

傾圧不安定波の特性に関するいくつかの考察

吉川, 裕
京都大学大学院理学研究科

<https://doi.org/10.15017/1526164>

出版情報 : 九州大学応用力学研究所所報. 146, pp.109-114, 2014-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

傾圧不安定波の特性に関するいくつかの考察

吉川 裕*¹
(2014年1月31日受理)

Some Investigations of Characteristics of Baroclinic Instability Unstable Waves

Yutaka YOSHIKAWA

E-mail of corresponding author: yosikawa@kugi.kyoto-u.ac.jp

Abstract

Characteristics of the most unstable wave of baroclinic instability are often interpreted as resonance of two Rossby waves in the upper and lower layer. In this paper, we considered this interpretation in more detail to deepen our understanding of baroclinic instability.

Key words : *Baroclinic instability, Wave-wave resonance*

1. はじめに

傾圧不安定は、大気・海洋中に見られる数ある不安定現象の中でも中規模擾乱の源として多くの現象に関連するため重要である。例えば海洋では黒潮続流域や南極周極流域を横断する方向の熱や物質の輸送に、傾圧不安定によって生じた中規模渦が重要な役割を果たしている。この傾圧不安定は、地球自転のもと有効位置エネルギーを開放しようとする運動であることから予想できるように、その不安定の強さは傾圧流速の強さや換算重力加速度 g' に依存するが、不安定の強さは層厚にも依存する。この層厚依存性に関する直感的な解釈を得ようというのが本稿の趣旨である。

傾圧不安定は、かつては不安定の必要条件などから論じられていたが(例えば Pedlosky 1987)、1980年代後半にはロスビー波の共鳴として解釈できることが示された(例えば Sakai 1989)。ロスビー波共鳴としての解釈は極めて直感的であり、また傾圧不安定波の特徴を比較的簡単に説明するため、最近の教科書(例えば Cushman-Roisin 1994)でもこの解釈で説明が行われている。しかし、それらの説明は、共鳴の条件について触れられていないことや、上下層の位相差についての記述に誤りがあるなど、不完全な点がある。これらの点についてさらに考察を進めると、より傾圧不安定の理解が進む。

以下では、傾圧不安定の成長率のパラメータ依存性や最大成長不安定波の構造を示し、ロスビー波共鳴としての解釈を振り返り、この解釈をさらに深めることで傾圧不安定の理解を進めることを目的とする。

2. 傾圧不安定の線形解析解

本稿では、最も単純な f 面二層模型における傾圧不安定(Phillips 模型)を用いる。基本場は x 方向には変化しないとし、上層と下層の層厚をそれぞれ H_1 、 H_2 、上層と下層の流速をそれぞれ U_1 、 U_2 とし、上層と下層の境界面は傾き α で一定とする(Fig. 1)。流速は地衡流平衡にあるから、 $U_1 - U_2 = \alpha g'/f$ の関係がある。

このような基本場のもと、基本場からのずれ(擾乱)が成長するかどうかを解析するのが不安定解析である。傾圧不安定擾乱の解析には準地衡渦位方程式が適している。各層の擾乱の流線関数が従う渦位方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) (\nabla^2 \phi_1 - F_1(\phi_1 - \phi_2)) + F_1(U_1 - U_2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) (\nabla^2 \phi_2 + F_2(\phi_1 - \phi_2)) - F_2(U_1 - U_2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

で与えられる。ここで ϕ_1 、 ϕ_2 は上層、下層の擾乱の流線関数であり、

$$F_1 = \frac{f^2}{g'H_1} \quad F_2 = \frac{f^2}{g'H_2}$$

である。

擾乱の構造を

$$\phi_i = \Phi_i \exp i(kx + ly - \omega t)$$

と仮定する。 ω が複素数でその虚部が正のとき、擾乱は指数関数的に増大することになるので、場が不安定であると言える。この式を擾乱の支配方程式に代入し、振幅 Φ_1 、 Φ_2

*1 京都大学大学院理学研究科

がともに零でない条件から

$$\begin{aligned} & \{(\omega - kU_1)(K^2 + F_1) + kF_1(U_1 - U_2)\} \\ & \times \{(\omega - kU_2)(K^2 + F_2) - kF_2(U_1 - U_2)\} \\ & - F_1F_2(\omega - kU_1)(\omega - kU_2) = 0 \quad (1) \\ & (K^2 = k^2 + l^2) \end{aligned}$$

を得る。

ここで順圧流速 $U_t = (U_1 + U_2)/2$ および傾圧流速 $U_c = (U_1 - U_2)/2$ を導入し、(1) 式を整理すると、

$$\omega = kU_t + kU_c \frac{F_2 - F_1 \pm \sqrt{K^4 - 4F_1F_2}}{F_1 + F_2 + K^2}$$

と、分散関係式が求まる。

この式より基本場が不安定 ($\omega_i > 0$) であるのは、

$$K^4 - 4F_1F_2 < 0$$

のときであり、そのときの成長率 ω_i は

$$\omega_i = \frac{|U_c|}{Rd} |kRd| \sqrt{4 \frac{H_1H_2}{H^2} - (KRd)^4} \quad \left(Rd = \frac{\sqrt{g' \frac{H_1H_2}{H}}}{f} \right)$$

で与えられる (Rd は内部変形半径)。以上の式から明らかのように、傾圧不安定の成長率には順圧流速 (U_t) は無関係である。(それは単に擾乱を移流するのみである。) 一方傾圧流速 (U_c) は境界面偏位の傾きを表すので重要である。これらは傾圧不安定が位置エネルギーを開放しようとする運動であることから自明である。

最大成長擾乱の場合には、上層と下層の振幅は

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{1}{2} K^2 F_1^{-1} \mp i \sqrt{\frac{F_2}{F_1} - \frac{1}{4} K^4 F_1^{-2}}$$

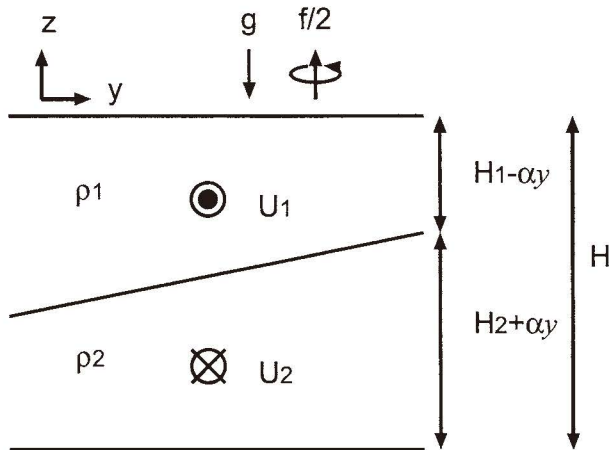


Fig. 1 Schematics of background field.

の関係にある。よって Φ_1, Φ_2 の振幅・位相比は

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| &= \frac{F_2}{F_1} = \frac{H_1}{H_2} \\ \arg \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) &= \tan^{-1} \left(-\sqrt{4 \frac{H_1H_2}{H^2} (KRd)^{-4} - 1} \right) \end{aligned}$$

で与えられる。

単純な場合として、 $H_1 = H_2 = H/2$ ($F_1 = F_2$) の場合を考える。このとき、成長率は

$$\omega_i = \frac{|U_c|}{Rd} |kRd| \frac{\sqrt{1 - (KRd)^4}}{1 + (KRd)^2}$$

となる。無次元関数

$$|x| \frac{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}{1 + x^2 + y^2}$$

の最大値は $x (= kRd) = \pm 0.64, y = 0$ で 0.4142 である (Fig. 2)。従って、もっとも速く成長する不安定波の成長率と波長は

$$\omega_i^{max} = 0.41 \frac{U_c}{Rd} \text{ at } k = \pm 0.64 Rd^{-1}, l = 0$$

となる。波長は $2\pi/k$ なので最大成長擾乱の波長は内部変形半径の約 10 倍となる。(傾圧不安定の波長が、変形半径の数倍程度と言われる場合もあるが、その場合変形半径の定義が違う。) 例えば $H_1 = H_2 = H/2$ のときは、 Φ_1 に対する Φ_2 の振幅比は 1、位相差は (最大成長波数は $kRd = 0.64$ に注意して) $\tan^{-1}(-\sqrt{0.64^{-4} - 1}) = -66^\circ$ である。 Φ_2 のほうが Φ_1 よりも位相が進んでいる。(ちなみに連続成層で考えた Eady 模型の場合、

$$\omega_i^{max} = 0.31 \frac{U_c}{Rd} \text{ at } k = \pm 1.60 Rd^{-1}$$

$$\left(\frac{U_c}{Rd} = \frac{f}{N} \frac{dU}{dz}, Rd = \frac{NH}{f} \right)$$

である。) これらの式からわかるように、最大成長率を与える波数は H_1, H_2, Rd だけでできまり、傾圧流速 (境界面変位の傾き) は関係ない。傾圧流速が大きくなれば不安定の成長率も大きくなるが、最大成長率は不変である。また、

$$\frac{|U_c|}{Rd} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{g'H}{H_1H_2}}$$

と書き表されることからわかるように、境界面の傾き (α) が大きい場合、あるいは密度差 (g') が大きい場合、成長率が高い。傾圧不安定は位置エネルギーを解放しようという運動であると思えば当然である。

次に層厚変化の影響を調べるため、変形半径を固定し、 H_1H_2/H^2 をのみを変化させる (全水深は変化する)。成長率を波数及び H_1H_2/H^2 の関数として示したのが Fig. 3 である。変形半径が一定の時、上・下層の層厚が等しい時に最も成長率が大きく、波数 (波長) も大きい (小さい) ことがわかる。

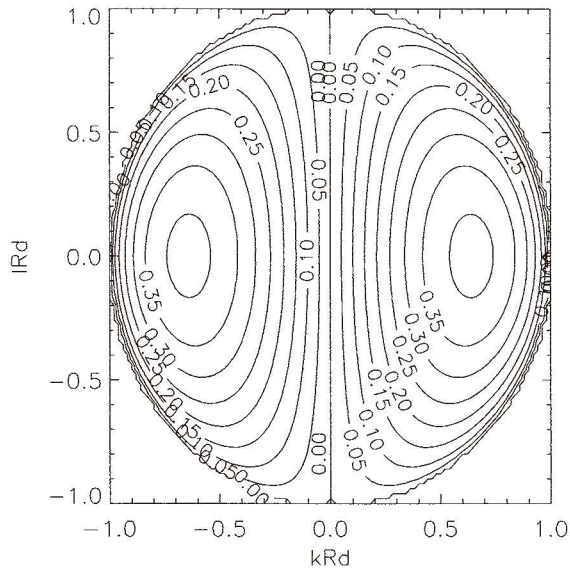


Fig. 2 Growth rate of baroclinic instability ($H_1 = H_2$). Horizontal (vertical) axis is nondimensional wave number in x (y) direction. Growth rates are normalized by U_c/Rd .

次に全水深 (H) を固定し上・下層の層厚を変化させた場合を考える。この場合先に定義した変形半径 (Rd) は変化する。成長率は $H_1/H = r$ として

$$\omega_i = \frac{|U_c|}{Rd'} |kRd'| \sqrt{\frac{4 - \frac{1}{r(1-r)} - (KRd')^4}{\frac{1}{r(1-r)} + (KRd')^2}}$$

$$\left(Rd' = \frac{\sqrt{g'H}}{f} \right)$$

と表される。ただし Rd' は全水深により定義された変形半径である。成長率の層厚比依存性を Fig. 4 に示す。この場合も、上・下層の層厚が等しい場合が最も成長が早いことがわかる。開放できる位置エネルギーの量は H_1 、 H_2 に依存しないので、別の制約からこの層厚依存性が生まれているはずである。

3. 傾圧不安定のロスビー波共鳴としての解釈

準地衡渦位方程式から最大成長擾乱の成長率や構造は数学的に求めるが、例えば何故最大成長擾乱の波長が変形半径の 10 倍程度なのか、何故下層の位相が進んでいるのか、何故層厚比が変わると最大成長擾乱の波長が変わるのか等を理解するには、傾圧不安定の仕組みについての洞察が必要である。傾圧不安定の場合、上層・下層にそれぞれ生じるロスビー波の共鳴と解釈すると理解しやすい。このような不安定の解釈は、最近の教科書 (例えば Cushman-Roisin

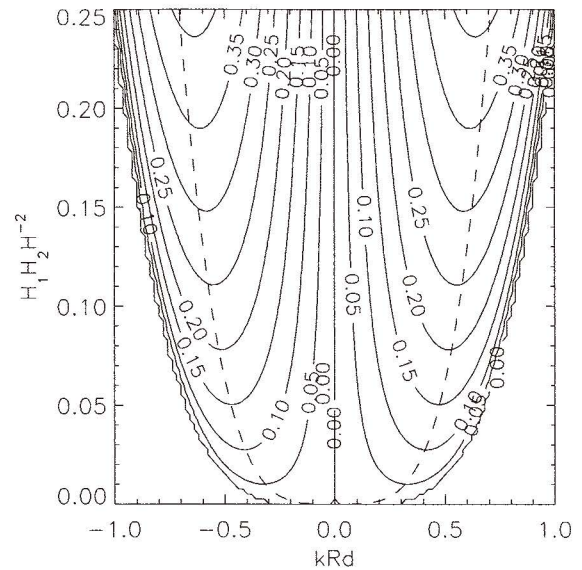


Fig. 3 Same as Fig. 2 but with H_1H_2/H^2 as vertical axis. Dashed lines show $(kRd)^4 = H_1H_2/H^2$ (see text for details).

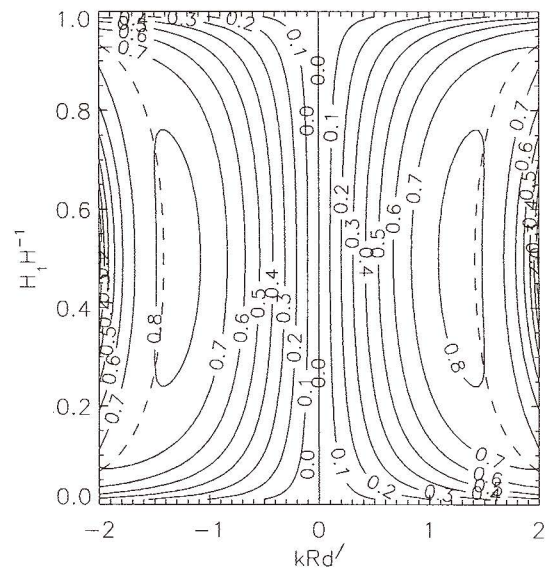


Fig. 4 Same as Fig. 3 but with H_1/H as vertical axis. Dashed lines correspond to $(kRd')^4 = H_1H_2/H^2$.

1994) でも説明されているし、古くは Gill (1982) でもそれを何わせる記述となっている。以下その概略をまず述べ、層厚依存性の解釈を試みる。

上層および下層の擾乱をひとまず別々に考え、それぞれの層での擾乱を、上層と下層の傾き α を感じた地形性ロスビー波と捉えるのが出発点である。波長が変形半径程度のロスビー波を考えると、ロスビー波は長波・短波の両性

質を持つ。例えば上層のロスビー波に着目すると、 α が正のとき、層厚は北 (y の正方向) に向かって薄くなっているため、北に変位した粒子は、縮むことで負の相対渦度を獲得するが (短波の特性)、同時に完全には縮めないため周囲と比べ層厚が大きくなっている (長波の特性)。上層の不十分な縮みは境界面を押し下げ、従って下層も縮み同様に負の相対渦度を獲得する。このように、上層のロスビー波に伴って、上層のみならず下層にも流れが引き起こされる。下層のロスビー波についても同様である。ただし層厚勾配の符号が逆であるため、伝搬方向及び流速と変位の位相関係が東西逆となっていることに注意が必要である。

今、上層のロスビー波に対して下層のロスビー波の位相が 90° 進んでいる場合を考える (Fig. 5)。このとき、上層のロスビー波によって引き起こされた下層での流れは下層のロスビー波に伴う流体の変位を増大させ、また下層のロスビー波によって引き起こされた上層での流れは上層のロスビー波による変位を増大させる。増大された変位は流れを強化し、強化された流れは再び互いの変位を増大させる。これがロスビー波の共鳴と呼ばれるもので、共鳴により擾乱の変位が増大する。

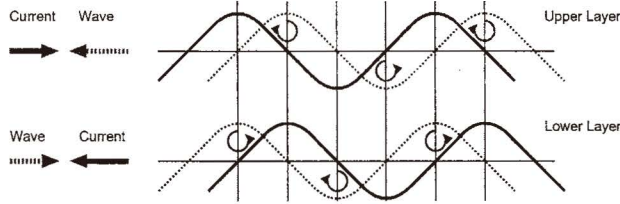


Fig. 5 Schematics of Rossby wave resonance. Solid line represents perturbation velocity, while dotted line denotes perturbed particle displacement.

このように傾圧不安定擾乱をロスビー波共鳴と考えると、例えば上・下層の位相関係などは理解しやすい。しかし、傾圧不安定の特性をより詳しく理解するにはもう少し説明が必要である。例えば上記の説明では位相差は 90° としてあるが、実際に求めた解は 66° であった ($H_1 = H_2$ の時)。Cushman-Roisin (1994) の教科書では、その不一致の原因を二層模型であるとしているが、連続成層模型でも 90° ではないのであてはまらない。また、変形半径の 10 倍程度の擾乱が最も不安定である理由は特に示されていないが、以下に示すように詳しく考えると、変形半径の 10 倍程度でなければならないことがわかるし、層厚の変化によって最大成長擾乱の波長が大きくなる理由もわかる。以下では、既に求めた解析解を例に、もう少し詳しく述べる。

3.1 共鳴の条件 (波長依存性)

まず上記の説明で見落とされている点は、共鳴が持続するためには、上・下層のロスビー波の位相が相対的に固定

され続けなければならないこと、すなわち (平均流による移流も含めた) 位相速度が上・下層で同じでなければならないことである。共鳴を起こす上・下層のロスビー波を平均水深が $H_1 - \alpha y, H_2 + \alpha y$ でそれぞれ与えられる 1.5 層流体中のロスビー波と考えると、その位相速度は

$$c_1 = -\frac{\alpha g'}{f} \frac{1}{1 + \frac{g'H_1}{f^2} K^2}, \quad c_2 = \frac{\alpha g'}{f} \frac{1}{1 + \frac{g'H_2}{f^2} K^2}$$

である。各層における基本流 ($U_1 = U_t + U_c, U_2 = U_t - U_c$) による移流を考慮すると、上・下層のロスビー波の平均流による移流も含めた位相速度が同じとなる条件は、 $U_c = \alpha g'/f$ に注意して $c_1 + U_t + U_c = c_2 + U_t - U_c$ を整理して、

$$(KRd)^4 = \frac{H_1 H_2}{H^2} \quad (2)$$

を得る。

この結果からわかることは、上・下層のロスビー波の位相関係が固定されるためには、波長がある特定の値を取らなければならない、ということである。この条件を満たしてはじめて共鳴が持続し、擾乱が指数関数的に増大する。すなわち、ロスビー波位相固定の条件を満たすような波長が、最大成長率を有するのである。その波長は、 $H_1 = H_2$ のとき結果的に変形半径の 10 倍程度となる。Fig. 3, 4 には (2) 式も示してあるが、成長率の層厚依存性を、(移流も含めた) 位相速度一致の条件が良く説明していることがわかる。つまり層厚が変化すると、位相固定の条件を満たすロスビー波の波長が変化し、その結果最大成長率を有する不安定擾乱の波長が変化する。

3.2 共鳴時の位相差

Fig. 5 に示したように、下層の位相が進んでいると共鳴が起こり得るが、通常のロスビー波を考えるならその位相差は 90° である。しかし実際に求めた解では位相差は 66° であった。この違いの原因を $H_1 = H_2, U_t = 0, l = 0$ の簡単な場合を例に調べる。上層・下層における流体粒子の変位を y_1, y_2 とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial t} + U_c \frac{\partial y_1}{\partial x} &= v_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} - U_c \frac{\partial y_2}{\partial x} &= v_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \end{aligned}$$

と各層の流線関数から求められる。例えば

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Phi_1 \exp(ikx) \exp(\omega_1 t) \\ y_1 &= Y_1 \exp(ikx) \exp(\omega_1 t) \end{aligned}$$

とおいて上式に代入すると、

$$\begin{aligned} (\omega_i + ikU_c) Y_1 &= ik\Phi_1 \\ Y_1 &= \frac{1}{U_c} \frac{1 + i \frac{\omega_i}{kU_c}}{\frac{\omega_i^2}{k^2 U_c^2} + 1} \Phi \end{aligned} \quad (3)$$

となる。下層についても同様に計算し、最大成長擾乱解で得られる値 $\omega_i/kU_c = 0.6472$ を代入すると、

$$Y_1 = \frac{0.7048}{U_c} (1 + i0.6472) \Phi$$

$$Y_2 = -\frac{0.7048}{U_c} (1 - i0.6472) \Phi$$

と求められる。

最大成長擾乱の上層・下層における流線関数 (Φ)、南北流速 (v)、及び流体粒子変位 (y) を Fig. 6 に示す。上層(下層)における流速と下層(上層)における変位が同位相となっており、流速と変位の位相差が 66° (90° 以下) であるものの、確かに共鳴が起きていることがわかる。

流線関数と粒子変位の位相関係式 (3) から明らかのように、 $\omega_i = 0$ なら流線関数と粒子変位の位相差は 0° (上層) または 180° (下層) であり、(流線関数と流速の位相差は常に 90° であるから) 流速と粒子変位の位相差は 90° となる。言い換えると、位相差が 90° にならないのは、 $\omega_i \neq 0$ であるから、すなわちロスビー波の振幅が時間とともに増大しているからである。Fig. 7 にはロスビー波の位相速度で動く系から見た流速(黒実線)と流体粒子(青・水色丸)を示している。この図の場合、擾乱の位相は固定されているが、流体粒子は平均流で右向きに移流されている。中立波 ($\omega_i = 0$ 、左図) の場合、上流に位置する水色の粒子は、下流の青い粒子に時間的に遅れて変位する。流速が時間変化しないので、変位の最大値は水色粒子も青色粒子も同じである。最大変位は流速が零となる場所で起こるので、流速と変位の位相差は 90° となる。一方不安定波 ($\omega_i > 0$ 、右図) の場合、青色粒子が変位してから水色粒子が変位するまでの間に流速振幅が増大するため、水色の粒子の変位量が青い粒子の変位量より大きい。そのため、青色粒子の流速零の位置(位相でいうと 90° の位置)に到達しても、その上流の位置における水色粒子の変位の方が大きく、流速と変位の位相差は 90° 以下となる。このように、成長率の大きさに依存して、流速と変位の位相差が変わり、それに応じて上層と下層のロスビー波の位相差が決まる。

4. おわりに

本稿では傾圧不安定の不安定波の特性を、ロスビー波共鳴という考え方で解釈した。あくまで解釈なので、他にも解釈(考え方)があっても良い。なお、ロスビー波の成長率はここでは無視した β や海底斜面にも依存するが、これらの依存性もロスビー波共鳴という解釈と整合的である。例えば、 β の値が境界面変位の傾き α に起因する地形性渦位勾配 $\beta_t = \alpha f/H$ と等しいとき、本稿で想定した状況で

は下層のロスビー波が発生しなくなるが、実際この条件では傾圧不安定の成長率は零となる。ただし、本稿で導入した位相固定の条件だけでは、 β による成長率の変化を説明できない。流体の南北変位に伴い生じる相対渦度が β により変化することなど、別の要因を考慮する必要があるであろう。

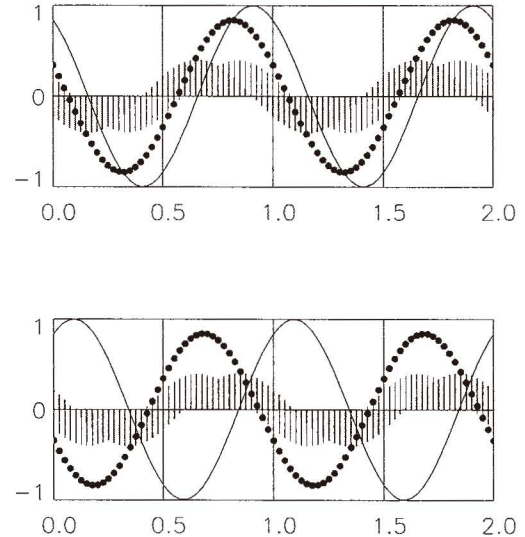


Fig. 6 Upper: Stream function Φ_1 (black line), meridional velocity v_1 (red thick line) and particle displacement y_1 (red circle) in the upper layer. The lower layer meridional velocity v_2 is also plotted (blue thin line). Lower: Stream function Φ_2 (black line), meridional velocity v_2 (blue thick line), particle displacement y_2 (blue circle). The upper layer meridional velocity is also plotted (thin red line).

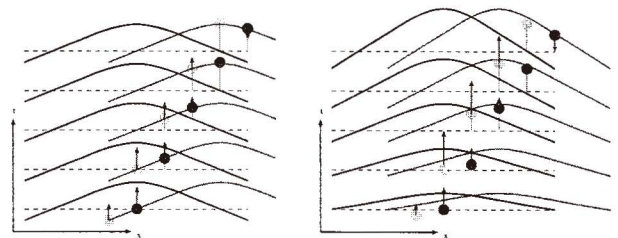


Fig. 7 Schematics of Rossby wave velocity (black line) and particle displacement (sky and blue circle), seen in the frame moving with the Rossby phase speed.

謝辞

本稿の内容は著者が応用力学研究所に着任して間もない頃、同僚や共同利用研究として開かれていた中深層循環研究会のメンバーに、セミナーなどを通じて紹介した内容である。みなさんからは貴重な意見を頂いた。特に増田章教授から β 依存性の解釈の不備について当時ご指摘頂いた。その不備は現在でも完全には解消していないが、同教授の退職記念号ならそのような内容でも許して頂けるのではと思ひ、筆をとった(正確にはキーボードを叩いた)次第である。記して感謝します。

参考文献

- 1) Cushman-Roisin, B., 1994: Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. *Prentice-Hall*.
- 2) Gill, A. E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics. *Academic Press*, 1st edition.
- 3) Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics. *Springer-Verlag*, 2nd edition.
- 4) Sakai, S., 1989: Rossby-Kelvin instability: a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 202, pp. 149 – 176.