リアルタイムシュミレーションのためのエッジトーンに一次元モデル化

世木, 裕人
九州大学大学院システム情報科学府情報知能工学専攻 : 修士課程

高見, 利也
九州大学情報基盤研究開発センター : 学術研究員

https://doi.org/10.15017/1560526

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 20 (2), pp.45-51, 2015-07-24. 九州大学大学院システム情報科学研究院
バージョン：
権利関係：

九州大学大学院
システム情報科学紀要
第 20 巻　第 2 号　平成 27 年 7 月

Research Reports on Information Science and
Electrical Engineering of Kyushu University
Vol.20, No.2, July 2015

リアルタイムシミュレーションのためのエッジトーンの一次元モデル化

世木　裕人* ・ 高見　利也**

One-dimensional Modeling of Edge Tones for Real-time Simulations

Hiroto SEKI* and Toshiya TAKAMI**

(Received June 25, 2015)

Abstract: A reduced model is introduced to represent an oscillation of a jet by edge tones. The edge tone is one of the indispensable elements in air-reed musical instruments, such as a recorder, a flute, a flue organ pipe, etc. The main approach is to obtain a representation by a one-dimensional partial differential equation (PDE) which is intended to shorten a computational time. Several parameter values are determined through a comparison between model functions and results by two-dimensional fluid mechanics calculations. Through a numerical integration of our model PDE and time measurements, it is shown that this model is applicable to real-time simulations to describe dynamics of air-reed instruments.

Keywords: Real-time simulation, Edge tones, Air-reed instruments, Fluid mechanics, Reduced model

1. はじめに

音楽を奏でるために広く使われている楽器は, 物体の振動や共鳴といった物理現象を演奏者が適切に制御することで成立している複雑なシステムである．この物理現象の解析のために計算機を利用することは広く行われており, 例えば, 空気ジェットの振動を利用して発音する, エアリード楽器 (リコーダ, フルートなど) では, 詳細なシミュレーションが実施され発音機構の研究に利用されている[1)]．上記, 数値流体力学的なアプローチは現象の厳密な再現を可能にするために大規模計算を必要とする．このほかにも, 物理現象を表現するためのモデルには様々なものがあり, 自由度を大幅に落とした簡略化モデルや, 理論的な扱いに適したモデルが, 長年にわたって研究されてきている[2)]．

リアルタイムシミュレーション (RTS) は, 解析対象とする物理系の一部を計算機で置き換えて, 現実の現象と同じ時間で再現するものであり, コストの削減や実験装置の簡略化など様々な目的のために利用される．有効なシミュレーションを構成し, 求められる時間内に実施するためには, 適切なモデルの導入とともに, 高速な数値計算が必要である．楽器に対する RTS は一種の電子楽器を構成することに相当し, 楽器部分全体を電子的に表したシンセサイザーでの音の再現は, パルス符号変調 (pulse code modulation, PCM) 方式を採用している．一方, 操作性は一般の楽器と同じである練習用の楽器も存在する．この練習用楽器は人間が操作する部分と, 電子的に再現された部分を組み合わせたものであり, 電子部分のリアルタイムでの表現が求められる．練習用楽器について, 弦楽器や金管楽器は製品化されているが, エアリード部分の正確な表現が困難なため, エアリード楽器の練習用楽器の製品化には至っていない．この研究では, エアリード楽器の構成要素である, エッジトーンという現象を対象として, RTS の実現を想定したモデル化を実施する．

エッジトーンとは, 外部から振動流を与えなくても, ジェットの進む先にある鋭角の壁 (エッジ) の作用で自励振動を生ずる現象であり, 流体そのものによるフィードバックによって発振することが知られている[3)]．**Fig. 1** は, 幅 1mm のジェットが流入速度 $V = 10$ m/s で吹き出した時に, 5 mm 先にあるエッジとの相互作用で, ジェットが振動している様子を再現している．この計算を二次元で行うと, 非常に時間がかかってしまう．

エッジトーンに RTS を適用することを想定して, この研究では, 偏微分方程式を用いた一次元モデルを提案する．これまでの研究で, 現象を表す簡単なモデル式は提案されてきたが, 拡張性の乏しいものであった．一方偏微分方程式を利用したモデルは, 物理的な考察によって項を加えることで, 関連する現象に発展させることができる．まず, Section 2 では, エアリード楽器の既存モデルの解説の後, RTS に必要なモデルの設計方針を述べる．Section 3 では, ジェットの振動, エッジトーン現象の順に, 段階的なモデル構築を実施し, Section 4 で RTS の観点からモデルの検証を行う．

2. 一次元モデルの設計方針

楽器に限らず複雑なシステムを物理的に解析しようとす

平成 27 年 6 月 25 日受付
*情報知能工学専攻修士課程
**情報基盤研究開発センター

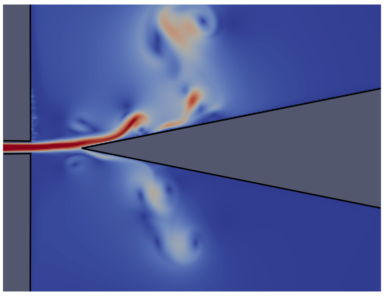

Fig. 1　A snapshot of the edgetone by fluid mechanics.

る時は, 比較的単純な部分に分割して, これらの組み合わせとして全体動作を解析するという手法がとられる．この章では, 既存の楽器モデルの概要を示した上で, ここで導入するモデルの設計方針を述べる．

2.1　エアリード楽器の既存モデル

リコーダーなどのエアリード楽器では, 細いジェットを作り出すスリットの向かい側に鋭角的なエッジを配置した頭部管と (**Fig. 2**), 特定の周波数にピークを持つ共鳴器に分割し, それぞれ独立に物理的な特性を解析する．これらを結合するために, 電子回路の類推から音響的インピーダンスを導入して等価回路を構成し, システム全体の運動を解析する (**Fig. 2**)[4)]．このモデルの運動の様子は常微分方程式で表現され, 周波数領域で理論的解析が行われるため, 定常発振時の様子を調べるには適しているものの, 音の立ち上がりや遷移などの過渡現象, あるいは, 空間的な振動波形を正確に再現するのは困難である．

演奏中のリコーダーやフルートの頭部管で生じている空気ジェットの振動がエッジトーンであり, 細い平面ジェットが鋭角のエッジと相互作用することにより弱い音を発している．三次元 Navier-Stokes 方程式に従う圧縮流体計算による楽器全体のシミュレーションは, 大規模な並列計算機による大掛かりなものである．エッジトーン現象は, 流体そのものによるフィードバックで発振することが知られているため, リコーダーの頭部管部分だけならば, 非圧縮流体による数値計算で再現することができる．しかし, **Fig. 2** の Generator 部分を非圧縮流体計算で実施し, Lighthill が考案した, 音波に対する二階偏微分方程式による音源計算から求めた音を Resonator を介して Generator にフィードバックするモデルでも, 大規模な並列計算が必要である．

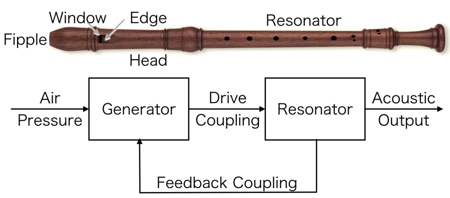

Fig. 2　A recorder and a feedback model

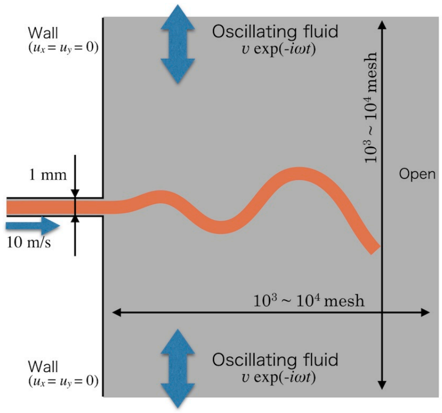

Fig. 3　Boudary conditions for a jet oscillation.

2.2　設計方針

前節で述べた流体力学計算による数値モデルは, たとえ二次元運動に制限しても, リアルタイムに結果を得ることは難しい．ここでは, RTS 実現のために, どの程度詳細な表現までが可能かを確認し, モデルの設計に向けた方針を設定する．

まず, リアルタイムであるということで, 最も重要な数値計算の時間に関する制限を具体的に計算しておく．あるシミュレーションを Δt s の時間刻みで実施する場合, このステップの数値計算に必要な時間は Δt 未満でなければならない．例えば, CD の音質と同じ 44.1kHz のサンプリング周波数で音を作るとすると, 1 ステップの時間刻みは, 最長でも $\Delta t = 1/44.1\text{kHz} = 2.27 \times 10^{-5}$ sec 程度に設定される．この条件が実現するかどうかは利用する計算機にも依存するが, ここでは, 4 コアのデスクトップ PC 程度を想定しておこう．計算機の実効性能がコア当り 1 GFLOPS 程度であるとすると, 1 ステップ内で実行可能な浮動小数点の計算量は, $N_f = 2.27 \times 10^{-5} \times 10^9 = 2.27 \times 10^4$ 程度であり, Navier-Stokes 方程式の計算を想定すると, 高度なチューニングを施したとしても二次元では 15×15 要素程度までしか扱うことが出来ず, 流体現象を詳細に表現することは不可能である．そこで, ここでは一次元のモデルを導入する．一次元のモデルを利用することで, 10^3 要素程度のものまで扱うことができるようになる．

では次に, 計算時間以外の要件として, モデルの精度について考えておく．比較的単純なモデルで実現しようとしている以上, 精度に関する条件を緩めざるを得ないが, 現象の定性的な再現という点を譲るわけには行かない．ここでは, 楽器という複雑なシステムの動作を再現するためのモデル構築を目指しているため, 定量的な音の再現 (音量や高周波成分の詳細) については, 誤差を許容することとする．しかし, 発振の基本周波数については, 出来るだけ詳細に再現出来ることを目指す．

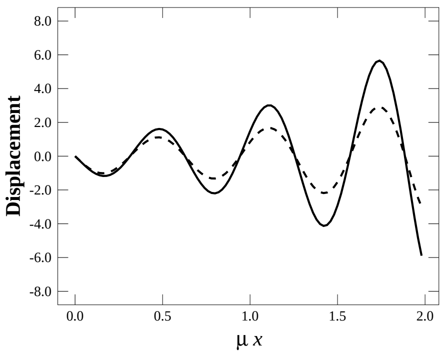

Fig. 4 Oscillation models by Cremer (solid) and Fletcher (dotted)

3. 一次元モデルの構築

この節では, RTS を可能にする楽器のモデルとして, 一次元の偏微分方程式で表現されるモデルを構築する. 頭部管で生じるエッジトーンという現象のうち, まずは, 外部から振動流を与えることでジェットを振動させ, その現象を偏微分方程式を用いた一次元モデルで表現する. この一次元モデルを発展させて, エッジトーン現象の一次元モデル化を目指す. また, それぞれのモデルの妥当性を検証するために, 二次元の詳細な数値計算結果との比較を行う.

3.1 ジェットのモデル化

スリットから出された平面ジェットの運動は, これ自体複雑な運動であり, 古くから流体力学の問題として研究対象となってきた. 19 世紀には, Rayleigh が完全流体のジェットを対象とした研究を行った[5]. エアリード楽器の中でのジェットは, ジェットの進行方向に垂直な振動場 $v\exp(-i\omega t)$ を加えた時の運動を解析する形で行われている (**Fig. 3**). ここで, v は振動場の振幅, t は時間を表し, ω は振動流の角周波数とする. また, 振動を表すために便利なように複素数で表しているが, 物理的には, 結果の実部のみが意味を持つことを注意しておく.

この状況のジェットの振動を表現するために, Cremer[6, 7] が検討したのは

$$g(x,t) = \frac{iv\ e^{-i\omega t}}{\omega}\left[1 - e^{(ik+\mu)x}\right] \tag{1}$$

である. ここで, $g(x,t)$ は, $x > 0$ の方向に射出されたジェットの y 方向の変位を表している. 空間部分に関して, μ はジェットの進行に伴う振幅の拡大率であり, k はジェットの振動の波数を表す. 一方, Fletcher[4] は,

$$h(x,t) = \frac{iv\ e^{-i\omega t}}{\omega}\left[1 - e^{ikx}\cosh\mu x\right] \tag{2}$$

を提案しており, これら二つのモデル式のどちらが適切かについて, 長年に渡って議論が続いている. これら二つの式は, 二次元平面上でのジェットの運動を一本のひもとして表現した, 一次元のモデル式であるので, どちらの式が適切にジェットの振動を表現しているかという議論は本質的なものではなく, それを判定することはかなり難しい作業である.[8]

実際, これら二つのグラフを表示してみると (**Fig. 4**, $k/\mu = 10.0$ とし, $t/\omega = \pi$ の場合), 振幅が少し異なるだけで定性的には大きな違いはないことがわかる. 数値的なシミュレーションを使って, どちらかのモデルの正しさを証明することはやはり困難であるため, ここでは少し別の観点から考察する. もともと我々が目指すモデル化は, 一次元の偏微分方程式でジェットを表現することであった. そこで, 偏微分方程式による表現が可能かどうか, つまり, 何らかの偏微分方程式の解になっているかどうか, という点でこれらの式を見直してみる. すると, Cremer の式 (1) は, 全体にかかる係数の違いを除いて, ある波形が一定速度で空間を伝搬することを表現した一次元の移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\omega\mu}{k}f + ve^{-i\omega t} \tag{3}$$

を満たすことがわかる. 一方, Fletcher の式が解になるような移流方程式を導出することは不可能である. これは, Fletcher の式 (2) には, cosh の項に左向きの進行波を表す項が含まれるためであり, 左右に対称な進行波解を持つ波動方程式を使う必要がある. しかし, 実際に波動方程式に代入すればわかるが, 物理的解釈が可能な単純な偏微分方程式を求めることは出来ない.

方程式 (3) の左辺は, y 方向の変位 $f(x,t)$ の時間微分の次元を持ち, $f(x,t)$ の波形が速度 ω/k で右方向へ移動していく運動を表しており, 右辺第一項は変位が移動とともに増幅される効果 (拡大率が μ) を表し, 第二項は外部から加えられた振動場がそのまま変位に加えられていることを表している. この方程式の物理的な解釈は, ここで解こうとしている問題の状況 (**Fig. 3**) に完全に合致している. ただし, 式 (1) とは係数が少しだけ異なることに注意する. 実際に, 境界条件 $f(0,t) = 0$, 初期条件 $f(x,0) = 0$ のもとで, 方程式 (3) の解を求めると, $0 < x < \omega t/k$ の範囲で,

$$f(x,t) = \frac{iv\ e^{-i\omega t}}{\omega(1 - i\mu/k)}\left[1 - e^{(ik+\mu)x}\right] \tag{4}$$

となる. これは, Cremer の式 (1) とは, 振幅と位相が異なるものとなっている.

すなわち, 我々はジェットの振動を表現するために, Cremer の式 (1) $g(x,t)$, Fletcher の式 (2) $h(x,t)$ に加えて, 偏微分方程式から求めた式 (4) $f(x,t)$ の三種類のモデル式を得たこととなる. 次節では, 二次元流体計算との比較により, これらのうちどれが最も正確にジェットの運動を表現するかを検証しておく.

3.1.1 数値計算によるパラメータの決定

前節で求めたモデル式の検証をするために, OpenFOAM

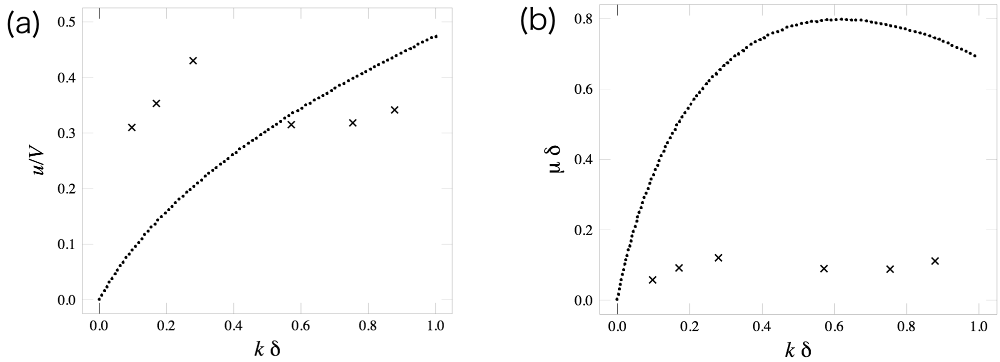

Fig. 5 Parameter values by two-dimensional fluid computations: (a) u/V, (b) $\mu\delta$. Theoretical values for inviscid fluids are shown in dotted line.[9)].

Table 1 Emvironments

Tool	OpenFOAM-2.3.1
Solver	pisoFoam (incompressible)
method	LES
mesh size	800×800

による二次元ジェットの流体計算を行った．OpenFOAM[10)] とは, 熱や流体の計算が可能なシミュレーションツールであり, 世界各国で利用されている．今回の計算の詳細を Table 1 に示す．Large Eddy Simulation (LES) は, 大きなスケールの流れは直接計算し, 細かいスケールの流れはモデル化して計算する方法である．ここで解いている方程式は, 流速 u と圧力 P から流体の運動を記述している二次元の Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \nabla^2 u \tag{5}$$

である．ここで, 密度 ρ と動粘性係数 ν は, 常温付近の空気のデータ ($\rho = 1.21$ kg/m^3, $\nu = 1.5 \times 10^{-6}$ m^2/s) を設定した．

シミュレーション結果とジェットの振動を表すモデル式との比較方法は, 次の通りである．まず, ジェットの進行方向に垂直な断面の中で, 最も流速 u が大きい場所をジェットの中心位置とする．ただし, ジェットの厚み程度の誤差は許容する．次に, シミュレーション結果から求められた変位とモデル式が表す位置の差の二乗平均 S が最も小さくなるように, ジェットの拡大率 μ, 波数 k, シミュレーション結果とモデル式間の位相差 t' の三つのパラメータを調整する．この計算を吹き出し口から 1 cm までの領域で行い, 最適なパラメータを求めた．

二次元流体計算は, ジェットの流入速度 $V = 5, 10, 20, 30$ m/s と, 外部から与える振動流の角周波数 $\omega = 300\pi, 600\pi, 1200\pi, 1800\pi, 2400\pi, 3000\pi$ rad/s を変えて実施した．結局, 得られたパラメータの値は, 位相差 t' を除いて, どのモデルもほとんど同じものとなった．このうち, $V = 5$ m/s の場合に得られた, 移流速度 $u = \omega/k$,

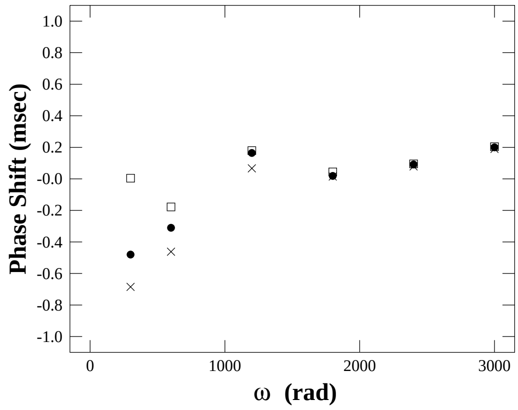

Fig. 6 Phase difference for $V = 5$ m/s: $\times$ our model, (square) Cremer, (circle) Fletcher

および, 拡大率 μ を, ジェットの流入速度 V とジェットの厚さ 2δ を用いて無次元化 (u/V, $\mu\delta$) して **Fig. 5** に表示した．$\mu\delta$ の値に関しては, 非粘性流に対する結果[9)] より, かなり小さな値になることが知られており[11)], ここで得られた結果は, 実験的に調べられてきた値と比較的良く合っている．

位相差の結果については, $V = 5$ m/s のものを示した (**Fig. 6**)．位相差は, 0 に近いものが最も正確であるため, $\omega \leq 600$ では Cremer の式 (1) が良い近似となっていることがわかる．しかし, $\omega \geq 1200$ では, どの位相差も比較的 0 に近い値を持っており, これらのモデルの間にほとんど差がない結果となった．変位についても, 誤差の範囲内で 3 つのモデル式間でほとんど違いが見られないため, ある程度以上周波数の大きい所では, すべてのモデルがほとんど同じ精度で近似できることがわかる．

3.2 エッジトーンのモデル化

前節で, ジェットの振動現象に関して, 周波数の高い場合には, モデル間に差があまり見られないことがわかったため, ここでは, 偏微分方程式をもとにしてエッジトーン現象

の一次元モデルを構築する．エッジによるジェットの自励現象を表現するために, エッジの存在によって上下に分けられた流れが, ジェットの運動にフィードバックするというモデルを構築する．具体的には, 偏微分方程式 (3) の右辺のうち, 外部からの振動流 $ve^{-i\omega t}$ の代りとなるフィードバック項を導入する形となる．

3.2.1 エッジによるフィードバック

そこで, エッジとジェットの相互作用を詳しく見てみよう．ジェットの吹き出し口からエッジまでの距離を l とすると, エッジ付近での y 方向の変位は $f(l,t)$ と表される．$f(l,t)>0$ の時, ジェットによる流れは上半分の空間に多く流れ込み, 逆に $f(l,t)<0$ の時は, 下半分の空間に多く流れ込むこととなる．この流量の不均一が, 圧力差として瞬時にフィードバックすると考えれば, $f(l,t)$ の値に応じたフィードバック作用を導入することが可能となる．y_0 に変位の中心があるジェットの, 進行方向に垂直な断面を通過する流速を $J(y-y_0)$ と書くとき, この関数は, 状況に応じてベル型,

$$J_b(y-y_0)=V\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{y-y_0}{\delta}\right) \tag{6}$$

または, シルクハット型

$$J_h(y-y_0)=\begin{cases} V & (|y-y_0|\le\delta) \\ 0 & (|y-y_0|>\delta) \end{cases} \tag{7}$$

で近似的に表されることがわかっている．ここで, 2δ は, ジェットの幅を表す．

ここでは, ベル型 $J_b(y)$ (6) の場合を考えると, ある時刻 t のジェットの変位が $y=f(l,t)$ の時, 上下の空間に流入する流量の差は

$$F(t)=2V\int_0^{f(l,t)}\mathrm{sech}^2\frac{y}{\delta}dy=2V\delta\tanh\frac{f(l,t)}{\delta} \tag{8}$$

と表せる．これが, スリットとエッジの間隔 l の空間に均一にフィードバックするという効果を導入して, エッジトーンを表す一次元偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\omega\mu}{k}f-\frac{2\alpha V\delta}{l}\tanh\frac{f(l,t)}{\delta} \tag{9}$$

が得られる． ただし, フィードバックの大きさを係数 α (>0) として表した．ここで, 上半分の空間に流入量が多い $(F(t)>0)$ 時は, ジェットを全体的に押し下げるような作用になり, 逆に下半分の空間の流入量が多い $(F(t)<0)$ 場合は, ジェットを押し上げる形の作用となることから, フィードバック項の係数が負になっていることに注意する．

さて, この方程式の移流項や右辺にある ω/k は速度の次元を持つ量で, ジェットの変位の形が右方向に伝達される速度 $u\equiv\omega/k$ を表している．十分に細いジェットに関しては, 系全体の振動数 ω や波数 k が変化した時に u がどのように変化するかは複雑で, 長年に渡って実験的にも調べられてきたが, 一般の粘性流体の場合の正確な表現は明らかになっていない．ここでは, ジェットの振動実験の結果から, $u/V=0.35$ とすることとした．ここで, V は, ジェットの中心付近の流速である．また, 空間を伝搬する時の拡大率 μ (1/m) も本来は実験により決める必要のあるパラメータであるが, 同様にジェットの振動実験の結果から, $\mu=200$ (1/m) とする．また, δ, および, l は, 二次元流体計算のパラメータと同じ $\delta=0.5$ mm, $l=5$ mm とした．

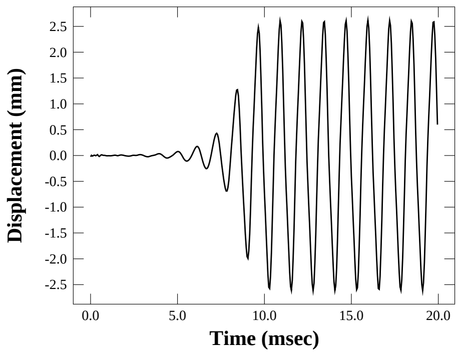

Fig. 7 Oscillation by one-dimensional model.

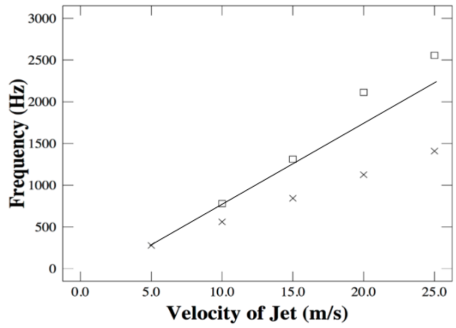

Fig. 8 Oscillation frequency: (square) two-dimensional calculation, × our one-dimensional model, line Brown.

ところで, 方程式 (9) の右辺にある非同次項を形式的に非積分関数として書くと, 境界条件 $f(0,t)=\frac{\partial f(0,t)}{\partial t}=0$ の元で,

$$f(x,t)=-\frac{2\alpha V\delta}{l}\int_{t-\frac{x}{u}}^{t}e^{u\mu(t'-t)}\tanh\frac{f(l,t')}{\delta}dt' \tag{10}$$

という積分方程式として表現することも可能である．$x=l$ とすることにより, 発振条件を解析することは可能であるが, 実際の振動波形を求めるためには数値計算が必要になるため, リアルタイムシミュレータとしては, 形式的な解の表記 (10) ではなく, 偏微分方程式を初期値問題として数値的に解く方式を採用することとする．

3.2.2 二次元非圧縮流計算との比較

この節では, OpenFOAM を用いてエッジトーンの二次元シミュレーションを行う．シミュレーションは Table 1 からメッシュのみを変更し, エッジを加えた．ジェットの吹き出し口からエッジまでの距離を 5 mm とし, ジェットの

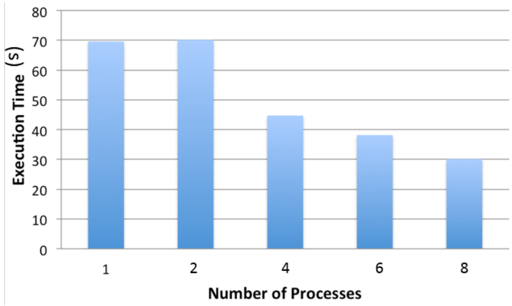

Fig. 9　Computation time by two-dimensional incompressible fluid.

流入速度 V を 5 m/s, 10 m/s, 15 m/s, 20 m/s, 25 m/s と変更してシミュレーションを行った.

二次元のシミュレーション結果からエッジトーンの基音の周波数を求めるために, ジェットの吹き出し口での垂直方向の速度の時間変化に着目する. 速度の時間変化は一般には高周波を含んだ振動波形となるが, これがほぼ sine 関数になると仮定して周期 T s を求め, この逆数として周波数 $f = 1/T$ Hz を計算する. 本来は, 十分に長い時系列を取得してフーリエ変換により周波数分布を求めることとなるが, ここでは, 定性的な再現を目指すモデルが目標であるので, 基音の周波数だけに注目した. **Fig. 7** は, (9) 式を差分法を用いたプログラムにより計算したものであり, $\alpha = 10^{-5}$, $\mu = 200/\mathrm{m}$, $V = 15\mathrm{m/s}$ のときのものである. この結果から一次元モデルの周波数を求める.

発振周波数の比較結果を **Fig. 8** に示す. 直線が表す Brown の公式とは, ジェットの流入速度 V と周波数 f の関係を表した公式であり, 次式で与えられる.

$$f = 0.466j(100V - 40)(\frac{1}{100l} - 0.07) \tag{11}$$

l はエッジまでの距離, j は振動の次数によって決まる係数で, j =1.0, 2.3, 3.8, 5.4 となり, $j = 1.0$ が基音である. 二次元シミュレーションと (11) は近い値となったが, 一次元モデルとの差は, 速度が上昇するごとに大きくなっていることが分かる. これは Section 3 において, $V = 5\mathrm{m/s}$ の結果から求めた u/V を一定の値とみなしたことが原因と考えられる. エッジトーンを一次元で定性的に再現するには, モデル式内のパラメータ設定を注意深く行う必要がある.

4.　リアルタイムシミュレータとしての検証

一次元モデルによる評価の前に, Navier-Stokes 方程式に従う二次元非圧縮流体を実行した場合の計算時間について示す. Table 1 の二次元流体計算を OpenFOAM-2.3.1 で実行した場合の計算時間は **Fig. 9** に示す通りである. OpenFOAM はフラット MPI による並列計算のみをサポートしているため, ここでは, 8 コアまで使える 1 ノードのマシン上で MPI 並列実行をしている. 2 プロセスでは並列化の効果はないが, 4, 6, 8 プロセスでは, スピードアップの効果は見える. ただ, 少なくともこの計算内容に関して, 高速化に関する設定が十分であるとは言えない状態であるため, マルチプロセスによる並列化の効率はあまり良いとは言えない. 一般に, 他の分野のパッケージプログラムでも, 比較的小規模の計算を実行する場合は, 並列化による十分なスピードアップは期待できないのが普通である. ここでは, 時間間隔 5.0×10^{-5} sec 分の計算 (時間刻みを $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ としたので, 20 ステップ分) を計測の対象としたが, 8 プロセス並列の場合でも 30 秒程度の時間がかかっているため, 当然ながら RTS として利用することは不可能である.

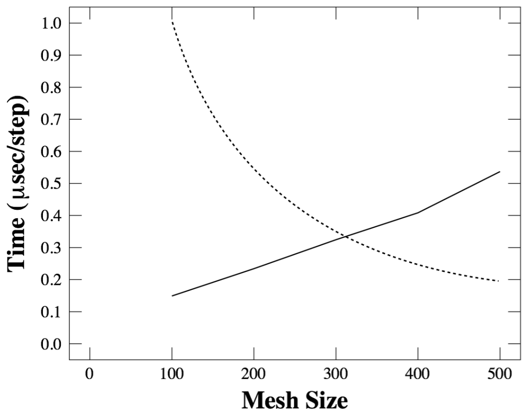

Fig. 10　Computation time of a step by one-dimensional edgetone model. The dotted line shows the value of a time step.

一方, 一次元偏微分方程式で記述したエッジトーンモデル (9) の計算時間は, **Fig. 10** に示す通りである. この数値計算では移流速度 u を, クーラン条件 $u\Delta t < \Delta x$ を満たすように設定する. クーラン条件とは, 時間刻み Δt と空間刻み Δx の関係を表したもので, この条件を満たさないと安定した結果を得ることができない. ここでは, $u = 5$ m/s, クーラン数 $\frac{u\Delta t}{\Delta x}$ を 0.1 とした場合の, 1 ステップの時間刻み Δt (点線) と, 1 ステップ当りの計算時間 t_{step} (実線) の実測結果を示した. $\Delta t > t_{\mathrm{step}}$ であれば, 現象の時刻よりも先に計算機による再現が出来るため, メッシュの数が 300 程度までの小さな値であれば, RTS として利用可能であることがわかる.

5.　ま　と　め

外部から振動流を与えた場合のジェットの振動現象とエッジトーン現象を, 偏微分方程式を用いた一次元モデル式で表現した. 今回提案したモデルと二次元のシミュレーション結果を比較することで, 一次元モデルの妥当性を確認した. しかしこのモデルでは, つながったジェットの振動とフィードバックは再現できるが, ジェットが途切れたりした場合の挙動は表現できない. また, このモデルは一次元であるので, 二次元以上で生じる現象である渦による影響には対応

できない．このモデルを計算時間の観点から評価すると，一次元モデル方程式の初期値問題を解く時間の計測結果から，RTS として利用可能であることを確認した．

参 考 文 献

1) 高橋公也, 宮本真孝, 伊藤泰典, 岩崎拓哉, 高見利也, 小林泰三, 西田晃, 青柳睦,「三次元エアリード楽器の流体音源と発振特性」数理解析研究所講究録 1776, pp. 100–114 (2011).
2) N. H. Fletcher and T. D. Rossing, “The Physics of Musical Instruments, ” 2nd Edition (Springer-Verlag, New York 1998).
3) G. B. Brown, “The Vortex Motion Causing Edge Tones, ” Proc. Phys. Soc. **49**, pp. 493–508 (1937); “The Mechanism of Edge-Tone Production, ” ibid. , pp. 508–521 (1937).
4) N. H. Fletcher, “Air Flow and Sound Generation in Musical Wind Instruments, ” Ann. Rev. Fluid Mech. 11, pp. 123–146 (1979).
5) J. W. S. Rayleigh, “On the Instability of Jets, ” Proc. London Math. Soc. **10**, pp. 4–13 (1878); “On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions, ” ibid. **11**, pp. 57–72 (1879).
6) L. Cremer and H. Ising, “The Self-Excited Vibrations of Organ Pipes, ” Acustica **19**, pp. 143–153 (1967).
7) S. A. Elder, “Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow, ” J. Acoust. Soc. Am. **64**, pp. 877–890 (1978).
8) A. W. Nolle, “Sinuous instability of a planar air jet: Propagataion parameters and acoustic excitation, ” J. Acoust. Soc. Am. **103**, pp. 3690–3705 (1998).
9) P. Drazin and L. N. Howard, “Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid, ” Adv. Appl. Mech. **9**, pp. 1–89 (1966).
10) http://www.openfoam.com/
11) S. Thwaites and N. H. Fletcher, “Wave Propagation on Turbulent Jets: II. Growth, ” Acustica 51, pp. 44–49 (1982).