

振動する外力によって強制されたロスビー波による 渦位輸送 : 基本特性

水田, 元太
北海道大学地球環境科学研究所

<https://doi.org/10.15017/1526160>

出版情報 : 九州大学応用力学研究所所報. 146, pp.75-85, 2014-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

振動する外力によって強制されたロスビー波による渦位輸送 — 基本特性

水田 元太*1
(2014年1月28日受理)

The potential-vorticity flux by the barotropic Rossby wave excited by the oscillatory forcing – basic features

Genta MIZUTA

E-mail of corresponding author: mizuta@ees.hokudai.ac.jp

Abstract

The northward potential-vorticity flux by the barotropic Rossby wave excited by the oscillatory forcing is examined analytically. The potential-vorticity flux is obtained from the correlation between the streamfunction and forcing for various forms of the forcing, which is periodic in the zonal direction or in more general form in space. When the wave and forcing are in phase and out of phase, the potential-vorticity flux is northward and southward, respectively. Since the phase of the resonant Rossby wave changes in the meridional direction, the sign of the northward potential-vorticity flux changes alternatively in the meridional direction. Thus, the meridional scale of the mean flow induced by the convergence of the potential-vorticity flux is determined by the typical meridional wavelength of the resonant wave, and is less sensitive to the distribution of the forcing. The distribution of the forcing primarily affects the amplitude of the mean flow.

Key words : *Rossby wave, Potential-vorticity flux, Wave-mean interaction*

1. はじめに

西岸境界流域では強い流れの不安定によって中規模擾乱が活発に発生するとともに、擾乱によって大規模な平均流が形成される。Holland (1978)¹⁾ は中規模擾乱を分解可能な解像度で数値実験を行い、亜熱帯、亜寒帯循環の西岸域に再循環が生じることを示した。海盆規模の Sverdrup 循環とは異なり再循環は順圧的で、深層まで達する。彼女はまたエネルギーの収支解析を行ったものの、再循環が形成されるしくみに関する見通しを得ることは出来なかった。その後、Holland と Rhines (1980)²⁾ は渦位の収支を解析することで、擾乱によって再循環が形成される過程を診断することに成功した。

現実の西岸境界域では、傾圧不安定、擾乱どうしの非線型相互作用、擾乱による平均流形成等の複数の過程が混在している。数値シミュレーションによって現実的な西岸境界域を直接再現することは重要であるが、一方で、例えば一様な地衡流乱流などの極限的な状況についての知見を深めることは現実を理解する上での鍵となり得る。その様な

極限の一つとして線型ロスビー波による平均流形成の問題が挙げられる。

Haivdovogel と Rhines (1983)³⁾ は西岸境界域における複雑な渦活動による非線型強制を単純化した外力で置き換えた数値実験を行った。彼らは順圧モデルで海盆の中央に置かれた外力からロスビー波を発生させると、北向きの渦位輸送が生じ、再循環と同じ向きの平均循環が形成されることを示した。しかし渦位輸送が発生するしくみに関しては定性的な議論が多く、条件を変えて様々な実験を行っているものの、再循環のスケールは何によって決まるか、といった議論は明確にはなされていない様に見える。場所によっては渦位輸送が北向きではなく、南向きとなることの原因も明らかではない。

擾乱による北向き渦位輸送と平均流の関係についてはこれまで多くの記述がなされている (例えば Rhines 1977⁴⁾)。このことを順圧の場合について概観してみる。まず東西に周期的な領域を考える。東西方向の運動方程式は、

$$u_t = (f + \zeta)v - \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right)_x - \frac{p_x}{\rho_0} + \text{散逸, 外力.}$$

ここで、 x, y, t は東向、北向座標、時間、 u, v はそれぞれ

*1 北海道大学地球環境科学研究所

流速の東向、北向成分、 $\zeta = v_x - u_y$ は渦度、 p は圧力、 f はコリオリ係数、 ρ_0 は密度を表す。この式を東西平均すると、

$$\bar{u}_t^x = \overline{\zeta v^x} + \text{散逸, 外力} \quad (1)$$

となり、北向きの渦度ないしは順圧渦位の輸送は、東西平均場に対する見かけ上の東向応力に相当する。ここで \bar{A}^x は変数 A の x 方向の平均を表す。

次に $x = 0, L$ に固体壁がある領域を考える。いわゆる渦 Sverdrup 平衡の関係は次の様に表される。

$$\beta \bar{\psi}_{s,x} = -(\overline{\zeta' u'})_x - (\overline{\zeta' v'})_y$$

ここで、 \bar{A} 、 A' はそれぞれ時間平均と擾乱成分、 $\bar{\psi}_s$ は Sverdrup 流線関数とする。この式を x について積分すれば、擾乱による渦位輸送の収束によって西方に延びる平均循環が形成されることが示される。渦位の収束が東西方向に分布を持つ場合でも、その積分値が西方まで延びる平均流の大きな構造を決めることになる。西岸 $x = 0$ での Sverdrup 流線関数の値を $\bar{\psi}_{sw}$ とおくと

$$\beta \bar{\psi}_{sw} = \left(\int_0^L \overline{\zeta' v'} dx \right)_y \quad (2)$$

となり、北向渦位輸送の収束が擾乱から十分西方での平均循環を決定することが示される。従って、領域が東西に周期的か、固体壁に挟まれているかに依らず、北向渦位輸送は擾乱によって形成される平均流の分布を決める量となる。

この研究では Haidvogel と Rhines (1983) の研究を掘り下げ、ロスビー波による渦位輸送の分布を詳細に議論する。特に渦位輸送の南北スケール、南北成分の符号に着目する。彼らの研究と同様にロスビー波は時間的に振動する外力によって強制されるとする。はじめに基本的な場合として外力が時間、東西方向に \sin 関数的に振動し、南北方向にはある緯度帯に局在している場合を考える。この場合、比較的単純な解析解が得られるので、渦位輸送の南北成分の分布を決定する要因を厳密に議論することが出来る。次に Haidvogel と Rhines (1983) と同様に外力が東西南北両方向に局在している場合を考え、東西に周期的な場合と対比させることによって、渦位輸送の分布について解釈を行う。ここでは渦位が輸送されるしくみの基礎を明らかにするために、外力が空間的に同位相で振動する様な最も単純な場合に焦点を絞り、式の導出などを含め少し丁寧に議論をすることを試みる。

以下では次の章立てに沿って議論を進める。2 節では問題の定式化を行い、それに基づき 3 節で北向渦位輸送の基本的性質を議論する。4 節では具体的な形の外力を与えた場合の例について述べる。外力の南北分布が異なる 2 つの例について解を求め、解の基本的な性質が外力の些細な部分に依存しないことを確認する。5 節ではまとめを行う。

2. 定式化

順圧で海底が平坦な β 面上の無限領域に時間的に振動する $O(\epsilon)$ の外力が加えられた場合の応答を考える。準地衡流近似が成り立つとすると、渦度方程式は

$$\zeta_t + \beta v = w - \delta \zeta \quad (3)$$

$$w = \epsilon W_E e^{-i\omega t} - J(\psi, \zeta) \quad (4)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad v = \psi_x \quad (5)$$

ここで、 ψ は流線関数、 w は外力と非線型項を表し、 $W_E(x, y)$ は外力の振幅、 $\omega > 0$ は角振動数、 J は Jacobian、 β はコリオリ係数の y 微分を表す。計算の便宜上 δ に比例する散逸を加えるが、 δ は小さな極限のみを考え、必要な場合以外は無視するものとする。

$\epsilon \ll 1$ として各変数を ϵ を用いて摂動展開する。

$$\psi = \epsilon \Psi^{(1)} e^{-i\omega t} + \epsilon^2 \Psi^{(0)} + \epsilon^2 \Psi^{(2)} e^{-2i\omega t} + \dots \quad (6)$$

$$w = \epsilon W^{(1)} e^{-i\omega t} + \epsilon^2 W^{(0)} + \epsilon^2 W^{(2)} e^{-2i\omega t} + \dots \quad (7)$$

$$\zeta = \epsilon Z^{(1)} e^{-i\omega t} + \epsilon^2 Z^{(0)} + \epsilon^2 Z^{(2)} e^{-2i\omega t} + \dots \quad (8)$$

$$v = \epsilon V^{(1)} e^{-i\omega t} + \epsilon^2 V^{(0)} + \epsilon^2 V^{(2)} e^{-2i\omega t} + \dots \quad (9)$$

右肩の括弧内の数字は振動数を表している。これらを (3) に代入すると、 ϵ の最低次のオーダーで次の方程式が成り立つ。

$$-i\omega Z^{(1)} + \beta \Psi_x^{(1)} + \delta Z^{(1)} = W^{(1)} = W_E \quad (10)$$

次のオーダーでは

$$\beta \Psi_x^{(0)} + \delta Z^{(0)} = W^{(0)} = -\frac{1}{2} J(\Psi^{(1)}, Z^{(1)*}) \quad (11)$$

$$-2i\omega Z^{(2)} + \beta \Psi_x^{(2)} + \delta Z^{(2)} = W^{(2)} = -\frac{1}{2} J(\Psi^{(1)}, Z^{(1)}) \quad (12)$$

となり、外力によって振動数 ω の擾乱が生じ、その非線型性によって次のオーダーで平均流と振動数 2ω の運動が形成される、という形の方程式系が得られる。ここで $*$ は複素共役を表す。

最低次の方程式 (10) は x 方向に Fourier 変換すると、 y に関する 2 階の微分方程式

$$\tilde{\Psi}_{yy} - \lambda^2 \tilde{\Psi} = \frac{i\tilde{W}}{\omega + i\delta} \quad (13)$$

となる。ここで、

$$\tilde{\Psi}(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{(1)}(x, y) e^{-ikx} dx$$

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(k, y) e^{ikx} dk$$

λ は次の式で与えられる。

$$\lambda = i\ell = \sqrt{k^2 + \frac{\beta k}{\omega + i\delta}} \quad (14)$$

定数 k_β を

$$k_\beta = \frac{\beta}{2\omega} \quad (15)$$

と定義すると、 δ が小さい極限では $-2k_\beta < k < 0$ のとき λ は虚数で、(13) は波数 l で y 方向に振動し、波として伝播する形の解を持つ。 k がそれ以外の範囲をとるときは、 λ は実数で (13) は外力を加えられた領域から y 方向に指数関数的に減衰する解を持つ。以下では、それぞれを伝播型、捕捉型の解とよぶことにする。(尚、(14) 右辺で平方根の中身の虚部は $k > 0, \delta > 0$ のとき微小な負の値をとるが、この場合の平方根は $\delta = 0$ の場合と同じく実部が正のものの方をとるものとする。すなわち \sqrt{z} の切断を $\arg z$ が少し負になる所にとる。)

外力 $W_E(x, y)$ が x 方向に周期的な場合は、

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \widehat{\Psi}(y)e^{ikx} \quad (16)$$

その他の変数についても同様におき、(10) に代入すると、 $\widehat{\Psi}, \widehat{W}$ に関して (13) と同じ形の方程式が得られる。

3. 渦位輸送

はじめに擾乱が時間とともに任意に変化する場合を考える。擾乱は微小とし、統計的平衡状態を仮定する。今、次の様な流体粒子の南北変位の擾乱成分を考える。

$$\eta' = \int v' dt$$

(3) の擾乱成分をとったものに $-\eta'$ をかけ時間平均をとると、 $-\overline{\eta'v'} = -(\overline{\eta'^2})_t/2 = 0$ であることから、

$$\overline{\zeta'v'} = -\overline{\zeta'_t\eta} = -\overline{w'\eta'} \quad (17)$$

という関係式が得られる。ここで、 δ はゼロとする。特に、擾乱が時間、東西方向に周期的で $\psi' \propto e^{i(kx - \omega t)}$ の様な関係があるときは、

$$\overline{\zeta'v'} = \frac{k}{\omega} \overline{w'\psi'} \quad (18)$$

となる。これらの関係式は、外力や非線型効果から生じる強制がない所では渦位輸送の南北成分はゼロになる、といういわゆる非加速定理を表している。

それでは、渦位輸送の南北成分の符号は何によって決まるのか? (3) の両辺に $-\psi'$ を掛けて時間平均をとると、次の様なエネルギーの式が得られる。

$$0 = \left(\frac{|\nabla\psi'|^2}{2} \right)_t = -\nabla \cdot \mathbf{J} - \overline{w'\psi'} \quad (19)$$

ここで、 \mathbf{J} は次の様なエネルギー輸送ベクトル、

$$\mathbf{J} = -\overline{\psi'\nabla\psi'_t} - \frac{\beta\psi'^2}{2} \mathbf{i} \quad (20)$$

\mathbf{i} は x 方向の単位ベクトルを表す。この関係式から、外力が系に対し仕事を行っているならば、 $\overline{w'\psi'} < 0$ であることが分かる。

(18), (19) を比較し、(13) が伝播型の解を持つとき $k/\omega < 0$ であることに注意すると、次の様な結論が導かれる。前提として、擾乱が時間、東西方向に周期的であるとする。すなわち、伝播型の解が存在する場合には、系に対し外力が仕事をし、エネルギーが波によって無限遠方に運ばれている場所では渦位は北向きに輸送される。反対に周囲から伝播して来た波と外力の位相が合わず系からエネルギーが取り去られる場所があるなら、そこでは渦位は南向きに輸送される。解が捕捉型の場合は、エネルギーは無限遠方へは運ばれない。次節で見る様に、このとき外力は系に対し仕事をせず、南北方向の渦位輸送はどこでも生じない。

上の考察をふまえ、外力が時間方向に周期的な場合に話題を戻す。最低次のオーダーでは $\zeta' = \epsilon Z^{(1)}e^{-i\omega t}$, $v' = \epsilon V^{(1)}e^{-i\omega t}$ なので、北向渦位輸送は次の様に表される。

$$\overline{\zeta'v'} = \epsilon^2 Y, \quad Y = \text{Re} \frac{Z^{(1)*} V^{(1)}}{2} \quad (21)$$

ここで Re は実部を表す。外力が東西方向にも周期的な場合は、(10) に (16) を代入すると、

$$Z^{(1)} = \frac{\beta k \widehat{\Psi} + i \widehat{W}}{\omega} e^{ikx} \quad (22)$$

という関係が成り立つことから、

$$Y = \text{Re} \frac{k \widehat{\Psi} \widehat{W}^*}{2\omega} \quad (23)$$

となり、上の (18) の所で予想された通りの関係式が得られる。このとき北向渦位輸送 Y は x 方向に一定となる。

外力が東西方向に一般的な形をとる場合には、北向渦位輸送は東西に変化する分布を持つが、ここでは、1 節の (2) の所で行った考察より、東西方向に積分した北向渦位輸送に着目する。

$$\mathcal{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} Y dx \quad (24)$$

と定義すると、 \mathcal{Y} は Y の Fourier 変換 $\widetilde{Y}(k)$ の $k = 0$ における値に等しいので、畳込み積分を利用して、

$$\mathcal{Y}(y) = \frac{1}{4\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Z}^*(k, y) \widetilde{V}(k, y) dk \quad (25)$$

となる。各 Fourier 成分について (22) と同様の関係が成り立つので、結局、次の関係式が成り立つ。

$$\mathcal{Y}(y) = \frac{1}{4\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \widetilde{\Psi}(k, y) \widetilde{W}^*(k, y)}{2\omega} dk \quad (26)$$

従って、 Ψ, W はそれぞれ様々な東西波数の成分が重ね合わさったものだが、 \mathcal{Y} に寄与するのは同じ波数の成分どうしを掛け合わせたものであることが分かる。

4. 結果

ここまでの定式化を用いて、外力に具体的な形を与えた例について北向渦位輸送の解を求める。以下では2つの例について、それぞれ外力が東西方向に周期的な場合と、異なる波数成分の重ね合わせで表される場合について議論する。

4.1 指数関数型外力の例

4.1.1 東西に周期的な場合

b を正の実数、 A を複素数として、東西に周期的な外力の振幅が

$$\widehat{W}(y) = Ae^{-\frac{|y|}{b}} \quad (27)$$

の形をとる場合を考える。(13) で $\widehat{\Psi}$, \widehat{W} を $\widetilde{\Psi}$, \widetilde{W} に置き換えた式を y についての Fourier 変換を用いて解くと次の関係式が得られる。

$$\widehat{\Psi} = \frac{-i}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{W}^y}{l'^2 + \lambda^2} e^{il'y} dl' \quad (28)$$

ここで、

$$\widetilde{W}^y(l') = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{W}(y) e^{-il'y} dy$$

$$\widehat{W}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}^y(l') e^{il'y} dl'$$

\widehat{W} が (27) で与えられるとき、

$$\widetilde{W}^y = \frac{2bA}{b^2 l'^2 + 1} \quad (29)$$

となるので、上の式は

$$\widehat{\Psi} = \frac{-i}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bA}{(b^2 l'^2 + 1)(l'^2 + \lambda^2)} e^{il'y} dl' \quad (30)$$

となる。ここで、 C_1 , C_2 をそれぞれ複素平面上で実数軸によって半分に切られた、十分大きな半径を持つ円の上半分、下半分に沿った経路とすると、 $y > 0$ のとき、 C_1 の円弧部分に沿った積分はゼロとなるので、(30) の右辺は C_1 に沿った一周積分に等しい。また被積分関数を持つ極のうち $l' = i/b$, $i\lambda$ は $\delta > 0$ のとき常に C_1 の内側に含まれる(解が伝播型のときでも (14) より $\text{Re } \lambda > 0$ となる)。同様に $y < 0$ の場合は、経路 C_2 沿った積分を考えると結局、次の解が得られる。

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}_R + \widehat{\Psi}_F \quad (31)$$

$$\widehat{\Psi}_R = \frac{ibAe^{-\lambda|y|}}{\omega\lambda(b^2\lambda^2 - 1)} \quad (32)$$

$$\widehat{\Psi}_F = -\frac{ib^2Ae^{-\frac{|y|}{b}}}{\omega(b^2\lambda^2 - 1)} \quad (33)$$

この関係式で $\widehat{\Psi}_R$, $\widehat{\Psi}_F$ はそれぞれ $l' = i\lambda$, i/b の極に対応する成分を表す。(13) は y を時間と見なせば外力を受けた調和振動子の運動方程式と同じ形をしており、 $\widehat{\Psi}_R$ は振動

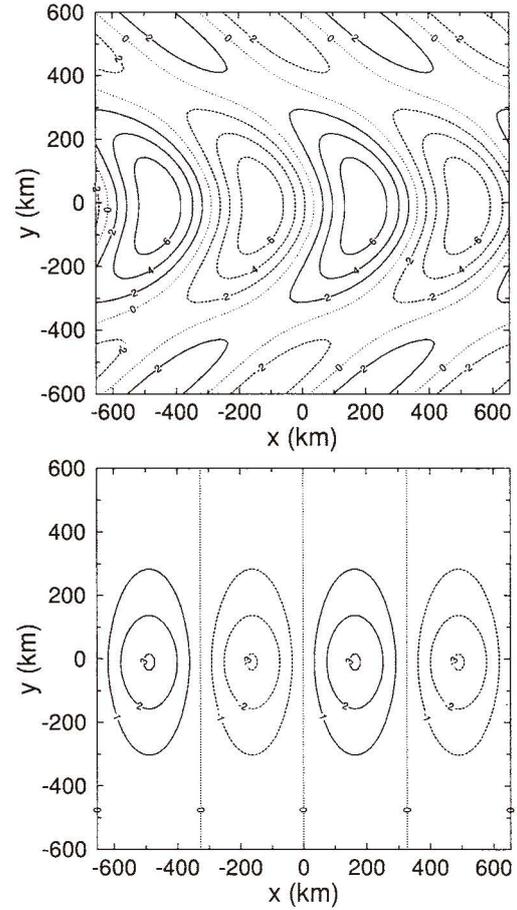


Fig. 1 The streamfunction, $\Psi^{(1)}$, obtained with the zonal wavenumber (a) $k = -0.7k_\beta$ and (b) $k = 0.7k_\beta$. The solid and dashed contours indicate positive and negative values, respectively. The dotted contours indicate $\Psi^{(1)} = 0$.

子の共鳴に対応する。以下では $\widehat{\Psi}_R$, $\widehat{\Psi}_F$ をそれぞれ共鳴、強制成分とよぶことにする。 $\widehat{\Psi}_F$ は $y = 0$ から指数関数的に減少するのに対し、 $\widehat{\Psi}_R$ は λ が虚数の場合には y 方向に振動する。

(31) 以下で得られた解の例を Fig. 1 に示す。ここでは $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$, $\omega = 2\pi/100 \text{ day}^{-1}$, $b = 200 \text{ km}$ とした。このとき k_β の値は $1.38 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ となる。伝播型、捕捉型それぞれの例として、 $k = -0.7k_\beta$, $0.7k_\beta$ の2つの場合の解を求めた。伝播型の解の流線関数は $y > 0$ で北西から南東方向、 $y < 0$ では逆方向に傾いており、それぞれ、南西、北西に伝わるのが分かる (Fig. 1a)。すわわち、 $y = 0$ から南北にエネルギーを運び去る方向の群速度を持つロスビー波が見られる。これに対し、捕捉型の解はまっすぐ東に伝播する (Fig. 1b)。

(31) 以下で得られた解を (23) に代入すれば北向渦位輸送が計算される。 $\widehat{\Psi}_F$ と \widehat{W}^* は常に位相が $\pi/2$ ずれてお

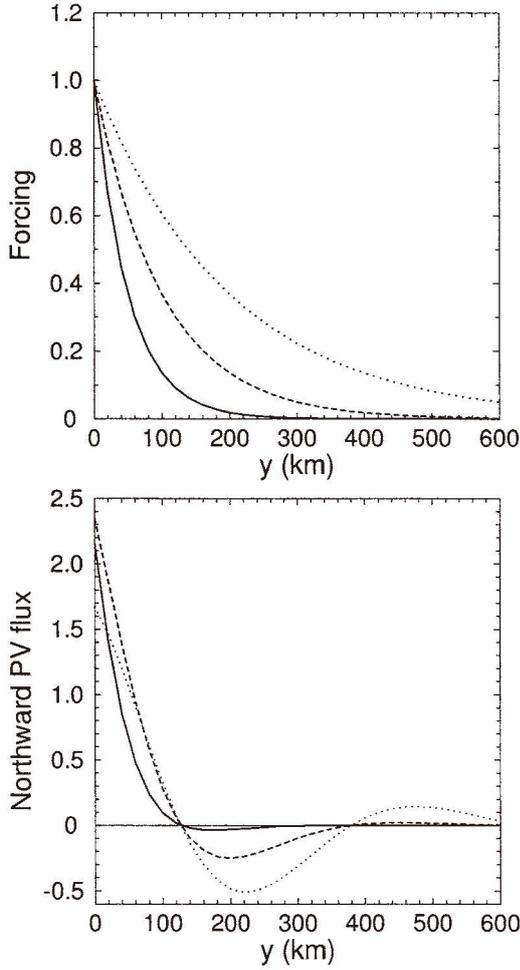


Fig. 2 The meridional profile of (a) the forcing, \widehat{W} , and (b) the northward potential-vorticity flux, Y . The solid, dashed, and dotted lines indicate the profile with the meridional scale of the forcing, $b = 50, 100,$ and 200 km, respectively. Other parameters are $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\omega = 2\pi/100 \text{ day}^{-1}$, and $k = 2\pi/800 \text{ km}^{-1}$.

り、 $\widehat{\Psi}_R$ は捕捉型の解をとるとき \widehat{W}^* と位相が $\pi/2$ ずれることに注意すると、

$$Y = \begin{cases} -\frac{kb|A|^2 e^{-\frac{|y|}{b}} \cos ly}{2\omega^2 l(b^2 l^2 + 1)} & -2k_\beta < k < 0 \\ O(\delta) & k < -2k_\beta, 0 < k \end{cases} \quad (34)$$

となる。よって、解が伝播型になる場合、北向渦位輸送は外力の分布を表す $\exp(-|y|/b)$ を包絡線とし、共鳴波に対応する波数 l で振動する \cos 関数の形をとることが分かる。 $k < 0$ であることから渦位輸送は $0 \leq y < \pi/2l$ で北向き、 $\pi/2l < y < 3\pi/2l$ で南向きとなる。このことは、3節での考察から、共鳴波と外力の位相が合うか否かによって、渦位輸送の向きが y 方向に入れ替わると解釈することが出来

る。解が捕捉型になる場合は、3節で触れた通り北向渦位輸送は無い。

k, ω を一定として b を変化させた場合の北向渦位輸送 Y の分布を Fig. 2 に示す。このとき l は一定の値をとる。詳しい条件は図の脚注に記されたものを用いた。(34) が示す通り、北向渦位輸送 Y は外力の水平スケール b の値に依らず同じ点で符号を変えることが見て取れる。外力の水平スケールは専ら Y の絶対値に影響している。

4.1.2 異なる東西波数成分のある場合

この節では外力が y 方向には前節と同じ形を持ち、 x 方向に異なる波数の成分からなる場合について議論する。ここでは、 a, b を正の実数、 A を複素数として、

$$W = A e^{-\frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}} \quad (35)$$

という形を考える。 W の x 方向の Fourier 変換は

$$\widetilde{W} = \frac{2aAe^{-\frac{|y|}{b}}}{a^2 k^2 + 1}$$

となることから、前節と同様にして各 Fourier 成分について以下の解が得られる。

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}_R + \widetilde{\Psi}_F \quad (36)$$

$$\widetilde{\Psi}_R = \frac{2iabAe^{-\lambda|y|}}{\omega\lambda(b^2\lambda^2 - 1)(a^2k^2 + 1)} \quad (37)$$

$$\widetilde{\Psi}_F = -\frac{2iab^2Ae^{-\frac{|y|}{b}}}{\omega(b^2\lambda^2 - 1)(a^2k^2 + 1)} \quad (38)$$

ここで、 $\widetilde{\Psi}_F, \widetilde{\Psi}_R$ はそれぞれ共鳴、強制成分に対応する。この関係式を (26) に代入し、 $\widetilde{\Psi}_F$ と \widetilde{W}^* は常に位相が $\pi/2$ ずれており、 $\widetilde{\Psi}_R$ は捕捉型になるとき位相が \widetilde{W}^* と $\pi/2$ ずれることに注意すると、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2k_\beta}^0 \text{Re} \frac{k \widetilde{\Psi}_R(k) \widetilde{W}^*(k)}{\omega} dk \\ &= -\frac{a^2 b |A|^2}{\pi \omega^2} \int_{-2k_\beta}^0 \frac{ke^{-\frac{|y|}{b}} \cos l|y|}{l(b^2 l^2 + 1)(a^2 k^2 + 1)^2} dk \end{aligned}$$

という関係式が得られる。被積分関数の分母にある l は $k = -2k_\beta, 0$ のときゼロとなるが、

$$k = k_\beta(\cos \theta - 1), \quad l = k_\beta \sin \theta$$

の様に (k, l) を極座標に変換をすることによってこの難点は避けられ、

$$Y = -\frac{a^2 b |A|^2 e^{-\frac{|y|}{b}}}{\pi \omega^2} \int_0^\pi S(\theta) \cos(k_\beta y |\sin \theta|) d\theta \quad (39)$$

$$S(\theta) = \frac{k_\beta(\cos \theta - 1)}{(b^2 k_\beta^2 \sin^2 \theta + 1)(a^2 k_\beta^2 (\cos \theta - 1)^2 + 1)^2} \quad (40)$$

となる。ここで、

$$S(\theta) = P_0 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m \cos 2m\theta + Q_m \sin 2m\theta$$

の様に $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $S(\theta)$ を Fourier 級数展開する。
係数 P_k, Q_k は次の様に求められる。

$$P_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S(\theta) d\theta$$

$$(P_m, Q_m) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S(\theta) (\cos 2m\theta, \sin 2m\theta) d\theta \quad m > 0$$

n 次の Bessel 関数 J_n を用いて

$$\cos(k_\beta |y| \sin \theta) = J_0(k_\beta |y|) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(k_\beta |y|) \cos 2m\theta$$

という関係式が成り立つことから、Fourier 成分の直交関係を利用して、 \mathcal{Y} は

$$\mathcal{Y} = -\frac{a^2 b |A|^2}{\omega^2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m J_{2m}(k_\beta |y|) e^{-\frac{|y|}{b}} \quad (41)$$

と表される。解の性質を見るために $k_\beta a, k_\beta b \ll 1$ の極限をとると、

$$S(\theta) = k_\beta (\cos \theta - 1)$$

となり、 $\cos \theta$ は Q_m にのみ寄与することに注意すると、

$$\mathcal{Y} = \frac{a^2 b k_\beta |A|^2}{\omega^2} J_0(k_\beta |y|) e^{-\frac{|y|}{b}} \quad (42)$$

となる。このとき \mathcal{Y} は外力の分布を表す $\exp(-|y|/b)$ を包絡線とする 0 次の Bessel 関数に比例して振動する。これは外力が東西に周期的な場合の \cos 関数を Bessel 関数で置き換えた形になっている。 \mathcal{Y} は $y = 0$ で正となり、 $k_\beta |y| \sim 2.405, 5.520, \dots$ で符号を変える。共鳴波の南北波数は $0 \leq |l| \leq k_\beta$ の範囲をとるので、最大南北波数の波のみを考慮した場合のゼロ点の座標は $k_\beta |y| = \pi/2 \sim 1.571$ で、最初のゼロ点は、より低波数の波の寄与がある分、それより少し $|y|$ が大きい所に位置している。

外力のスケール a, b がより一般的な値を取る場合の解を数値的に求めた。ここでは (10) を Green 関数を用いて解いている。海盆の大きさは東西南北共に 4000 km, $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\omega = 2\pi/50 \text{ day}^{-1}$ とした。このとき k_β の値は $6.88 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ となる。外力の東西スケールは $a = k_\beta^{-1}$ で一定とし、外力の南北スケール b を変化させて計算を行った。海盆の中心に (x, y) 座標の原点をとる。 $b = 3k_\beta^{-1}$ の場合、原点付近から西側では長波、東側では弱いながらも短波が見られる (Fig. 3a)。波の放射に対応して、渦位輸送は原点付近で北向きになる (Fig. 4a)。東西方向に積分した北向渦位輸送 \mathcal{Y} は $y = 0$ 付近で北向きで、 $y \sim \pm 400 \text{ km}$ にゼロ点が見られる (Fig. 4b)。よって、原点の北側、南側でそれぞれ渦位輸送は収束、発散し、(2) で示される様に、西に延びる低気圧性と高気圧性の平均循環が形成される (Fig. 3b)。これらの循環の南北両側には \mathcal{Y} が振動することに対応して、符号の異なる弱い循環も見られる。

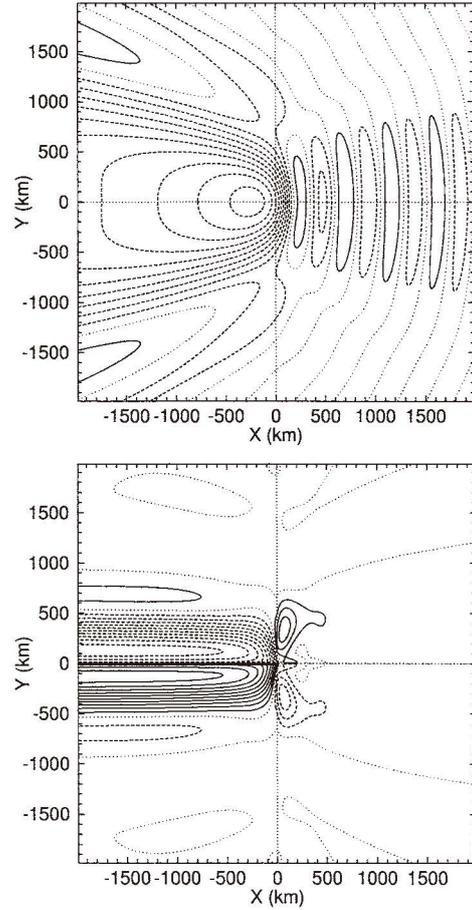


Fig. 3 (a) The streamfunction at the lowest order, $\Psi^{(1)}$. (b) The streamfunction of the mean flow, $\Psi^{(0)}$. The meridional scale of the forcing $b = 3k_\beta^{-1}$ in both (a) and (b). The contour interval is $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ in (a) and (b), respectively.

外力の南北スケール b に対する北向渦位輸送 \mathcal{Y} のゼロ点の座標の依存性を Fig. 5(a) に示す。図中の破線は (42) から求められるゼロ点の座標を表す。外力が東西に周期的な場合の解の振る舞いから予想される様に、ゼロ点の座標はほとんど b に依存しない。 $k_\beta a, k_\beta b$ が $O(1)$ の値を取る場合でも、座標の値は $k_\beta a, k_\beta b \ll 1$ の極限と余り変わらない。渦位輸送の収束の目安として、ゼロ点での $-\mathcal{Y}_y$ の値を Fig. 5(b) に示す。 $y > 0$ にあるゼロ点のうち、 $y = 0$ に最も近いゼロ点と、2 番目に近いゼロ点ではそれぞれ渦位輸送は収束、発散する。外力が東西に周期的な場合から予想される様に、渦位輸送の収束の絶対値は外力の南北スケールとともに増加する。図中の破線は $k_\beta a, k_\beta b \ll 1$ の極限について得られた値を大きさが合う様に定数倍したものを表す。ゼロ点の座標と同様、おおまかな分布は (42) で

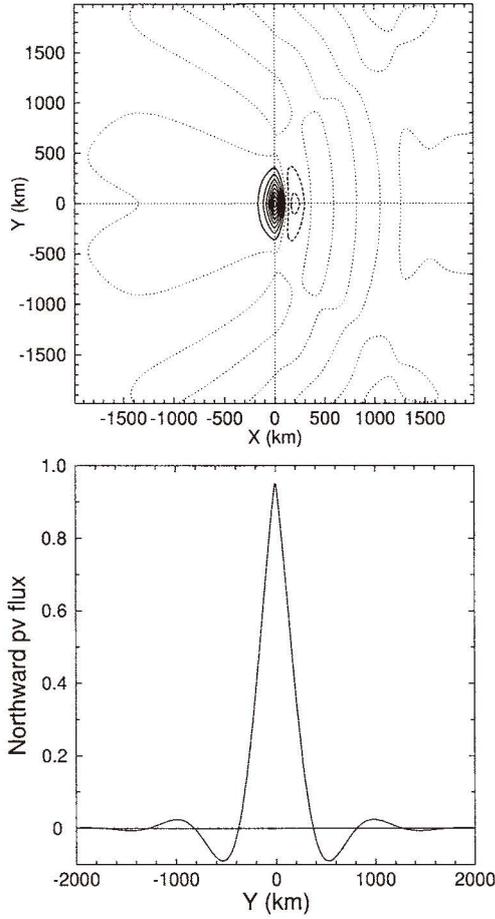


Fig. 4 (a) The horizontal distribution of the northward potential-vorticity flux. (b) The meridional profile of the zonally-integrated potential-vorticity flux, \mathcal{Y} . The meridional scale of the forcing $b = 3k_\beta^{-1}$ in both (a) and (b). The contour interval is $1 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$ in (a).

示されたものと一致することが見て取れる。

\mathcal{Y} のゼロ点のうち $y = 0$ に最も近いものの座標は厳密には b とともにわずかに増える (Fig. 5a)。 $b = 0.5k_\beta^{-1}$ の場合の流線関数を Fig. 6 に示す。 $b = 3k_\beta^{-1}$ の場合 (Fig. 3a) に比べ、外力の南北スケールが小さくなることに伴い南北波数の大きな波の寄与が相対的に大きくなっていることが分かる。このために b とともに \mathcal{Y} のゼロ点の座標が小さくなったと考えられる。

4.2 Gaussian 型外力の例

4.2.1 東西に周期的な場合

a を正の実数、 A を複素数として、東西に周期的な外力の振幅が

$$\widehat{W} = Ae^{-\frac{y^2}{a^2}} \quad (43)$$

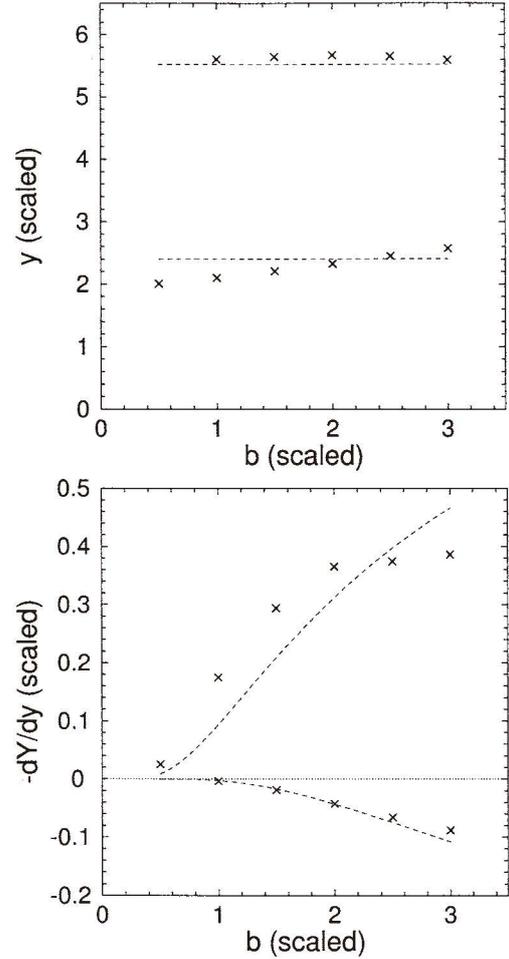


Fig. 5 Scatterplots of the meridional scale of the forcing, b , vs (a) the y -coordinate of the first two zeros of the northward potential-vorticity flux, and (b) the convergence of the potential-vorticity flux, $-\mathcal{Y}_y$, at the zeros in $y > 0$. b and the y -coordinate are scaled with k_β^{-1} . Dashed lines in both (a) and (b) indicate the theoretical value predicted by (42).

の形をとる場合を考える。前節と同様に y についての Fourier 変換を用いて、

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi} &= -\frac{iaA}{2\sqrt{\pi}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2 l'^2}{4} + il'y}}{l'^2 + \lambda^2} dl' \\ &= -\frac{iaA}{2\sqrt{\pi}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4}(l' - \frac{2iy}{a^2})^2 - \frac{y^2}{a^2}}}{l'^2 + \lambda^2} dl' \quad (44) \end{aligned}$$

付録で示される様に、この積分を計算すると次の関係式が得られる。

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}_R + \widehat{\Psi}_F \quad (45)$$

$$\widehat{\Psi}_R = -\frac{i\sqrt{\pi}aA}{2\omega\lambda} e^{-\frac{a^2\lambda^2}{4} - \lambda|y|} \quad (46)$$

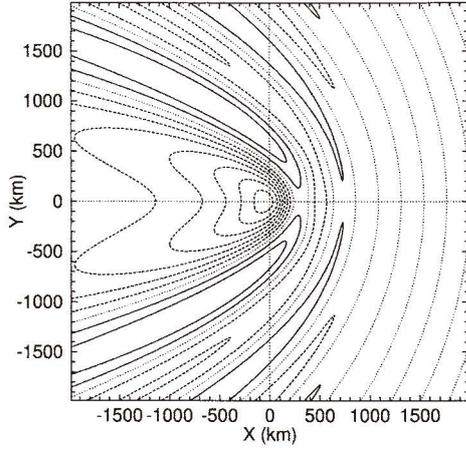


Fig. 6 The streamfunction, $\Psi^{(1)}$, obtained with the meridional scale of the forcing $b = 0.5k_\beta^{-1}$. The contour interval is $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

$$\widehat{\Psi}_F = -\frac{iaAe^{-\frac{y^2}{a^2}}}{\sqrt{\pi}\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a^2 s^2}{4}} ds}{(s + \frac{2iy}{a^2})^2 + \lambda^2} \quad (47)$$

ここで $\widehat{\Psi}_R$ は (44) 中の被積分関数の極 $l' = \pm i\lambda$ に対応する。前節と同様に $\widehat{\Psi}_R, \widehat{\Psi}_F$ をそれぞれ共鳴、強制成分とよぶことにする。これらの解を (23) に代入し、 $\widehat{\Psi}_R, \widehat{\Psi}_F$ と \widehat{W}^* の位相関係を注意すると、

$$Y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}ak}{4\omega^2 l} e^{-\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2 \lambda^2}{4}} \cos l|y| & -2k_\beta < k < 0 \\ O(\delta) & k < -2k_\beta <, 0 < k \end{cases} \quad (48)$$

の様に北向渦位輸送が得られる。この関係式から、前節の解と同様、 Y は外力 \widehat{W} の分布を表す $\exp(-y^2/a^2)$ を包絡線とし、共鳴波の波数 l で振動する形をとることが分かる。 $y = 0$ では渦位輸送は北向きとなる点も変わらない。

4.2.2 異なる東西波数成分のある場合

前節の結果を外力が x 方向に異なる波数の成分からなる場合に拡張する。 a を正の実数、 k_w を任意の実数、 A を複素数として、

$$W = Ae^{-\frac{x^2+y^2}{a^2} + ik_w x} \quad (49)$$

という形を考える。4.1.2 節では東西方向に定在的な外力のみを考えたが、ここでは外力の位相が東西に伝播することを考慮する。黒潮や湾流では成長しながら東へ移動する渦がしばしば見られる。すぐ後に示される様に、東西方向の成長を伴うということは、渦自体は東に進む様に見えても、波数分解したときに西向きに伝わる波数成分はゼロではない。ここではその様な渦の活動による非線型強制が起す擾乱を念頭に置いている。

(49) を x について Fourier 変換すると、

$$\widehat{W} = \sqrt{\pi}aAe^{-\frac{a^2}{4}(k-k_w)^2 - \frac{y^2}{a^2}} \quad (50)$$

となる。外力の振幅が東西に一定となる $a \rightarrow \infty$ の極限では \widehat{W} は $k = k_w$ に中心を持つ δ 関数に近づくが、有限な値の a に対しては、 k_w の符号に係わらずあらゆる k においてゼロでない値をとる。前節と同様にして、各 Fourier 成分について以下の解が得られる。

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}_R + \widetilde{\Psi}_F \quad (51)$$

$$\widetilde{\Psi}_R = -\frac{i\pi a^2 A}{2\omega\lambda} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_w)^2 + \frac{a^2 \lambda^2}{4} - \lambda|y|}$$

$$\widetilde{\Psi}_F = -\frac{ia^2 A}{\omega} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_w)^2 - \frac{y^2}{a^2}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a^2 s^2}{4}} ds}{(s + \frac{2iy}{a^2})^2 + \lambda^2}$$

この解を (26) に代入すると、

$$y = -\frac{\sqrt{\pi}a^3 |A|^2}{8\omega^2} e^{-\frac{y^2}{a^2}} \operatorname{Re} \int_{-2k_\beta}^0 \frac{k}{l} e^{-\frac{a^2}{2}(k-k_w)^2 - \frac{a^2 l^2}{4} - i|y|} dk \quad (52)$$

となり、4.1.2 節と同様に計算すれば結局、次の関係式が得られる。

$$y = -\frac{\sqrt{\pi^3}a^3 |A|^2}{8\omega^2} e^{-\frac{y^2}{a^2}} \sum_{m=0}^\infty C_m J_{2m}(k_\beta |y|) \quad (53)$$

ここで C_m は

$$T(\theta) = k_\beta (\cos \theta - 1) e^{-\frac{a^2}{2}(k_\beta (\cos \theta - 1) - k_w)^2 - \frac{a^2}{4} k_\beta^2 \sin^2 \theta} \quad (54)$$

を次の様に Fourier 級数展開したときの係数を表す。

$$T(\theta) = C_0 + \sum_{m=1}^\infty C_m \cos 2m\theta + D_m \sin 2m\theta$$

さらに、 $a^2 k_\beta^2 \ll 1$ の極限では、

$$y = \frac{\sqrt{\pi^3}a^3 k_\beta |A|^2}{8\omega^2} e^{-\frac{y^2}{a^2}} J_0(k_\beta |y|) \quad (55)$$

となる。定数係数を除くと、これは 4.1.2 節で得られた y の $\exp(-|y|/b)$ の部分を外力の形に対応させて $\exp(-y^2/a^2)$ で置き換えた形になっている。

幾つか具体的な a, k_w の値について数値的に求めた解を見てみる。ここでは、外力の東西波数が $k_w = 0, 0.5k_\beta, -0.5k_\beta$ の 3 つの場合について計算を行った。それぞれで外力の位相は東西に定在的、東方、西方に伝播する。どの場合も外力のスケールは $a = 2k_\beta^{-1}$ とし、その他の条件は 4.1.2 節で扱った指数型の外力を与えた場合と同じものを用いた。典型的な例として $k_w = 0$ の場合の流線関数を Fig. 7 に示す。4.1.2 節の結果と同様、ロスビー波が放射され (Fig. 7a)、外力が最大となる原点付近では北向きの渦位輸送が生じる (Fig. 8a)。それに伴い $y > 0, < 0$ でそれぞれ低気圧性、高気圧性の平均循環が生じる (Fig. 7b)。 $k_\beta a$ は $O(1)$ の値をとるものの、東西積分した渦位輸送 y のゼロ点は、おおよそ (55) から予想される所に位置している (Fig. 8b)。この点も 4.1.2 節の結果と変わらない。

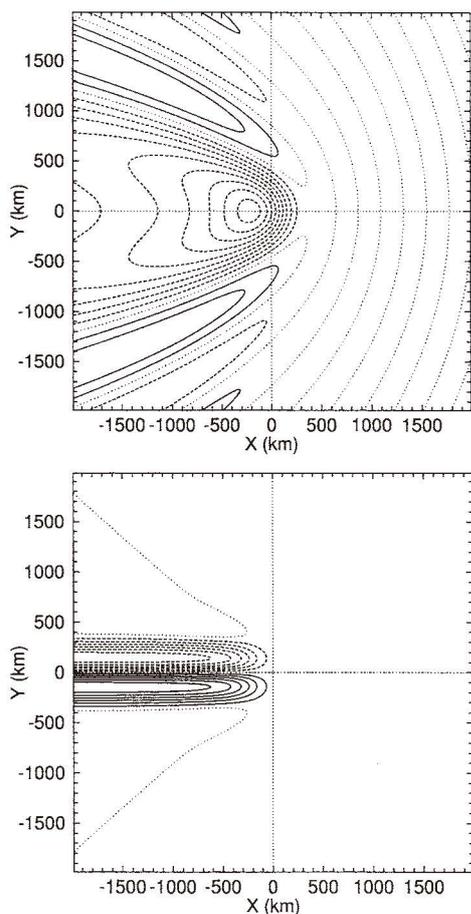


Fig. 7 (a) The streamfunction at the lowest order, $\Psi^{(1)}$. (b) The streamfunction of the mean flow, $\Psi^{(0)}$. The zonal wavenumber of the forcing $k_w = 0$ in both (a) and (b). The contour interval is $2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ in (a) and (b), respectively.

$k_w = 0.5k_\beta$ の場合 (Fig. 9) は $k_w = -0.5k_\beta$ の場合 (Fig. 10) に比べ、平均流とともに振幅は小さいものの (等値線間隔が異なることに注意)、どちらの場合も $k_w = 0$ の場合と定性的に同じ特徴が見られる。(50) を見ると、 $k_w = 0.5k_\beta$ の場合は、共鳴波が伝播型をとる $-2k_\beta < k < 0$ の範囲の東西波数成分の外力うち $|k|$ が小さい成分が大きな値をとる傾向があることが分かる。すなわち群速度が西向きの方が強く強制される。 $k_w = -0.5k_\beta$ の場合は $|k|$ が大きな成分の寄与が相対的に大きい。このような外力の東西波数成分の違いは Fig. 9(a) と 10(a) で見て取ることが出来る。

5. まとめ

時間的に振動する外力によって生じたロスビー波に伴う北向渦位の分布を外力が東西に周期的な場合、異なる東西波数の成分の重ね合わせから成る場合、それぞれについて

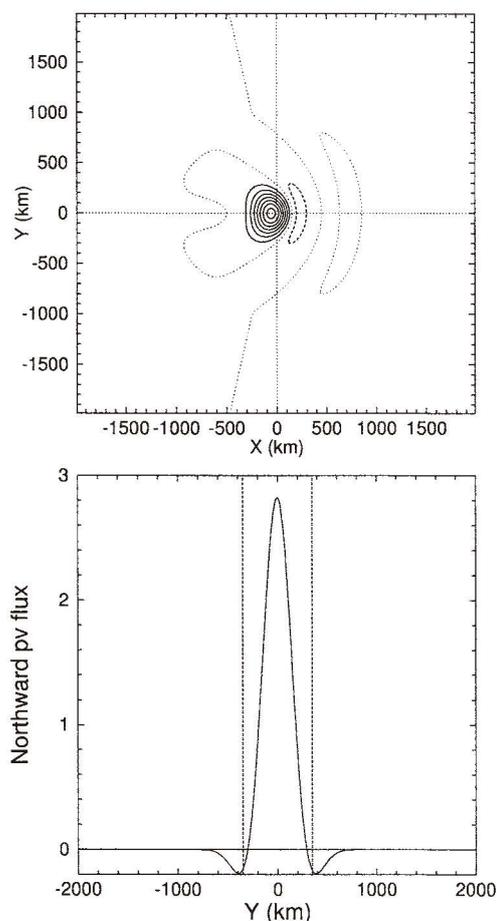


Fig. 8 (a) The horizontal distribution of the northward potential-vorticity flux. (b) The meridional profile of the zonally-integrated potential-vorticity flux, \mathcal{Y} . The zonal wavenumber of the forcing $k_w = 0$. The dashed lines in (b) represent zeros of \mathcal{Y} predicted from (55). The contour interval is $1.5 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}$ in (a).

詳しく調べた。外力が東西方向に周期的な場合には、一般に渦位輸送は外力が系に対し仕事をする場合は北向き、反対に外力が系からエネルギーを取り去る場合は南向きになることが示される。具体的に外力が南北方向に指数関数型と Gaussian 型それぞれの形をとる場合の解析解を求めた所、外力の形に係わらず次の結論が得られた。すなわち、外力と共鳴するロスビー波が存在するか否かによって、解は外力の加えられた領域に捕捉された捕捉型と、無限遠方へ伝わる伝播型の 2 種類に分けることが出来る。このうち北向渦位に寄与するのは解が伝播型の場合の外力との共鳴で発生する波の成分に限られる。共鳴波は南北方向に伝播するため、空間的に一定の位相を持つ外力を与えたとしても、外力と波の位相関係は場所によって変化する。このため外力は波にエネルギーを供給するだけではなく、場所に

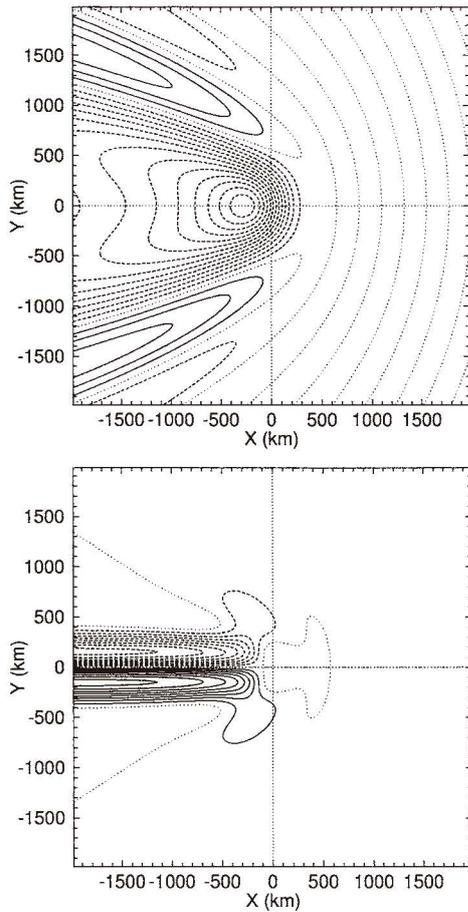


Fig. 9 (a) The streamfunction at the lowest order, $\Psi^{(1)}$. (b) The streamfunction of mean flow, $\Psi^{(0)}$. The zonal wavenumber of the forcing $k_w = 0.5k_\beta$ in both (a) and (b). The contour interval is $1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ and $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ in (a) and (b), respectively.

よっては位相が合わなくなり波を打ち消してしまうので、渦位輸送が北向、南向の領域が南北方向に交互に生じる。渦位輸送の方向は共鳴波に固有の南北波数に従って変わり、渦位輸送の収束によって生じる平均流の南北スケールも同様となる。渦位輸送と平均流の南北スケールは外力の南北スケールには依存しないことになる。むしろ外力の分布は渦位輸送の振幅に影響する。

異なる東西波数の成分の重ね合わせからなる外力を与えた場合には、それぞれの東西波数に応じて異なる南北波数を持つ共鳴波が重ね合わさった波が生じる。厳密な解が得られるのは外力の水平スケールが小さな極限の場合に限られたが、北向渦位輸送の特徴は東西に周期的な解の場合と整合的であった。すなわち、北向渦位輸送の南北スケールは、擾乱の代表的な南北波数とよい対応が見られる。外力の水平スケールが共鳴波の波長と同程度の場合でもおおま

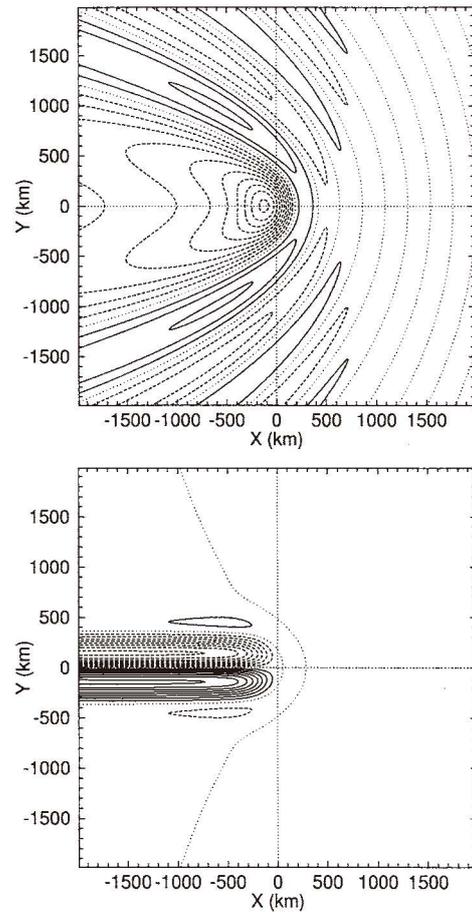


Fig. 10 (a) The streamfunction at the lowest order, $\Psi^{(1)}$. (b) The streamfunction of mean flow, $\Psi^{(0)}$. The zonal wavenumber of the forcing $k_w = -0.5k_\beta$ in both (a) and (b). The contour interval is $2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ and $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ in (a) and (b), respectively.

かな特徴は変わらないが、外力の形によって共鳴波の波数成分の構成比はある程度変わり得るので、対応して北向渦位輸送の南北スケールは多少変化する。また、外力が東西に周期的な場合と異なり、外力が東進する場合であっても長波の割合の高い共鳴波が生じる。

この研究では渦位輸送の最も基本的な性質に注目するために、ほとんど外力が空間的に同位相で振動する場合のみを取り扱った。各時刻で外力の領域平均値はゼロではないことになる。しかし実際には、渦度方程式 (3) の外力は x, y 方向の応力の rotation に対応するので、応力の大きさが遠方で減衰するならば外力の領域平均はゼロとなる方が自然かもしれない。領域平均がゼロとなる様に外力の符号が場所によって変われば、対応して渦位輸送の符号も変わると予想されるが、この様なより一般的な場合や密度成層を含む場合については別の機会に議論したい。

謝辞

この研究に当たり増田先生より多くの有益なコメントを頂いた。そもそも、この研究は増田先生ご自身が 20 年以上前に手がけられたものに起源を発している。当時、まだ修士 1 年生位であった著者を相手に、いつもの調子で Rhines らの論文やご自身のされた計算について、難解な話を滔々とされたものであった。その時の内容が幾らかでも頭に入っていれば、この研究も、もう少しまとまったものになったかもしれない。

この研究は日本学術振興会科学研究補助金 (課題番号 23654167、研究代表者、増田章) と九州大学応用力学研究所共同利用研究による助成を受けた。

参考文献

- 1) Holland, W. R.: The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean – numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model, *J. Phys. Oceanogr.*, 8, 363–392, 1978
- 2) Holland, W. R. and P. B. Rhines: An example of eddy-induced ocean circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 1010–1031, 1980
- 3) Haidvogel, D. B. and P. B. Rhines: Waves and circulation driven by oscillatory winds in an idealized ocean basin, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 25, 1–63, 1983
- 4) Rhines, P. B.: The dynamics of unsteady currents, *The Sea*, Vol. 6, Marine Modeling, edited by E. D. Goldberg, I. N. McCane, J. J. O'Brien, and J. H. Steele, John Wiley and Sons Inc., 1049pp, 1977

付 録

今、積分路 C として $l' = \pm\infty, 2iy/a^2 \pm \infty$ で囲まれた複素平面上の長方形を考える。積分の方向は、 $y > 0, y < 0$ のときそれぞれ時計回りと反時計回りにとる。(44) の被積分関数は $l' = \pm i\lambda$ に極を持ち、 $y > 0$ のときは $l' = i\lambda$, $y < 0$ のときは $l' = -i\lambda$ がそれぞれ C 内部に含まれるので、

$$I_0 = \int_C \frac{e^{-\frac{a^2 l'^2}{4} + i l' y}}{l'^2 + \lambda^2} dl' \\ = \frac{\pi}{\lambda} e^{\frac{a^2 \lambda^2}{4} - \lambda |y|}$$

という関係が成り立つ。

一方、

$$I_1 = \int_{\frac{2iy}{a^2} - \infty}^{\frac{2iy}{a^2} + \infty} \frac{e^{-\frac{a^2 l'^2}{4} + i l' y}}{l'^2 + \lambda^2} dl'$$

とおき、 $l' = 2iy/a^2, 2iy/a^2 + \infty$ の間で

$$l' = s + \frac{2iy}{a^2}$$

$l' = 2iy/a^2 - \infty, 2iy/a^2$ の間で

$$l' = -s' + \frac{2iy}{a^2}$$

の様に変数変換すると、

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a^2 s'^2}{4} - \frac{y^2}{a^2}} ds'}{(s' - \frac{2iy}{a^2})^2 + \lambda^2} + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a^2 s^2}{4} - \frac{y^2}{a^2}} ds}{(s + \frac{2iy}{a^2})^2 + \lambda^2} \\ = 2\text{Re} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a^2 s^2}{4} - \frac{y^2}{a^2}} ds}{(s + \frac{2iy}{a^2})^2 + \lambda^2}$$

また $-\infty, 2iy/a^2 - \infty$ の間と $\infty, 2iy/a^2 + \infty$ の間の積分は共にゼロになるので、結局 (45)–(47) の関係式が得られる。