

黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と

岩本，誠一
九州大学大学院経済学研究院：教授

江口，将生
九州大学経済学府：東鷹高校

吉良，知文
九州大学経済学府博士前期課程

<https://doi.org/10.15017/15758>

出版情報：経済学研究. 74 (4), pp.1-19, 2008-02-15. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



黄金・白銀・青銅

—— 数と比と形と率と ——

岩 本 誠 一
江 口 将 生
吉 良 知 文

概要

本論文では、黄金数、白銀数、青銅数を中心にそれぞれの比・形・率との数理的関係を体系的に考察する。まず、黄金数、白銀数、青銅数を黄金2次方程式、白銀2次方程式、青銅2次方程式の正の解としてそれぞれ定義し、この3つの数を用いて、黄金比、白銀比、青銅比を導入する。次に形として、この3つの比をもつ長方形、黄金長方形、白銀長方形、青銅長方形を定義する。さらに率として、この3つの数を求める2つの近似方法——連分数法と多重根号法——の縮小率に着目して、2つの縮小率の比がそれぞれ黄金比、白銀比、青銅比であることを示す。最後に、一般の第 n 貴金属数についても比、長方形、縮小率との関係を述べる。

1 はじめに

黄金数 (Golden number) または黄金比 (Golden ratio) については歴史的にも様々な分野で研究されよく知られている [1, 2, 13–16]。実生活においては、名刺やクレジットカードや国旗で黄金長方形が使われている。芸術や建築分野でも黄金比がよく利用されている。具体的には、「ミロのビーナス」「レオナルド・ダ・ヴィンチのウィトルウィウスの人体図」「モーツァルトのソナタ」「ギリシャのパルテノン神殿」「エジプトのピラミッド」などが挙げられる [1, 2, 12–16]。自然界においても様々なところで黄金比が見られる。たとえば、「オウム貝が描く螺旋」「ひまわりの種の配列」「ハリケーンの渦巻き雲」などが挙げられる [1, 2, 12–16]。また「足の裏からへそまでと頭頂までの比率」「指先から肘までと肩までの比率」など私たち人間にも黄金比が見られる [1, 14, 15]。黄金比は西欧文明において発見され、このように世界的に用いられてきた。

一方、最近の研究では黄金比自身はあまり研究されていない。黄金比と最適化の関係についてはこれまでわずかに [15] がある。しかし、黄金(かつ)最適については黄金最適解、黄金最適軌道、黄金最適政策など動的最適化を中心に最近興味ある成果が報告されている [3–11]。

白銀数 (Silver number) はあまり知られていないが、白銀比 (Silver ratio) については、『日本の黄金比』といわれ、日本の建築技術 (木造建築) に欠かせないものである。古くから「曲尺」という大工道具で使われてきた [13]。また、「法隆寺」や「雪舟の山水画」「浮世絵」などでも白銀比が見られる。実生活においては、A4版の用紙 (白銀長方形) が最も身近な白銀比である [13]。

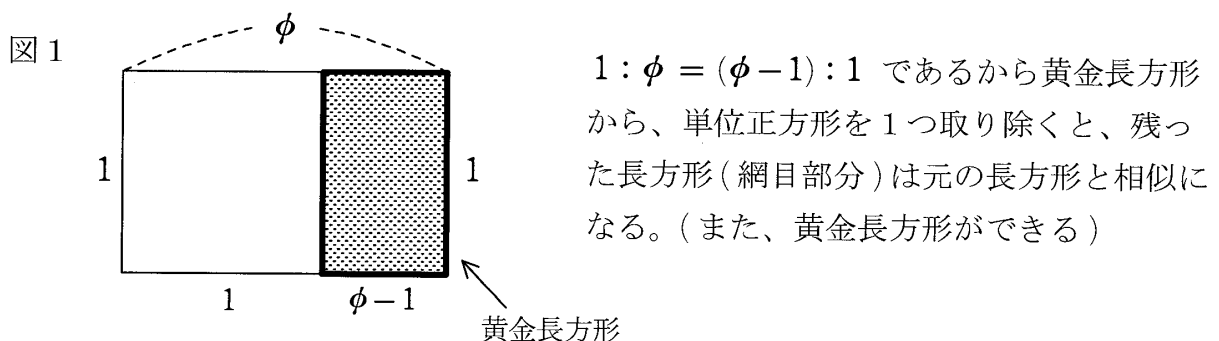
青銅数 (Bronze number) や青銅比 (Bronze ratio) については、ほとんど知られていない。しかし本論文では、黄金・白銀に続くもの (数・比) として青銅についても2次方程式に基づいて体系的に考察していく。

以下では、黄 (金)、白 (銀)、青 (銅)、… を縦糸に、数、比、形、率を横糸に考える。結果として黄金 (フィボナッチ) 2次方程式、白銀2次方程式、青銅2次方程式が基本的な役割を果たしていることがわかる。

2 黄金比・白銀比・青銅比

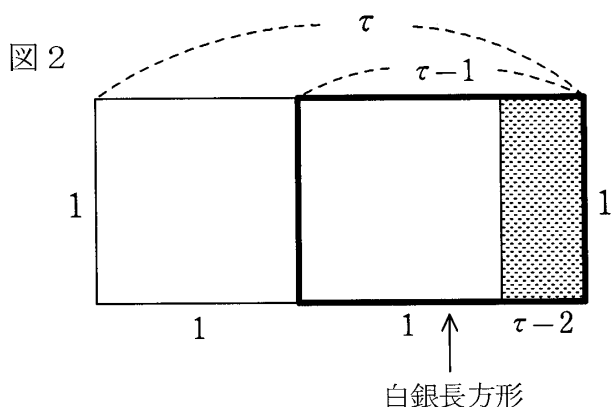
黄金数 (Golden number) とは、2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解をいい、 ϕ で表す。 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$ この方程式を黄金2次方程式 (Golden quadratic equation) という。このとき、黄金比とは $1 : \phi \doteq 1 : 1.618$ であることが知られている。縦と横の長さの比が $1 : \phi$ の長方形を黄金長方形 (Golden rectangle) という。 $1 : \phi = (\phi - 1) : 1$ である。これに着目して、以下では一般に $1 : (\phi - 1) \doteq 1 : 0.618$ を黄金比 (Golden ratio) といおう。

黄金比の重要な性質としては、図1のようなものがある。



白銀数 (Silver number) とは、2次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の正の解をいい、 τ で表す。 $\tau = 1 + \sqrt{2} \doteq 2.414$ この方程式を白銀2次方程式 (Silver quadratic equation) という。このとき、白銀比 (Silver ratio) とは $1 : \sqrt{2} \doteq 1 : 1.414$ すなわち $1 : (\tau - 1)$ をいう。縦と横の長さの比が $1 : (\tau - 1) = 1 : \sqrt{2}$ の長方形は、白銀長方形 (Silver rectangle) といわれている。

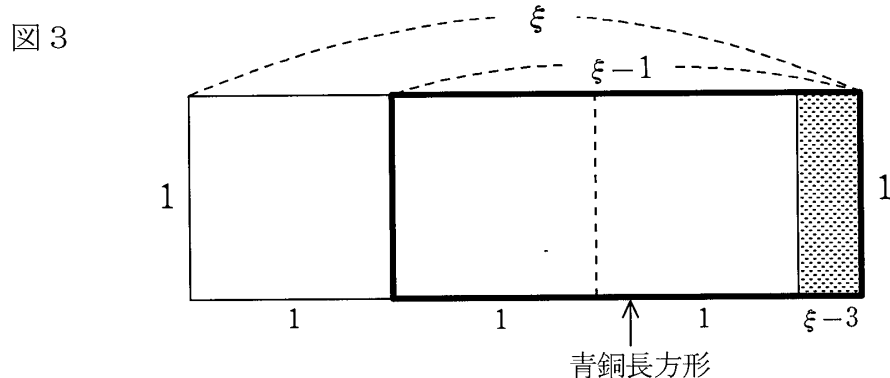
図2のように $1:\tau$ の長方形から単位正方形を2つ取り除くと、



$1:\tau = (\tau-2):1$ であるから残った長方形(網目部分)は、元の長方形と相似となる。また、縦と横の長さの比が $1:(\tau-1)$ の長方形は、白银長方形である。

青铜数 (Bronze number) とは、2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の正の解をいい、 ξ で表す。 $\xi = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \doteq 3.303$ この方程式を青铜2次方程式 (Bronze quadratic equation) という。このとき、青铜比 (Bronze ratio) とは $1:(\xi-1) = 1:\frac{1+\sqrt{13}}{2} \doteq 1:2.303$ をいう。

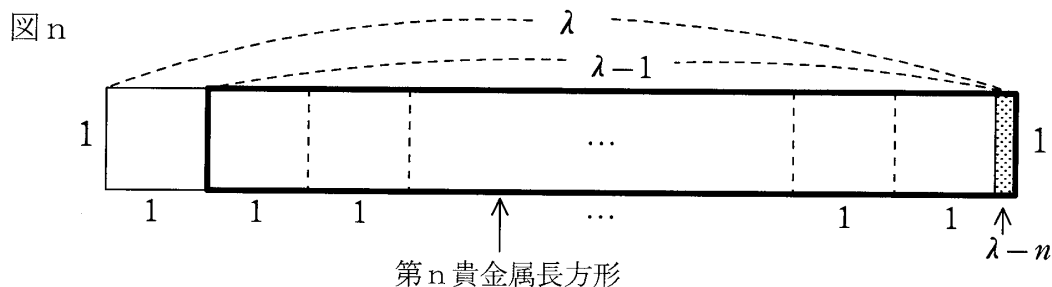
図3のように $1:\xi$ の長方形から単位正方形を3つ取り除くと、



$1:\xi = (\xi-3):1$ であるから、残った長方形(網目部分)は元の長方形と相似である。また、縦と横の長さの比が $1:(\xi-1)$ の長方形を、青铜长方形 (Bronze rectangle) と呼ぼう。

上記の結果から、1 番目を黄金数と黄金比、2 番目を白银数と白银比、3 番目を青铜数と青铜比として考えると、これら3つは規則的であることがわかる。

では n を4以上の任意の自然数として、 n 番目を考えよう。 $1:\lambda$ ($n < \lambda < n+1$) の比の長方形から、図 n のように単位正方形を n 個取り除くと、残った長方形が元の長方形と相似になるとき、



$$1 : \lambda = (\lambda - n) : 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - n\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0 \text{ だから } \lambda = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

であることがわかる。このときの $\lambda = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ を第 n 貴金属数 (n -th noble metal number) といい、 $1 : (\lambda - 1)$ の比を第 n 貴金属比 (n -th noble metal ratio) という。また縦と横の長さの比が $1 : (\lambda - 1)$ の長方形を第 n 貴金属長方形 (n -th noble metal rectangle) と呼ぶことにしよう。

3 連分数と黄金数・白銀数・青銅数

(1) 黄金数 ϕ

黄金数 ϕ は、2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解である。したがって、

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \text{ すなわち } \phi^2 = \phi + 1$$

を満たす。両辺を ϕ (> 0) で割ると

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

となる。①を①の右辺に代入すると

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

となり、更に代入すると $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}$ が成り立つ。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}}$$

となる。これを黄金数 ϕ の連分数による表示という。

ここで、 $\phi_1=1$ 、 $\phi_2=1+\frac{1}{1}=2$ 、 $\phi_3=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=1.5$ 、… とすると

黄金数 ϕ は、次で定まる数列 $\{\phi_n\}$ の極限 ϕ_∞ である。

$$\phi_{n+1}=1+\frac{1}{\phi_n}、\phi_1=1$$

数列 $\{\phi_n\}$ は次のようになっていることがわかる。

$$\phi_1 < \phi_3 < \phi_5 < \dots < \phi_{2n-1} < \dots < \phi_\infty (= \phi) < \dots < \phi_{2n} < \dots < \phi_6 < \phi_4 < \phi_2$$

また、数列 $\{\phi_n\}$ を n が奇数のときと、偶数のときに分けて順に並べると

$$\phi_1=1+\frac{0}{1}、\phi_3=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=1+\frac{1}{2}、\phi_5=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=1+\frac{3}{5}$$

$$\phi_7=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}=1+\frac{8}{13}、\dots$$

$$\phi_2=1+\frac{1}{1}、\phi_4=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=1+\frac{2}{3}、\phi_6=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=1+\frac{5}{8}、\dots$$

となり、整理すると

$$\begin{array}{ll} \phi_1=1+\frac{0}{1} & \phi_2=1+\frac{1}{1} \\ \phi_3=1+\frac{1}{2} & \phi_4=1+\frac{2}{3} \\ \phi_5=1+\frac{3}{5} & \phi_6=1+\frac{5}{8} \\ \phi_7=1+\frac{8}{13} & \phi_8=1+\frac{13}{21} \\ \phi_9=1+\frac{21}{34} & \phi_{10}=1+\frac{34}{55} \\ \dots & \dots \end{array}$$

また数列 $\{\phi_n\}$ を順に並べると

$$\begin{array}{ll} \phi_1=1 & \phi_6=\frac{13}{8} \\ \phi_2=2 & \phi_7=\frac{21}{13} \\ \phi_3=\frac{3}{2} & \phi_8=\frac{34}{21} \\ \phi_4=\frac{5}{3} & \phi_9=\frac{55}{34} \\ \phi_5=\frac{8}{5} & \phi_{10}=\frac{89}{55} \\ \dots & \dots \end{array}$$

となる。いずれの場合もフィボナッチ数列が現れる。大変興味深い結果であり、黄金数とフィボナッチ数列の関係の深さが伺える。

(2) 白銀数 τ

白銀数 τ は、2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の正の解である。したがって、

$$\tau^2 - 2\tau - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \tau^2 = 2\tau + 1$$

を満たす。両辺を τ (> 0) で割ると

$$\tau = 2 + \frac{1}{\tau} \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

②の右辺に②を代入すると

$$\tau = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\tau}}$$

となり、更に代入すると $\tau = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\tau}}}$ が成り立つ。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\tau = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}}$$

となる。これを白銀数 τ の連分数による表示という。

ここで、 $\tau_1 = 2$ 、 $\tau_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$ 、 $\tau_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 2.4$ 、 $\cdots$ とすると

白銀数 τ は、次の数列 $\{\tau_n\}$ の極限 τ_∞ である。

$$\tau_{n+1} = 2 + \frac{1}{\tau_n}, \quad \tau_1 = 2$$

数列 $\{\tau_n\}$ も、数列 $\{\phi_n\}$ と同様に次の性質があることがわかる。

$$\tau_1 < \tau_3 < \tau_5 < \cdots < \tau_{2n-1} < \cdots < \tau_\infty (= \tau) < \cdots < \tau_{2n} < \cdots < \tau_6 < \tau_4 < \tau_2$$

(3) 青銅数 ξ

青銅数 ξ は、2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の正の解である。したがって、

$$\xi^2 - 3\xi - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \xi^2 = 3\xi + 1$$

を満たす。両辺を ξ (> 0) で割ると

$$\xi = 3 + \frac{1}{\xi} \quad \cdots \quad \textcircled{3}$$

となる。③を③の右辺に代入すると

$$\xi = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi}}$$

となり、更に代入すると $\xi = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi}}}$ が成り立つ。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\xi = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

となる。これを青銅数 ξ の連分数による表示という。

ここで、 $\xi_1 = 3$ 、 $\xi_2 = 3 + \frac{1}{3} = 3.\dot{3}$ 、 $\xi_3 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = 3.3$ 、 $\dots$ とすると

青銅数 ξ は、次の数列 $\{\xi_n\}$ の極限 ξ_∞ である。

$$\xi_{n+1} = 3 + \frac{1}{\xi_n}, \quad \xi_1 = 3$$

数列 $\{\xi_n\}$ も、数列 $\{\phi_n\}$ 、 $\{\tau_n\}$ と同様に次の性質があることがわかる。

$$\xi_1 < \xi_3 < \xi_5 < \dots < \xi_{2n-1} < \dots < \xi_\infty (= \xi) < \dots < \xi_{2n} < \dots < \xi_6 < \xi_4 < \xi_2$$

(4) 第n貴金属数 λ

ここではnを4以上の任意の自然数とする。このとき、第n貴金属数を λ としよう。

第n貴金属数 λ は、2次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解だから

$$\lambda^2 - n\lambda - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 = n\lambda + 1$$

を満たす。両辺を λ (> 0) で割ると

$$\lambda = n + \frac{1}{\lambda} \quad \dots \quad ④$$

となる。④を④の右辺に代入すると $\lambda = n + \frac{1}{n + \frac{1}{\lambda}}$ となり、更に代入すると

$$\lambda = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\lambda}}}$$

が成り立つ。この操作を無限に続けると、形式的には

$$\lambda = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \dots}}}}$$

となる。これを第n貴金属数 λ の連分数による表示という。

ここで、 $\lambda_1=n$ 、 $\lambda_2=n+\frac{1}{n}=\frac{n^2+1}{n}$ 、 $\lambda_3=n+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=\frac{n^3+2n}{n^2+1}$ 、 $\dots$ とすると、

第 n 貴金属数 λ は、次の数列 $\{\lambda_n\}$ の極限 λ_∞ である。

$$\lambda_{n+1}=n+\frac{1}{\lambda_n} \quad , \quad \lambda_1=n$$

数列 $\{\lambda_n\}$ も数列 $\{\phi_n\}$ 、 $\{\tau_n\}$ 、 $\{\xi_n\}$ と同様に次の性質があることがわかる。

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_5 < \dots < \lambda_{2n-1} < \dots < \lambda_\infty (= \lambda) < \dots < \lambda_{2n} < \dots < \lambda_6 < \lambda_4 < \lambda_2$$

(5) 証明

上記の、黄金数に関する数列 $\{\phi_n\}$: $\phi_{n+1}=1+\frac{1}{\phi_n}$ 、 $\phi_1=1$

白銀数に関する数列 $\{\tau_n\}$: $\tau_{n+1}=2+\frac{1}{\tau_n}$ 、 $\tau_1=2$

第 n 貴金属数に関する数列 $\{\lambda_n\}$: $\lambda_{n+1}=n+\frac{1}{\lambda_n}$ 、 $\lambda_1=n$

についてそれぞれ $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ となることを証明しよう。

証明

(i) 黄金数 ϕ

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1} - \phi| &= \left| 1 + \frac{1}{\phi_n} - \phi \right| = \left| \frac{\phi_n + 1 - \phi \phi_n}{\phi_n} \right| = \left| \frac{(1 - \phi)\phi_n + 1}{\phi_n} \right| \\ &= \left| \frac{(1 - \phi)\phi_n + (\phi^2 - \phi)}{\phi_n} \right| = \left| \frac{(1 - \phi)\phi_n - \phi(1 - \phi)}{\phi_n} \right| \\ &= \left| \frac{(1 - \phi)(\phi_n - \phi)}{\phi_n} \right| = \frac{\phi - 1}{\phi_n} |\phi_n - \phi| \leq (\phi - 1) |\phi_n - \phi| \quad (\because \phi_n \geq 1) \end{aligned}$$

$$\therefore |\phi_{n+1} - \phi| \leq (\phi - 1) |\phi_n - \phi| \quad \dots \quad (g)$$

これより

$$\begin{aligned} |\phi_n - \phi| &\leq (\phi - 1) |\phi_{n-1} - \phi| \leq (\phi - 1)^2 |\phi_{n-2} - \phi| \leq \dots \leq (\phi - 1)^{n-1} |\phi_1 - \phi| \\ &= (\phi - 1)^{n-1} |1 - \phi| = (\phi - 1)^n \end{aligned}$$

$0 < \phi - 1 < 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi - 1)^n = 0$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n - \phi| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$$

終

なお、(g)における $\phi - 1$ を縮小率 (contraction rate) という。

(ii) 白銀数 τ

$$\begin{aligned}
 |\tau_{n+1} - \tau| &= \left| 2 + \frac{1}{\tau_n} - \tau \right| = \left| \frac{2\tau_n + 1 - \tau\tau_n}{\tau_n} \right| = \left| \frac{(2-\tau)\tau_n + \tau^2 - 2\tau}{\tau_n} \right| \\
 &= \left| \frac{(2-\tau)(\tau_n - \tau)}{\tau_n} \right| = \frac{\tau-2}{\tau_n} |\tau_n - \tau| \leq (\tau-2) |\tau_n - \tau| \quad (\because \tau_n \geq 2) \\
 \therefore |\tau_{n+1} - \tau| &\leq (\tau-2) |\tau_n - \tau| \quad \cdots \quad (s)
 \end{aligned}$$

これより

$$|\tau_n - \tau| \leq (\tau-2)^{n-1} |\tau_1 - \tau| = (\tau-2)^n$$

$0 < \tau-2 < 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau-2)^n = 0$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n - \tau| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$$

終

なお、(s)における縮小率は $\tau-2$ である。

(iii) 第 n 貴金属数 λ

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{n+1} - \lambda| &= \left| n + \frac{1}{\lambda_n} - \lambda \right| = \left| \frac{n\lambda_n + 1 - \lambda\lambda_n}{\lambda_n} \right| = \left| \frac{(n-\lambda)(\lambda_n - \lambda)}{\lambda_n} \right| \\
 &= \frac{\lambda-n}{\lambda_n} |\lambda_n - \lambda| \leq (\lambda-n) |\lambda_n - \lambda| \quad (\because \lambda_n \geq n) \\
 \therefore |\lambda_{n+1} - \lambda| &\leq (\lambda-n) |\lambda_n - \lambda| \quad \cdots \quad (n)
 \end{aligned}$$

これより

$$|\lambda_n - \lambda| \leq (\lambda-n)^{n-1} |\lambda_1 - \lambda| = (\lambda-n)^n$$

$0 < \lambda-n < 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda-n)^n = 0$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n - \lambda| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$$

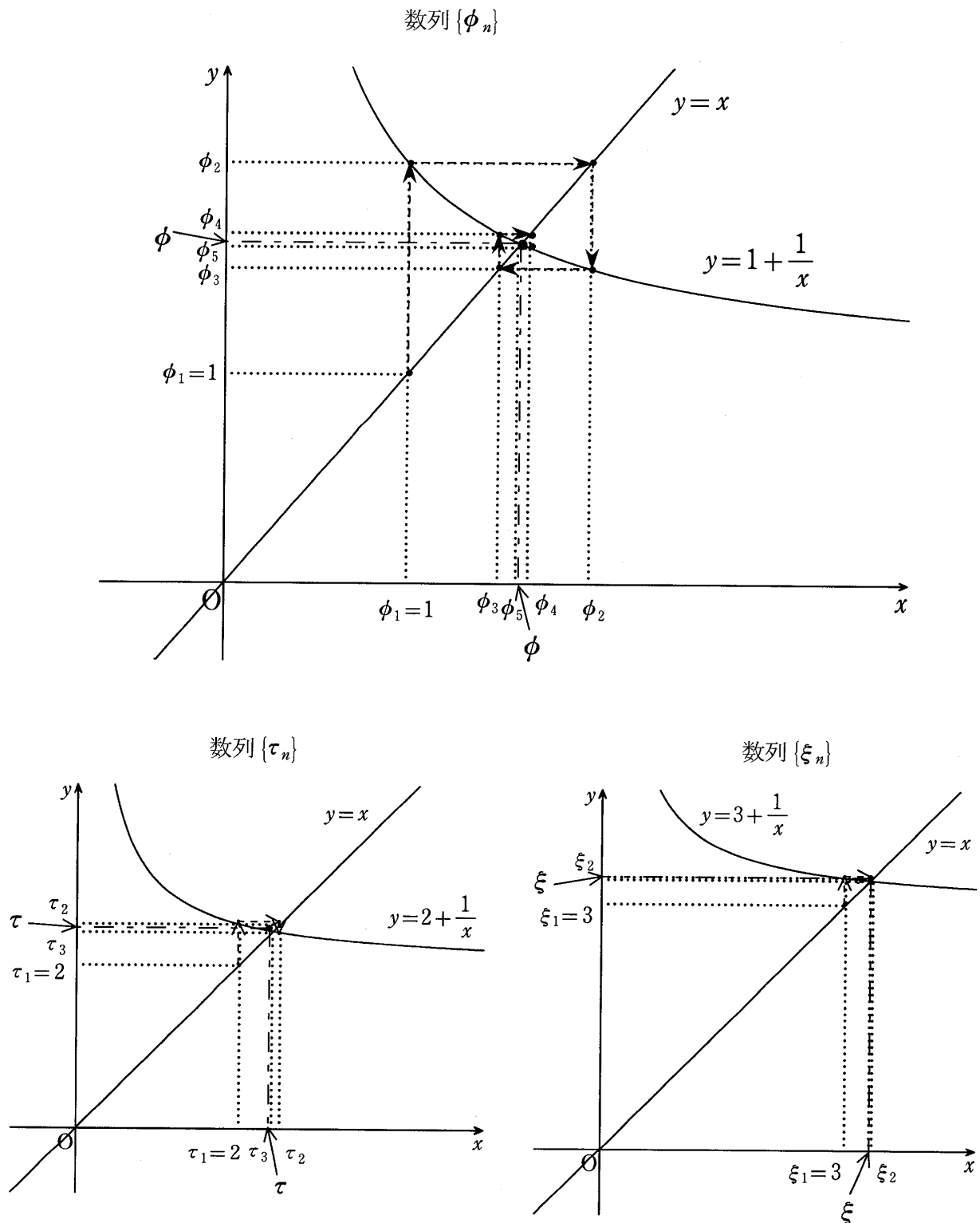
終

なお、(n)における縮小率は $\lambda-n$ である。

上記の証明を簡単に**分数法**といおう。

(6) グラフ

黄金数 ϕ 、白銀数 τ 、青銅数 ξ について、上記の連分数表示に関する数列 $\{\phi_n\}$ 、 $\{\tau_n\}$ 、 $\{\xi_n\}$ を描いてみると、次のようになる。



4 多重根号と黄金数・白銀数・青銅数

(1) 黄金数 ϕ

黄金数 ϕ は、2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解である。したがって

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \phi^2 = 1 + \phi \Leftrightarrow \phi = \sqrt{1 + \phi} \quad \cdots \quad ①$$

が成り立つ。①を①の右辺に代入すると

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}$$

となり、更に代入すると $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}}$ となる。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

となる。これを黄金数 ϕ の多重根号による表示という。

ここで、($a_0 = 0$)、 $a_1 = \sqrt{1}$ 、 $a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$ 、 $a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$ 、 $\cdots$ とすると黄金数 ϕ は、次の数列 $\{a_n\}$ の極限 a_∞ である。

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}、a_1 = 1 \quad (a_0 = 0)$$

数列 $\{a_n\}$ は次のようになっていることがわかる。

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_n < \cdots < a_\infty (= \phi)$$

(2) 白銀数 τ

白銀数 τ は、2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の正の解である。したがって、

$$\tau^2 - 2\tau - 1 = 0 \Leftrightarrow \tau^2 = 1 + 2\tau \Leftrightarrow \tau = \sqrt{1 + 2\tau} \quad \cdots \quad ②$$

が成り立つ。②を②の右辺に代入すると

$$\tau = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\tau}}$$

となり、更に代入すると $\tau = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\tau}}}$ となる。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\tau = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\cdots}}}}}$$

となる。これを白銀数 τ の多重根号による表示という。

ここで、($b_0 = 0$)、 $b_1 = \sqrt{1}$ 、 $b_2 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1}}$ 、 $b_3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1}}}$ 、 $\cdots$ とすると白銀数 τ は、次の数列 $\{b_n\}$ の極限 b_∞ である。

$$b_{n+1} = \sqrt{1 + 2b_n}、b_1 = 1 \quad (b_0 = 0)$$

数列 $\{b_n\}$ は次のようになっていることがわかる。

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < \cdots < b_n < \cdots < b_\infty (= \tau)$$

(3) 青銅数 ξ

青銅数 ξ は、2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の正の解である。したがって

$$\xi^2 - 3\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = 1 + 3\xi \Leftrightarrow \xi = \sqrt{1 + 3\xi} \quad \cdots \quad \textcircled{3}$$

が成り立つ。③を③の右辺に代入すると

$$\xi = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\xi}}$$

となり、更に代入すると $\xi = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\xi}}}$ となる。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\xi = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{\cdots}}}}}$$

となる。これを青銅数 ξ の多重根号による表示という。

ここで、 $(c_0 = 0)$ 、 $c_1 = \sqrt{1}$ 、 $c_2 = \sqrt{1 + 3\sqrt{1}}$ 、 $c_3 = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{1}}}$ 、 $\cdots$ とすると青銅数 ξ は、次の数列 $\{c_n\}$ の極限 c_∞ である。

$$c_{n+1} = \sqrt{1 + 3c_n}、c_1 = 1 \quad (c_0 = 0)$$

数列 $\{c_n\}$ は次のようになっていることがわかる。

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < \cdots < c_n < \cdots < c_\infty (= \xi)$$

(4) 第 n 貴金属数 λ

第 n 貴金属数 λ は、2 次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解である。したがって、

$$\lambda^2 - n\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 + n\lambda \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{1 + n\lambda} \quad \cdots \quad \textcircled{4}$$

が成り立つ。④を④の右辺に代入すると

$$\lambda = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\lambda}}$$

となり、更に代入すると $\lambda = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\lambda}}}$ となる。

この操作を無限に続けると、形式的には

$$\lambda = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{\cdots}}}}}$$

となる。これを第 n 貴金属数 λ の多重根号による表示という。

ここで、 $(d_0=0)$ 、 $d_1=\sqrt{1}$ 、 $d_2=\sqrt{1+n\sqrt{1}}$ 、 $d_3=\sqrt{1+n\sqrt{1+n\sqrt{1}}}$ 、 $\dots$ とすると
第 n 貴金属数 λ は、次の数列 $\{d_n\}$ の極限 d_∞ である。

$$d_{n+1}=\sqrt{1+nd_n}、d_1=1 \quad (d_0=0)$$

数列 $\{d_n\}$ は次のようになっていることがわかる。

$$d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \dots < d_n < \dots < d_\infty (= \lambda)$$

(5) 証明

上記の、黄金数についての数列 $\{a_n\}$: $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ 、 $a_1=1$ ($a_0=0$)

白銀数についての数列 $\{b_n\}$: $b_{n+1}=\sqrt{1+2b_n}$ 、 $b_1=1$ ($b_0=0$)

第 n 貴金属数についての数列 $\{d_n\}$: $d_{n+1}=\sqrt{1+nd_n}$ 、 $d_1=1$ ($d_0=0$)

についてそれぞれ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \phi$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \tau$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lambda$ となることを証明しよう。

証明

(i) 黄金数 ϕ

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \phi| &= |\sqrt{1+a_n} - \phi| = \left| \frac{(\sqrt{1+a_n} - \phi)(\sqrt{1+a_n} + \phi)}{\sqrt{1+a_n} + \phi} \right| = \left| \frac{1+a_n - \phi^2}{\sqrt{1+a_n} + \phi} \right| \\ &= \left| \frac{1+a_n - (1+\phi)}{\sqrt{1+a_n} + \phi} \right| = \left| \frac{a_n - \phi}{\sqrt{1+a_n} + \phi} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+a_n} + \phi} |a_n - \phi| \\ &\leq \frac{1}{1+\phi} |a_n - \phi| = \frac{2-\phi}{(1+\phi)(2-\phi)} |a_n - \phi| = \frac{2-\phi}{2+\phi-\phi^2} |a_n - \phi| \\ &= \frac{2-\phi}{1-(\phi^2-\phi-1)} |a_n - \phi| = (2-\phi) |a_n - \phi| \quad (\because a_n \geq 0) \\ \therefore |a_{n+1} - \phi| &\leq (2-\phi) |a_n - \phi| \quad \dots \quad (g) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} |a_n - \phi| &\leq (2-\phi) |a_{n-1} - \phi| \leq (2-\phi)^2 |a_{n-2} - \phi| \leq \dots \leq (2-\phi)^{n-1} |a_1 - \phi| \\ &= (2-\phi)^{n-1} |1 - \phi| = (\phi-1)(2-\phi)^{n-1} \end{aligned}$$

$$0 < 2-\phi < 1 \quad \text{だから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi-1)(2-\phi)^{n-1} = 0$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \phi| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \phi$$

終

なお、 (g) における $2-\phi$ を縮小率 (contraction rate) という。

(ii) 白銀数 τ

$$\begin{aligned}
 |b_{n+1} - \tau| &= |\sqrt{1+2b_n} - \tau| = \left| \frac{(\sqrt{1+2b_n} - \tau)(\sqrt{1+2b_n} + \tau)}{\sqrt{1+2b_n} + \tau} \right| \\
 &= \left| \frac{1+2b_n - \tau^2}{\sqrt{1+2b_n} + \tau} \right| = \left| \frac{1+2b_n - (1+2\tau)}{\sqrt{1+2b_n} + \tau} \right| = \left| \frac{2(b_n - \tau)}{\sqrt{1+2b_n} + \tau} \right| \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1+2b_n} + \tau} |b_n - \tau| \leq \frac{2}{1+\tau} |b_n - \tau| = (3-\tau) |b_n - \tau| \quad (\because b_n \geq 0) \\
 \therefore |b_{n+1} - \tau| &\leq (3-\tau) |b_n - \tau| \quad \cdots \quad (s)
 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
 |b_n - \tau| &\leq (3-\tau)^{n-1} |b_1 - \tau| = (\tau-1)(3-\tau)^{n-1} \\
 0 < 3-\tau < 1 \quad \text{だから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau-1)(3-\tau)^{n-1} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - \tau| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \tau$$

終

なお、(s)における縮小率は $3-\tau$ である。

(iii) 第n貴金属数 λ

$$\begin{aligned}
 |d_{n+1} - \lambda| &= |\sqrt{1+nd_n} - \lambda| = \left| \frac{1+nd_n - \lambda^2}{\sqrt{1+nd_n} + \lambda} \right| = \left| \frac{n(d_n - \lambda)}{\sqrt{1+nd_n} + \lambda} \right| \\
 &= \frac{n}{\sqrt{1+nd_n} + \lambda} |d_n - \lambda| \leq \frac{n}{1+\lambda} |d_n - \lambda| = \{(n+1) - \lambda\} |d_n - \lambda| \quad (\because d_n \geq 0) \\
 \therefore |d_{n+1} - \lambda| &\leq \{(n+1) - \lambda\} |d_n - \lambda| \quad \cdots \quad (n)
 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
 |d_n - \lambda| &\leq \{(n+1) - \lambda\}^{n-1} |d_1 - \lambda| = (\lambda-1)\{(n+1) - \lambda\}^{n-1} \\
 0 < (n+1) - \lambda < 1 \quad \text{だから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda-1)\{(n+1) - \lambda\}^{n-1} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{従って} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |d_n - \lambda| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lambda$$

終

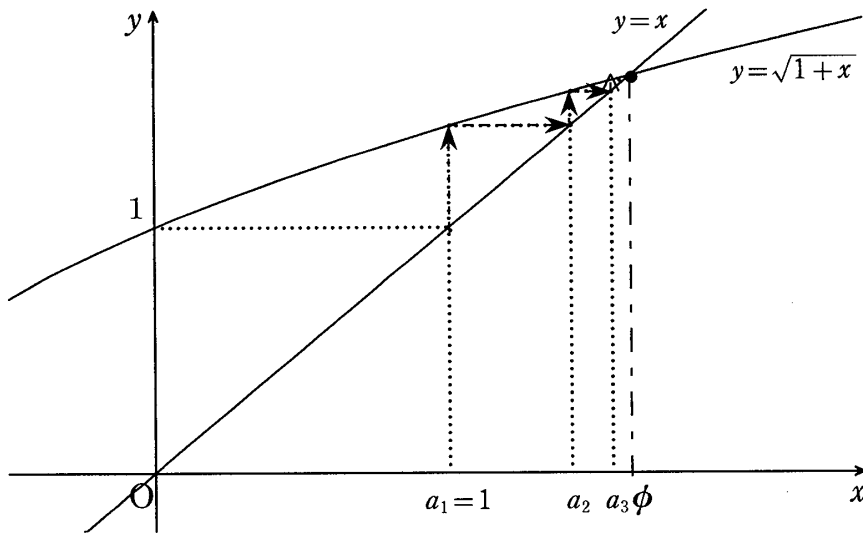
なお、(n)における縮小率は $(n+1) - \lambda$ である。

上記の証明を簡単に根号法といおう。

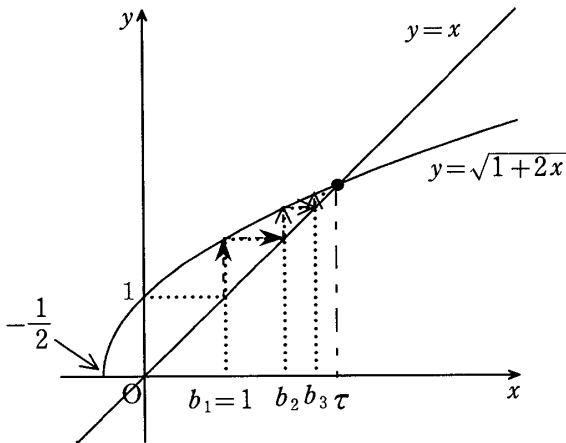
(6) グラフ

黄金数 ϕ 、白銀数 τ 、青銅数 ξ について、上記の多重根号表示に関する数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ を描くと、次のようになる。

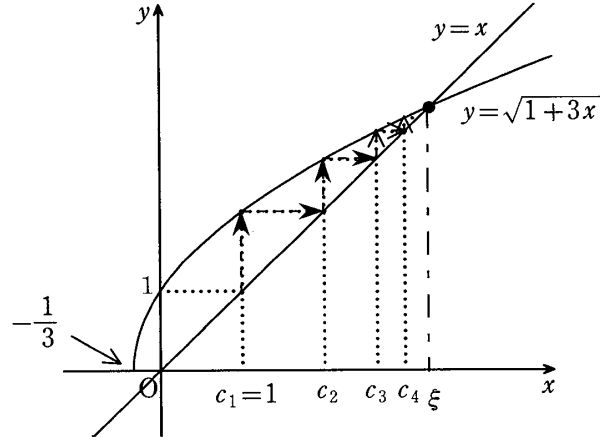
数列 $\{a_n\}$



数列 $\{b_n\}$



数列 $\{c_n\}$



5 2つの縮小率の比

前述の証明の直後を考慮して、分数法の縮小率を α 、根号法の縮小率を β とし、次のように定める。

黄金数 ϕ については、
 分数法の縮小率 α は $\phi - 1$
 根号法の縮小率 β は $2 - \phi$

白银数 τ については、
 分数法の縮小率 α は $\tau - 2$
 根号法の縮小率 β は $3 - \tau$

青铜数 ξ については、
 分数法の縮小率 α は $\xi - 3$
 根号法の縮小率 β は $4 - \xi$

第 n 貴金属数 λ については、
 分数法の縮小率 α は $\lambda - n$
 根号法の縮小率 β は $(n + 1) - \lambda$

ここで、分数法と根号法の縮小率の比 $\alpha : \beta$ をそれぞれ計算してみよう。

(i) 黄金数 ϕ

$$\begin{aligned}\alpha : \beta &= (\phi - 1) : (2 - \phi) = \phi(\phi - 1) : \phi(2 - \phi) = (\phi^2 - \phi) : (2\phi - \phi^2) \\ &= (\phi^2 - \phi) : \{\phi - (\phi^2 - \phi)\} = 1 : (\phi - 1) \quad (\because \phi^2 - \phi = 1) \\ &\quad \text{黄金比}\end{aligned}$$

(ii) 白銀数 τ

$$\begin{aligned}\alpha : \beta &= (\tau - 2) : (3 - \tau) = \tau(\tau - 2) : \tau(3 - \tau) = (\tau^2 - 2\tau) : (3\tau - \tau^2) \\ &= (\tau^2 - 2\tau) : \{\tau - (\tau^2 - 2\tau)\} = 1 : (\tau - 1) \quad (\because \tau^2 - 2\tau = 1) \\ &\quad \text{白銀比}\end{aligned}$$

(iii) 青銅数 ξ

$$\begin{aligned}\alpha : \beta &= (\xi - 3) : (4 - \xi) = \xi(\xi - 3) : \xi(4 - \xi) = (\xi^2 - 3\xi) : (4\xi - \xi^2) \\ &= (\xi^2 - 3\xi) : \{\xi - (\xi^2 - 3\xi)\} = 1 : (\xi - 1) \quad (\because \xi^2 - 3\xi = 1) \\ &\quad \text{青銅比}\end{aligned}$$

(iv) 第 n 貴金属数 λ

$$\begin{aligned}\alpha : \beta &= (\lambda - n) : \{(n + 1) - \lambda\} = \lambda(\lambda - n) : \lambda\{(n + 1) - \lambda\} \\ &= (\lambda^2 - n\lambda) : \{(n + 1)\lambda - \lambda^2\} = (\lambda^2 - n\lambda) : \{\lambda - (\lambda^2 - n\lambda)\} \\ &= 1 : (\lambda - 1) \quad (\because \lambda^2 - n\lambda = 1) \\ &\quad \text{第 } n \text{ 貴金属比}\end{aligned}$$

分数法と根号法の縮小率の比 $\alpha : \beta$ が、黄金数に関しては黄金比に、白銀数に関しては白銀比に、青銅数に関しては青銅比に、第 n 貴金属数に関しては第 n 貴金属比になっている。大変興味深い結果である。

6 黄金・白銀・青銅に関する表

ここで、第 n 貴金属数を λ_n で表すことにしよう。すると、黄金数 ϕ は λ_1 、白銀数 τ は λ_2 、青銅数 ξ は λ_3 となる。

上記の 1 ～ 5 で調べたことをまとめると次のようになる。

2 次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解 $\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ を第 n 貴金属数といい $n = 1$ のときは黄金数 ϕ 、 $n = 2$ のときは白銀数 τ 、 $n = 3$ のときは青銅数 ξ である。このとき、 $1 : (\lambda_n - 1)$ の比を第 n 貴金属比という。また、縦と横の長さの比が第 n 貴金属比である長方形を、第 n 貴金属長方形という。 $n = 1$ のときは黄金長方形、 $n = 2$ のときは白銀長方形、 $n = 3$ のときは青銅長方形になる。

(表 1)

黄金数	$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$	黄金比	$1 : (\phi - 1) \doteq 1 : 0.618$
白銀数	$\tau = 1 + \sqrt{2} \doteq 2.414$	白銀比	$1 : (\tau - 1) \doteq 1 : 1.414$
青銅数	$\xi = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \doteq 3.303$	青銅比	$1 : (\xi - 1) \doteq 1 : 2.303$
第4貴金属数	$\lambda_4 = 2 + \sqrt{5} \doteq 4.236$	第4貴金属比	$1 : (\lambda_4 - 1) \doteq 1 : 3.236$
...	...	...	...
第n貴金属数	$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$	第n貴金属比	$1 : (\lambda_n - 1)$

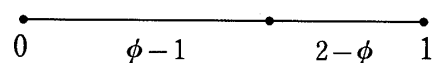
(表 2)

	分数法の 縮小率 α	根号法の 縮小率 β	$\alpha : \beta$ を計算すると、黄金比、白銀比 青銅比、…、第n貴金属比となる。
黄金数	$\phi - 1$	$2 - \phi$	$(\phi - 1) : (2 - \phi) = 1 : (\phi - 1)$
白銀数	$\tau - 2$	$3 - \tau$	$(\tau - 2) : (3 - \tau) = 1 : (\tau - 1)$
青銅数	$\xi - 3$	$4 - \xi$	$(\xi - 3) : (4 - \xi) = 1 : (\xi - 1)$
第4貴金属数	$\lambda_4 - 4$	$5 - \lambda_4$	$(\lambda_4 - 4) : (5 - \lambda_4) = 1 : (\lambda_4 - 1)$
...	...	...	...
第n貴金属数	$\lambda_n - n$	$(n + 1) - \lambda_n$	$(\lambda_n - n) : \{(n + 1) - \lambda_n\} = 1 : (\lambda_n - 1)$

(表2)の結果から次のこともわかる。

黄金数、白銀数、青銅数、…、第 n 貴金属数それぞれの、分数法と根号法の縮小率の和は1となり、分数法と根号法の縮小率の比がそれぞれ、黄金比、白銀比、青銅比、…、第 n 貴金属比となる。

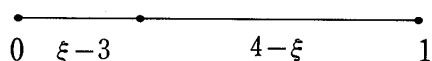
(i) 黄金数 : $(\phi-1):(2-\phi)$ は区間 $[0,1]$ を黄金分割する。



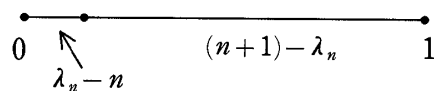
(ii) 白銀数 : $(\tau-2):(3-\tau)$ は区間 $[0,1]$ を白銀(比)分割する。



(iii) 青銅数 : $(\xi-3):(4-\xi)$ は区間 $[0,1]$ を青銅(比)分割する。



(iv) 第 n 貴金属数 : $(\lambda_n-n):{(n+1)-\lambda_n}$ は区間 $[0,1]$ を第 n 貴金属(比)分割する。



参考文献

- [1] A.Beutelspacher and B.Petri 著 (柳井浩 訳)、「黄金分割—自然と数理と芸術と—」共立出版、2005.
- [2] R.A.Dunlap 著 (岩永恭雄・松井講介 訳)、「黄金比とフィボナッチ数」日本評論社、2003.
- [3] 岩本 誠一、黄金最適解を鑑賞する—経済数学へのプレリュード(V)—経済学研究・別冊 第12号(九大経済学会)、平成18(2006)年4月、pp.39-43.
- [4] S.Iwamoto, The Golden trinity—optimality, inequality, identity—,「経済の数理解析」京大数理研講究録1488、2006年5月、pp.1-14.
- [5] S.Iwamoto and A.Kira, On Golden inequalities,「情報決定過程の展開」京大数理研講究録1504、2006年7月、pp.168-176.

- [6] 岩本 誠一、動学的最適化における黄金最適政策、小特集：経済分析と最適化の数理『三田学会雑誌』（慶應義塾経済学会）99 巻 4 号（2007 年 1 月）、pp.101 - 125.
- [7] S.Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W.Takahashi and T.Tanaka, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis* (NACA 2005, Okinawa) Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp.109 - 205.
- [8] 岩本 誠一、最適化「ダ・ヴィンチ・コード」— 経済数学へのプレリュード (VI) — 経済学研究・別冊 第 13 号（九大経済学会）、平成 19 (2007) 年 4 月、pp.45 - 52.
- [9] S.Iwamoto, Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming, *Advances in Mathematical Economics* 10 (2007), pp.65 - 89.
- [10] 岩本 誠一、安田 正實、最適値関数に表れる黄金比 (Golden optimal values in discrete - time dynamic optimization processes)、「最適化問題における確率モデルの展開と応用」、京大数理研講究録 1559、2007 年 6 月、pp.56 - 66.
- [11] S.Iwamoto, Golden quadruplet : optimization - inequality - identity - operator, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, *Proceedings of the Fourth International Conference* (MDAI 2007)、Kitakyushu, 2007, Eds. V.Torra, Y.Narukawa, and Y.Yoshida, Springer - Verlag *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4617, 2007, pp.14 - 23.
- [12] 岡部 恒治 ほか (著・編)、「楽しく学ぶ 数学基礎」、数研出版、2002.
- [13] 桜井 進 著、「雪月花の数学 — 日本之美と心に潜む正方形と $\sqrt{2}$ の秘密 —」祥伝社、2006.
- [14] 桜井 進 著、「感動する 数学」、海竜社、2006.
- [15] H.Walser 著 (蟹江幸博 訳)、「黄金分割」、日本評論社、2002.
- [16] 渡邊 泰治 著、「黄金比の謎」、化学同人、2007.

岩本 誠一 [九州大学大学院経済学研究院 教授]

江口 将生 [九州大学経済学府研修生・東鷹高校教諭]

吉良 知文 [九州大学経済学府 博士前期課程]