_1\Delta l - 2l\Delta d_1\Delta l - 2\Delta bd_1\Delta l - 2\Delta l\Delta d_1\Delta l \\
 &\quad - 2\epsilon\Delta l - 2\Delta a\Delta l - 2l\Delta d_1\Delta l - 2\Delta bd_1\Delta l - 2\Delta l\Delta d_1\Delta l - 2\epsilon\Delta l \\
 \Delta d_2 &= \Delta d_1 - (2a\Delta l + 2\Delta a\Delta l + 2bd_1\Delta l + 2b\Delta d_1\Delta l + 2\Delta bd_1\Delta l + 2\Delta b\Delta d_1\Delta l + 2\epsilon\Delta l) \\
 \therefore V(d_2) &= V(d_1) + 4V(l)[a^2 + V(a) + b^2d_1^2 + b^2V(d_1) + d_1^2V(b) + V(b)V(d_1) + V(\epsilon)] \\
 &= V(d_1) + 4V(l)[V(d_1)\{b^2 + V(b)\} + a^2 + V(a) + b^2d_1^2 + d_1^2V(b) + V(\epsilon)] \quad (3)'
 \end{aligned}$$

前述と同様に

$V(d_1)$ は其の調査方法により前述の様に变化する.

$V(a)$ は a の分散

$V(b)$ は b の分散

$V(l)$ は $\frac{1}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2)$

$V(\epsilon)$ は σ^2

である. 故に (3)' 式は

$$V(d_2) = V(d_1) + \frac{4}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2)[V(d_1)\{b^2 + V(b)\} + a^2 + V(a) + b^2d_1^2 + d_1^2V(b) + \sigma^2] \quad (4)'$$

となる.

IV 数 値 的 結 果

前述の様にここで用いた data をとつた林分は樹高の略, 等しい林分であるので全樹木

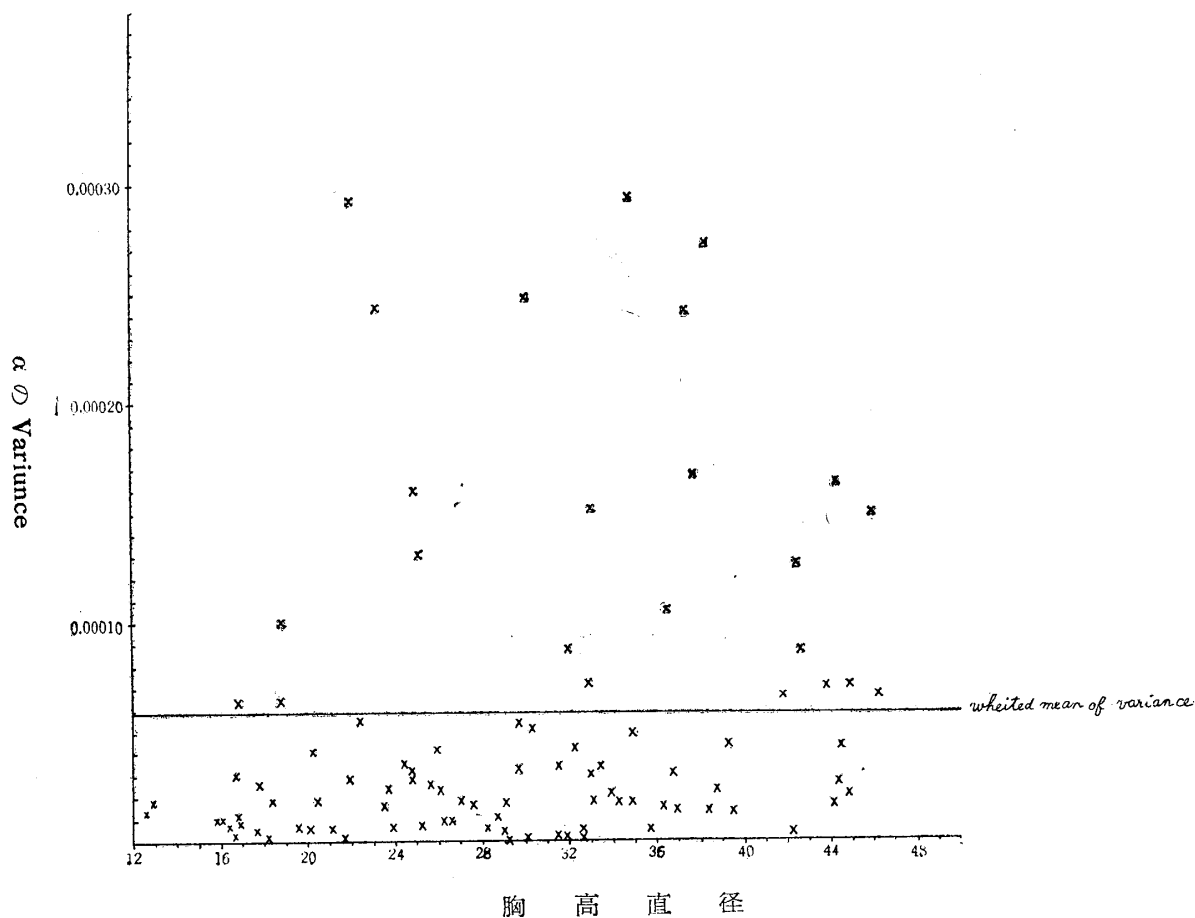
について同一の樹幹曲線を用いる事は出来ず胸高直径が大になるにつれて梢殺の傾向が見られ、又 $r \neq 2$ であるので III の理論の項でのべた (1)' (2)' (3)' (4)' 等の式を用いなければならない。a, b 及び $V(a)$, $V(b)$, $V(\epsilon)$ を求める為に (1)' を変型して

$$d_1 - d_2 = 2(a + bd_1)l$$

$$\frac{d_1 - d_2}{2l} = a + bd_1 \quad (1)'$$

とし (1)' につき最小二乗法解を求める。この data は一本の樹木につき 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 m の 5ヶ所において直径を測定しているが厳密には 1 本の樹木について $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ の値は等しくない。しかし前述の仮定の様にはここでは 1 本の樹木については $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ の値は等しいとしている為にこの 1.2m を中心とした $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ の値の平均値を以てその樹木の樹幹傾斜角即ち $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ とした。その時にはこの平均の $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ の値には明らかに誤差を生ずる。この分散を各樹木につき求めてそれを胸高直径に対応して図示すると Fig. 3 の如くなり、胸高直径の大小にかかわらず略々一定の関係がみられる。故にこの値はすべて

Fig. 3.



同一の重みを持つと仮定する. 又 d_1 の測定値は最大直径と最小直径との平均値であるので誤差はないものとする. Deming 氏の新しい最小二乗法により (1)' 式の a, b を求めると

$$a = -0.0015$$

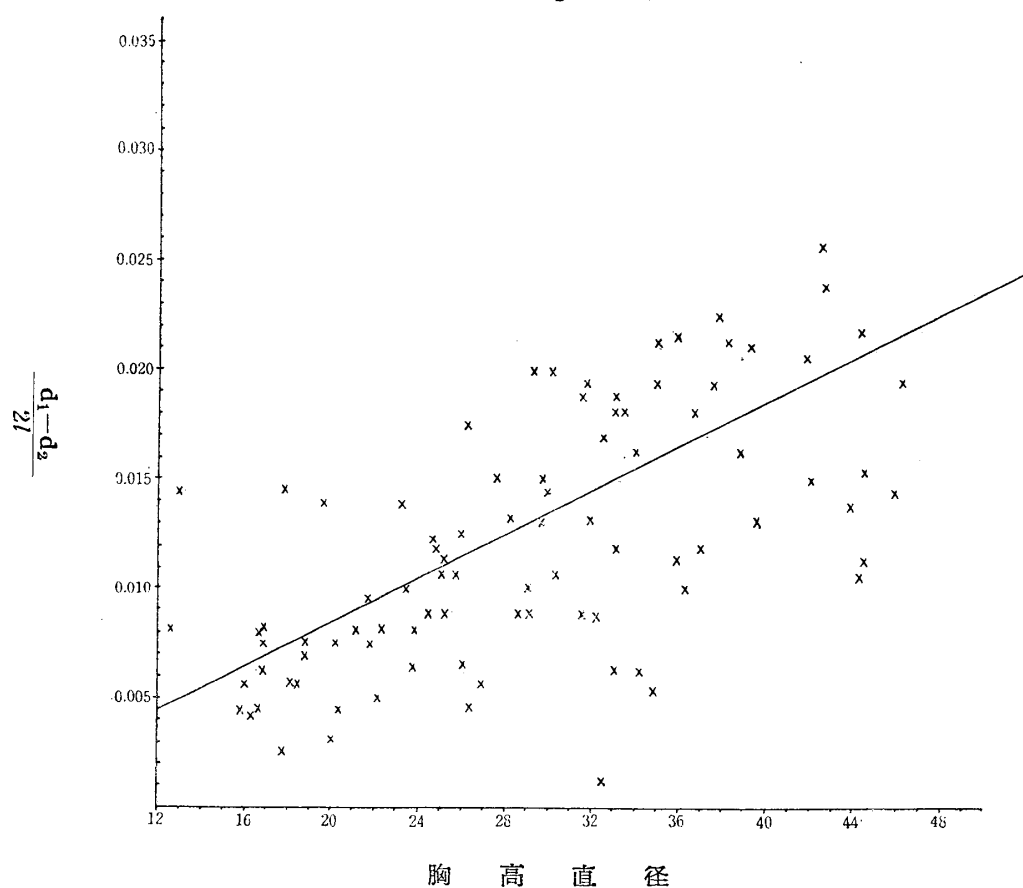
$$b = 0.0005$$

となる故

$$\frac{d_1 - d_2}{2l} = -0.0015 + 0.0005 d_1 \quad (5)$$

となる. この直線を x 軸に, 胸高直径を y 軸に $\frac{d_1 - d_2}{2l}$ をとった図に入れると Fig. 4 の如くなり, この直線はよくあてはまっている事が図からも明らかにみられる. (5) 式を (1)' の型に戻すと

Fig. 4.



$$d_2 = d_1 - 2(-0.0015 + 0.0005 d_1)l \quad (6)$$

となる. 又

$$\min. S = 0.00255$$

となる故

$$\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.00002713$$

$$C_{11}=0.12323$$

$$C_{22}=0.00013$$

$$\therefore V(a)=0.00000334$$

$$V(b)=0.00000004$$

となる。又胸高直径を測定する場合、胸高を中心として約 10cm 上下を一様に測定するものとする

$$V(l)=\frac{10^2}{3}=33.3 \quad V(\bar{l})=0.3469$$

故に平均直径 29.6cm の測定高の胸高を中心とし 10cm 上下の変動による分散は

$$V(d_2)=V(d_1)+4(0.3469)[V(d_1)\{(0.0005)^2+0.00000004\}+(0.0015)^2+0.00000334+(0.0005)^2(29.6)^2+(29.6)^2(0.00000004)+0.00002713] \quad (7)$$

となる。(7) 式の $V(d_1)$ に前述の調査法に応じた値を代入すれば、その調査法による分散が計算される。即ち

〔A〕 任意方向の直径をとる時

(a) Sampling 調査の時は

$$V(d_1)=81.7659+0.2969 \\ =82.0628$$

$$V(\bar{d}_1)=0.8517+0.0031 \\ =0.8548$$

$$\therefore V(d_2)=0.8517+0.00349831 \\ =0.85519831$$

故に分散の増加は

$$\frac{0.00349831}{0.8517}=0.004$$

即ち約 0.4 % である。この林分における平均直径の推定値としては

$$29.6 \pm 1.96 \sqrt{0.85519831} \\ =29.6 \pm (1.96)(0.92) \\ =29.6 \pm 1.8 \text{ cm}$$

を得る。

(b) 毎木調査の時は

$$V(d_1)=0.2969$$

$$V(\bar{d}_1)=0.0031$$

$$\therefore V(d_2)=0.0031+0.00039797 \\ =0.00349797$$

となり平均直径の推定値は

$$29.6 \pm 1.96 \sqrt{0.00349797} \\ =29.6 \pm (1.96)(0.059) \\ =29.6 \pm 0.1 \text{ cm}$$

を得る。

〔B〕 真の直径をとる時

(a) Sampling 調査の時は

$$V(\bar{d}_1) = 0.8517$$

$$\therefore V(\bar{d}_2) = 0.8517 + 0.00039831 \\ = 0.85209831$$

故に分散の増加は

$$\frac{0.00039831}{0.8517} = 0.0005$$

即ち約 0.05 % である。そして平均直径の推定値は

$$29.6 \pm 1.96 \sqrt{0.85209831} \\ = 29.6 \pm (1.96)(0.92) \\ = 29.6 \pm 1.8 \text{ cm}$$

を得実用上は直径を任意方向で測定しても又正確に測定しても精度は変らない。

(b) 毎木調査の時は

$$V(\bar{d}_1) = 0$$

$$\therefore V(\bar{d}_2) = 0.00039797$$

故に平均直径の推定値は

$$29.6 \pm (1.96) \sqrt{0.00039797} \\ = 29.6 \pm (1.96)(0.02) \\ = 29.6 \pm 0.04 \text{ cm}$$

を得る。

次に測定高の平均が胸高とどの位違つたならばその直径は有意に胸高直径と異なるかを調べてみる。ここでは前述の通り測定高はその平均を中心として上下 10cm の間を同じ頻度でとられるものとする。(5式)より

$$\bar{d}_1 - \bar{d}_2 = 2(-0.0015 + 0.0005\bar{d}_1)l$$

$$\therefore \frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{\sqrt{V(\bar{d}_1) + V(\bar{d}_2)}} = t$$

ここで $V(\bar{d}) = V(\bar{d})$ とすると

$$\frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{\sqrt{2V(\bar{d}_2)}} = \frac{2(-0.0015 + 0.0005\bar{d}_1)l}{\sqrt{2V(\bar{d}_2)}} = t$$

$\bar{d}_1 = 29.6$ を代入すると

$$\frac{-0.0030l + 0.296l}{\sqrt{2V(\bar{d}_2)}} = 1.96$$

$$\therefore 0.0266l = (1.96)(1.41)D(\bar{d}_2) \quad (6)$$

(6) 式の $D(\bar{d}_2)$ が与えられたならば許容され得る l が算出出来る。

まず単木抽出による任意方向並びに測定高の変化による測定が行われる場合には (1.96) $D(\bar{d}_2)$ は 1.8cm となるから

$$0.0266l = (1.41)(1.8) \\ = 2.54$$

$$\therefore l = 95\text{cm}$$

即ち胸高を中心として上下 95cm 以内の点を中心として上下 10cm の中にて直径を測定しても有意差はない。又この事は直径を正確に測定しても $1.96D(\bar{d}_2)$ はやはり 1.8cm となるから同じである。毎木調査の時は方向は任意方向で測定高が上下 10cm 変動する時は

$$0.0266l = (1.41)(0.1)$$

$$= 0.141$$

$$l = 5.3\text{cm}$$

測定高のみ変化する時は

$$0.0266 = (1.41)(0.04)$$

$$= 0.0564$$

$$\therefore l = 2.1\text{cm}$$

となる。即ち任意方向で測定高が上下 10cm 変動する時はその中心高と胸高との差は 5.3 cm 迄又正しい直径が測定される時は 2.1cm 迄が許容出来る。但し若しも測定高の変動が 10cm 以上になる時は許容される中心高と胸高との差は増大する事は当然である。

V 考 察

IV の数値的結果より明らかな様に測定高がその平均を中心として上下に 10cm の中で同じ頻度でとられる時の分散の増加率は真の直径が測定される場合は 0.05 %に過ぎず任意方向の直径が測定される場合でも 0.4 %に過ぎない。(この data では第 1 報の霧島国有林の data に比し測定方向が任意にとられる為の分散の増加率は約 0.36 %である)。故に胸高を中心として上下に約 10cm 位の測定高の変動は実用上は問題にならない。又 Sampling 調査においては測定高の中心が胸高から 95cm 以内のへだたりは有意差は認められない。(但し若しも data の真の直径の分散がこの data の分散よりも小になれば当然 95 cm より小になる)。しかし毎木調査の時では測定方向を任意にとつても許容出来る中心高と胸高のへだたりは 5.3cm になり、真の直径を測定した場合は僅かに 2.1cm になる。故に毎木調査の時は測定高の変動の中心は常に胸高と 5 cm 以上離れなくてはならないという事を念頭におき、この中心より上下 10cm 位の変動で測定すれば実用上の精度から云つて測定高による誤差は問題にはならないと思う。

最後に本研究を御指導下さった木梨助教授並びに調査に便宜を与えられた熊本営林局並河技官並びに菊池営林署に謝意を表する。(1953年5月28日)

参 考 文 献

- (1) 高田 和彦：胸高直径には方向により差があるか 林学会九州支部 研究抄報第6回
- (2) 高田 和彦：胸高直径測定上の誤差について 第一報 測定方向とよる誤差
- (3) W. E. Deming : Statitical Adjustment of Data
森口 繁一：推計学による Data の纏め方
- (4) Tischendorf : Lehrbuchder Holzmassenermittlung

Résumé

The first report treated the error owing to the direction of measurement. The second report treats the error owing to the height of measurement. If the stem curves of all trees are identical and expressed by kunze's stem curve equation and γ is about 2 in the stand, the diameter d_2 at a distance l cm from the breast height is expressed by Equation (1), where d_1 is d. b. h. and A is $\tan \alpha$ (see fig. 1). Then, if the diameter is measured by equal frequency within l cm above and below the breast height, the variance of d is expressed by Equation (3), where $V(d_1) = V(D_{lt}) + \frac{1}{12}(\bar{R}^2 + \sigma_R^2)$ (see the first report), $V(\epsilon)$ is σ^2 by the least square solution, and $V(l) = \frac{1}{3}(\bar{l}^2 + \sigma_l^2)$. In the practical stand, $\gamma \neq 2$, and, especially, in the even aged artificial stand, the variation of height is smaller than the variation of d. b. h. The stem curves of all trees, therefore, are not identical in the stand. In this case, the equation corresponding to (1) is (1'), so that the variance of d_2 is expressed by (3'). Since these data were taken from the even-aged artificial stand, Equation (5') is used. Inserting the practical data in Equation (3'), the increase of variance owing to both the variations of height and direction of measurement is 0.4 per cent, and the increase of variance owing to the variation of height of measurement only is 0.05 per cent. The variation of height, therefore, is out of the question. In the sampling survey, the difference between the center of measurement height and breast height is permitted to about 95 cm, but in the every tree measurement, the difference is permitted to about 5.3 cm. In the every tree measurement, therefore, care must be taken so that the center of measurement height be located within about 5 cm from the breast height.