

分散波とAiry関数

磯田, 豊
北海道大学大学院水産科学研究院

森江, 亮介
北海道大学大学院環境科学研究院

太田, 紗希
北海道大学大学院水産科学研究院

<https://doi.org/10.15017/1526122>

出版情報 : 九州大学応用力学研究所所報. 145, pp.53-57, 2013-09. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

分散波と Airy 関数

磯田 豊^{*1}・森江亮介^{*2}・太田紗希^{*1}

(2013 年 5 月 23 日受理)

Dispersive Wave and Airy Function

Yutaka ISODA^{*1}・Ryousuke MORIE^{*2}・Saki OHTA^{*3}

E-mail of corresponding author: isoda@fish.hokudai.ac.jp

Abstract

The disturbance near the leading edge of any dispersive wave can be approximately represented by the Airy function, which decays exponentially for positive argument and oscillates for negative argument. This report carefully guides the physical meaning of Airy function using Fourier transform of initial disturbance and Taylor expansion in the neighborhood of the maximum group velocity.

Key words : *dispersive wave, Airy function, Fourier transform, Taylor expansion, maximum group velocity*

1. はじめに

愛媛大学工学部 4 回生のとき沿岸海洋学講座に配属され、私(磯田)の師匠である柳先生に与えられた研究テーマが陸棚波(陸棚幅の制限を受けた地形性ロスビー波)であった。この陸棚波が属するロスビー波は第 2 種の波「渦モードの波」に分類され、渦だらけの地球流体を語るには無視できない波動である。気象学分野で世界的に名の知れたロスビー氏が提示したロスビー波。地球流体力学の分野でロスビー波を扱った論文や研究は、おそらく星の数ほどもあると思う。それほどよく知られたロスビー波の魅力の一つに、その特異な分散性(位相速度が波長の関数)がある。教科書ではないので詳細は述べないが、「波長が長くなれば周期も長くなる」という思い込みをみごとに崩してくれる波である。

ロスビー波が出現するような海洋現象を数値モデルで再現して議論するとき、静止した海洋を初期状態とし、そこから適当な強制力のもと、統計的定常状態までの数値積分を行う。研究対象とする海洋現象は最後の定常状態付近にあることが多いが、計算初期(初期応答)において Fig.1 に示したような奇妙な波形の擾乱が観察される。この波形が Airy 関数である。初期応答なので、どうしてもよい擾乱と思われがちだが、この波形に分散波の特徴がよく現れている。なぜ、そのようなのかの答えは Pedlosky(1979)¹⁾の教科書にあるので、

「分散波と Airy 関数」と題した本論に学術的な新しい知見はない。

海の自然災害の代表格である津波(マクロにみた場合には慣性重力波)や高潮(地形性ロスビー波)は周期的変動ではなく、突発的に発生する。まさに初期値応答の現象であり、エネルギーが最も高い第 1 波目は Airy 関数の形状を呈しているのかもしれない(そういう目で、観測資料をきちんと調べてみたことはないが)。東北沖地震津波(東日本大震災)後のいま、津波の先端付近が Airy 関数の形状であった可能性もイメージしておくことは無駄ではないと思う。柳先生の退職記念号を機に、ロスビー波(陸棚波)に関与した弟子として、波の分散性と Airy 関数の親密な関係を解説しておきたい。

2. 初期擾乱による分散波の時空間変化

地球流体波動の代表的な分散波はロスビー波だけでなく、慣性重力波(第 1 種の波「重力モードの波」)もそうである。両者の典型的な分散関係(波数 k - 周波数 σ 関係)を模式的な分散曲線図として Fig.2 上段(スケールは省略)に示す。ロスビー波は波長が長くなっても($-k \rightarrow 0$)、短くなっても($-k \rightarrow \infty$)周期が長くなる波($\sigma \rightarrow 0$)である(Fig.2(a))。慣性重力波は波長が長くなれば($|k| \rightarrow 0$)周期も長くなるが、その極限は慣性周期($\sigma \rightarrow f$; f はコリオリパラメータ)に制限される波である(Fig.2(b))。これらの分散関係を満たす両波動の初期応答を調べるため、(地形性)ロスビー波は高潮を想定して適当な初期擾乱を有限区間に与え、慣

*1 北海道大学大学院水産科学研究院

*2 北海道大学大学院環境科学研究院

性重力波は津波を想定して右端境界の水位を短期的に増加させた。その後の時空間変化を数値的に解いた結果(差分法)をそれぞれ Fig.3(a)(b)(スケールは省略)に示す。慣性重力波の例は地衡流調節問題となるため、強制した水位上昇付近では地衡流(定常)場が形成され、そこから慣性重力波が脱する様子が観察される。両波動は異なる復元力にもかかわらず、ある程度時間が経過した両分散波の先端付近の波形は共通した特徴を示し、Airy 関数(Fig.3 下段に再表示)によく似た波形となっている。

Fig.3に示した初期値応答は Impulse 強制による単位応答関数 $H(x, t)$ とも考えることができる。よって、この単位応答関数 $H(x, t - \tau)$ と任意の周期強制 $\sin(\omega\tau)$ との内積を $\tau = 0 \sim t$ の積分区間でたたみ込み積分すれば、周期強制による応答問題にも拡張することができる。例えば、ロスビー波や慣性重力波が存在し得ない周期帯で波を強制したとき(ロスビー波では $Cg = 0$ となる周波数よりも高周波数帯の強制、慣性重力波では $\sigma = f$ または $Cg = 0$ よりも低周波数帯の強制)、「波は励起されるのか否か」「どのような応答を示すのか」に対する直感的な理解を得ることができる(磯田・佐藤(2008)²⁾)。その理解には単位応答関数 $H(x, t)$ が Airy 関数で近次されることが本質にあり、それゆえ、周期強制問題においても Airy 関数はおそらく重要と思われる。

3. 分散波先端付近の波形は Airy 関数

Pedlosky(1979)¹⁾の教科書の 3.24 節 Rossby Waves Produced by an Initial Disturbances の一部分(わずか 2 頁分)を任意の分散波に一般化して、丁寧に記述し直してみよう。擾乱の先端付近は群速度 $Cg = \partial\sigma / \partial k$ 極大の波が支配的であり、その波数を k_m とする。よって、この擾乱先端付近に注目すれば、任意の波数 k の位相 θ を群速度極大波の波数 k_m 周辺の波数空間でテイラー展開することができる。

$$\begin{aligned} \theta &= kx - \sigma(k)t \\ &= kx - \left\{ \sigma(k_m) + \frac{\partial\sigma(k_m)}{\partial k}(k - k_m) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma(k_m)}{\partial k^2}(k - k_m)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3\sigma(k_m)}{\partial k^3}(k - k_m)^3 + \dots \right\} t \\ &= kx - \left\{ \sigma(k_m) + Cg(k_m)(k - k_m) + \frac{1}{2} Cg'(k_m)(k - k_m)^2 + \frac{1}{6} Cg''(k_m)(k - k_m)^3 + \dots \right\} t \end{aligned} \quad (1)$$

まず、群速度が極大となる先端付近では $Cg' \rightarrow 0$ と近似してもよいであろう(第 1 の近次)。さらに、(1)式の右辺に $k_m x - k_m x = 0$ を加え、3 次のオーダーまでを考慮(第 2 の近次)して変形すると、位相 θ は次式となる。

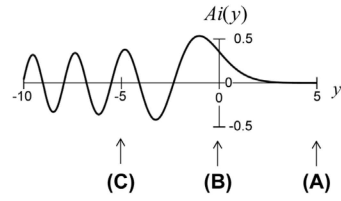


Fig.1 The Airy function $Ai(y)$

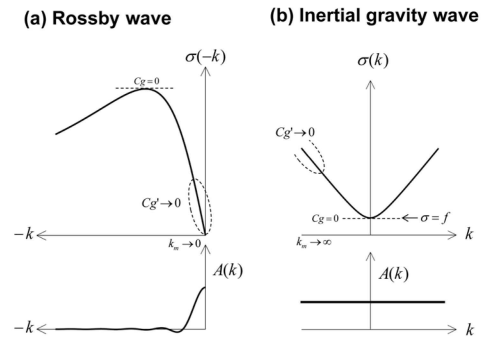


Fig.2 Schematic representation of the dispersion diagrams for (a) Rossby wave and (b) Inertial gravity wave. Lower panels are the amplitude functions $A(k)$ of wave packet for each initial disturbance.

$$\begin{aligned} \theta &\approx kx - \left\{ \sigma(k_m) + Cg(k_m)(k - k_m) + \frac{1}{6} Cg''(k_m)(k - k_m)^3 \right\} t + k_m x - k_m x \\ &= k_m x + (k - k_m)x - \left\{ \sigma(k_m) + Cg(k_m)(k - k_m) + \frac{1}{6} Cg''(k_m)(k - k_m)^3 \right\} t \\ &= [k_m x - \sigma(k_m)t] + [x - Cg(k_m)t](k - k_m) - \frac{1}{6} Cg''(k_m)(k - k_m)^3 t \end{aligned} \quad (2)$$

この(2)式は群速度極大波の位相伝播

$\theta(k_m) = k_m x - \sigma(k_m)t$ の周辺で、その極大波の波数から $k - k_m$ だけずれた波群が $Cg(k_m)$ と $Cg''(k_m)$ の値に従って分散を生じさせることを意味する。

いま、任意の初期擾乱($t = 0$)の空間分布を $f(x, 0)$ とし、その波数フーリエ変換から振幅の波数 k 分布

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

が求まる。Fig.3 に例として示した初期擾乱をフーリエ変換した $A(k)$ 分布を Fig.2 下段に示した。ロスビー波の例は低波数側の振幅が大きく、 $Cg' = 0$ となる波数は低波数 $k_m = 0$ にある。慣性重力波の例はスパイク強制であるため、全波数領域で様な振幅分布となり、 $Cg' \rightarrow 0$ となる波

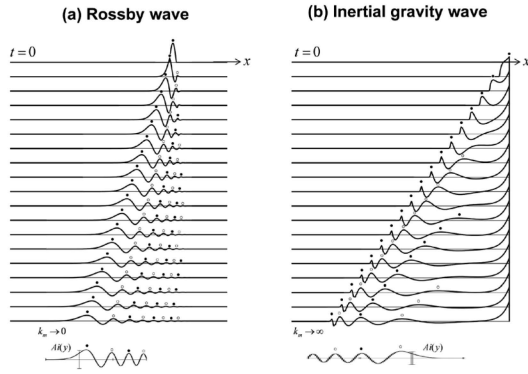


Fig.3 Transient profiles for (a) Rossby wave and (b) Inertial gravity wave after the initial disturbance. Lower panel is the same Airy function as Fig.1.

数は高波数 $|k_m| \rightarrow \infty$ にある。初期擾乱はこのような振幅分布をもつ線形波群の重ね合わせとして表現されている。初期擾乱を与えた後、それぞれの分散波の分散関係に従って時空間変化したとしても、線形波の場合、初期に与えた振幅の波数分布 $A(k)$ は変わらない。よって、時刻 t の擾乱分布 $f(x, t)$ は全ての波数をフーリエ積分した次式で表現される。

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \sigma(k)t)} dk \quad (4)$$

この(4)式の位相部分 $kx - \sigma(k)t = \theta$ に(2)式を代入し、先端付近の擾乱分布 $f_{front}(x, t)$ を近次すると

$$f_{front}(x, t) = \frac{A(k_m)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_m x - \sigma(k_m)t)} \int_{k_m - \Delta}^{k_m + \Delta} \exp \left(i \left([x - Cg(k_m)t](k - k_m) - \frac{1}{6} Cg''(k_m)(k - k_m)^3 t \right) \right) dk \quad (5)$$

となる。ここで、 Δ は k_m 近傍の適当な波数差であり、振幅値は群速度極大波の $A(k_m)$ で代表した(第3の近次)。この(5)式において、変数変換 $\eta = k - k_m$ (よって、

$d\eta = dk$) を行い、その他の変数をそれぞれ

$$a = -Cg''(k_m)t/6 \quad b = x - Cg(k_m)t \quad (6)$$

とおき、オイラーの公式を用いて積分部分を $F(x, t)$ として

整理すると次式の形に整理される。

$$F(x, t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp(i(a\eta^3 + b\eta)) d\eta \quad (7)$$

$$= \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos(a\eta^3 + b\eta) d\eta + i \int_{-\Delta}^{\Delta} \sin(a\eta^3 + b\eta) d\eta$$

括弧内の位相は η の関数として奇関数なので、 \sin 項の積分は零である。従って、

$$F(x, t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos(a\eta^3 + b\eta) d\eta \quad (8)$$

の \cos 項のみの積分となる。この段階では、3 次のオーダーまでを考慮した(2)式の近次が成立するような波数差 Δ の範囲がどこまでなのかはわからない。後述するように、波数 k_m から十分に離れた波数 k の寄与は時間の経過とともに小さくなる。これを前もって認めれば、十分時間が立った ($t \rightarrow \infty$) 擾乱先端付近(第4の近次)では、波数 k_m 近傍の全ての波数 ($\eta = k - k_m$ なので、 η は変数変換された波数差)が寄与すると考えてもよく、積分区間は $\pm\infty$ まで拡張される。

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a\eta^3 + b\eta) d\eta = 2 \int_0^{\infty} \cos(a\eta^3 + b\eta) d\eta \quad (9)$$

この(9)式をみる人がみれば(例えば、Pedlosky 氏)、Airy 関数がみえるのである。そこで、(9)式の中にある Airy 関数を陽な形で表現することを目的に、さらなる変数変換 $\kappa = (3a)^{1/3} \eta$ (よって、 $d\kappa = (3a)^{1/3} d\eta$) を行い、 $b = y(3a)^{1/3}$ とおけば、

$$F(x, t) = \frac{2}{(3a)^{1/3}} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\kappa^3}{3} + y\kappa \right) d\kappa = \frac{2\pi}{(3a)^{1/3}} Ai(y) \quad (10)$$

と変形される。(10)式の $Ai(y)$ が Airy 関数と呼ばれる特殊関数であり、一般に次式で定義される。

$$Ai(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\kappa^3}{3} + y\kappa \right) d\kappa \quad (11)$$

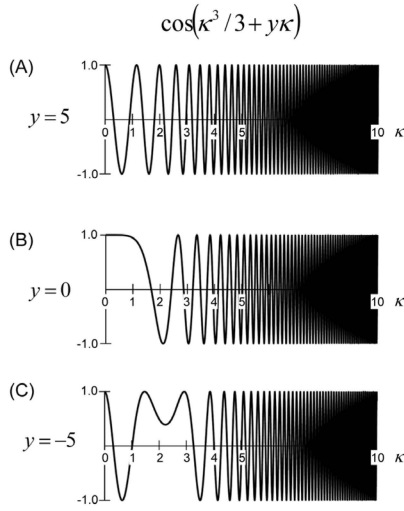


Fig.4 The function of $\cos(\kappa^3/3+y\kappa)$ at (A) $y=5$, (B) $y=0$ and (C) $y=-5$.

その波形が本論のはじめに示した Fig.1 であり、Airy 関数は $y > 0$ の領域で指数関数的に減衰し、 $y < 0$ 領域で振動(波動形状)するという波形を示す。(11)式の変数 y を元の変数に置き換えると

$$y = \frac{b}{(3a)^{1/3}} = \frac{x - Cg(k_m)t}{(-Cg''(k_m)t/2)^{1/3}} \quad (12)$$

となり、変数 y は擾乱先端付近の群速度 $Cg(k_m)$ で移動し、 $t^{-1/3}$ の時間経過に伴って x 軸方向に伸びるような座標系を意味する。同様に、積分変数 κ を元の変数に置き換えると

$$\begin{aligned} \kappa &= (3a)^{1/3} \eta = (3a)^{1/3} (k - k_m) \\ &= (-Cg''(k_m)t/2)^{1/3} (k - k_m) \end{aligned} \quad (13)$$

となり、変数 κ は任意の時刻 t における波数差 $k - k_m$ に対応する。よって、(11)式の物理的意味は、擾乱先端付近 $x = Cg(k_m)t$ の変換座標系 y 上の波形が群速度極大波近傍の全ての波を重ね合わせた波群で構成される、となる。

一例として、Fig.1 に示した(A)~(C)の3カ所、 $Ai(y) \rightarrow 0$ となる減衰領域の最先端(A) $y = 5$ 、減衰領域と振動領域の境界(B) $y = 0$ 、振動領域内(C) $y = -5$ における被積分関数 $\cos(\kappa^3/3 + y\kappa)$ の波数差 κ 分布を Fig.4 に示しておく。これら3カ所の相違は $\kappa < 4$ の小さな波数差領域にみられる一方、 $\kappa \rightarrow$ 大となるに従って、どの場所 y でも急激に振動する分布となる。これは群速度極大波の波数 k_m から十分に離れた波数の波の振幅も有限な

値をもつが、その振幅値は正負の符号を頻繁に変えるため、積分(波数の異なる波の重ね合わせ)の結果キャンセルされてしまい、その寄与は十分に小さくなることを示す。また、(13)式において $\kappa < 4$ の制限を考えると、 $t \rightarrow \infty$ で $k - k_m \rightarrow 0$ となる。すなわち、数学的には波数差 κ の積分区間が無限大であっても、物理的には時間経過と共に、波数 k_m 近傍の波の寄与が支配的となることがわかる。

最後に、(5)式に戻って $f_{front}(x, t)$ の解を、Airy 関数を用いて表現すると次式となる。

$$\begin{aligned} f_{front}(x, t) &= \frac{\sqrt{2\pi} A(k_m)}{(-Cg''(k_m)t/2)^{1/3}} \\ & Ai\left(\frac{x - Cg(k_m)t}{(-Cg''(k_m)t/2)^{1/3}}\right) e^{i(k_m x - \sigma(k_m)t)} \end{aligned} \quad (14)$$

Pedlosky(1979)¹⁾の考え方に従っているので、この解は彼の教科書にある(3.24.57)式と同じである。擾乱先端付近の振幅は時間の経過とともに減少するが、波形は Cg と Cg'' に依存した Airy 関数で表現される。この解析解は第1~第4の近次のもとに導かれていることに注意が必要であるが、どのような分散波でも、その先端付近は必ず Airy 関数の形状を呈することがわかる。ただし、初期振幅が極端に大きな津波や高潮の第1波目を表現するためには、当然、非線形性を考慮する必要がある。おそらく、振幅をさらに増加させようとする非線形性、それを抑えるセンスに寄与する波の分散性が絡み合う議論となるであろう。その場合でも線形論から導かれた分散性が重要であることに変わりはない。

4. おわりに

以上、応用数学を使って、波の分散性と Airy 関数の関係をできるだけ丁寧に解説してみた。このように、線形論ではフーリエ・ラプラス変換等の応用数学(解析学)を用いて波動現象を理解することが多い。その数学的な考え方を物理的解釈と共にまとめておこう。(1)フーリエ分解された個々の線形波(任意の波数 k)は初期に与えられた振幅値($A(k)$)をもって全空間領域(x 軸空間)に存在する。よって、ある有限区間にしか初期擾乱がない場合、この区間以外の擾乱零のところにも線形波群がすでに存在していて、初期状態では重ね合わせで消えている(みえない)と解釈する。(2)その後、個々の線形波はそれぞれの分散関係($\sigma(k)$)に従って一斉に伝播を開始するため、初期状態の重ね合わせが少しずつずれていく。(3)最初、そのずれの影響は線形波群の位相が揃っていた(それゆえ、有限値をもつ)初期擾乱付近で最も大きい。一方、初期擾乱から遠く離れた場所の線

形波群の位相はばらついたままであり、重ね合わせで消えている。すなわち、この遠く離れた場所にも線形波群は存在しているが、目にみえる擾乱として伝播してきていないと解釈される。(4)さらに時間が経過した擾乱先端付近では、群速度が極大となる波数周辺の線形波群がほぼ同じ位相速度で伝播し、それゆえ、位相もほぼ揃っている。これが目にみえて伝播する擾乱であるが、それでも波数の違いでわずかに異なる分散性が生じ、擾乱先端付近は Airy 関数で近次される波形を呈することになる。

「これで解説は終わり」としても何の問題もないが、「どこまでが数学で、どこからが物理なのだろうか」と悩むもう一人の自分がある。というのも、初期擾乱が零の場所には、実際には波は存在しないはずである。「線形波群の重ね合わせで消えている」という解釈は、線形論がもつ数学的都合と思えて仕方がない。そう思って、有限区間(または境界)で初期擾乱を設定した数値実験を実施してみたところ(本論 2 節)、みえない線形波群を想定して導かれた解析解(Airy 関数)によって擾乱先端付近の波形がみごとに表現された(本論 3 節)。「数学で表現できるのだから、それを物理的に解釈しても良いと思う自分」と「実際の物理現象の解釈は異なると思う

自分」との間に少なからず葛藤が残る。

5. 謝辞

研究は日々前進し、新しい知見を積み重ねていくことにある。さらに、その知見が社会貢献できるものであれば最高に嬉しい。師匠を見習って、そうしたいと思っているが、私の知的レベルは(本論のように)解決済み問題に停滞している。弟子として、師匠にはたいへん申し訳ないと思いつつも、「個人的に悩める陸棚波」を最初の研究テーマとして与えてもらった御恩を感謝し、今後も暖かい目で見守って欲しいと願っている。

参考文献

- 1) J. Pedlosky, *Springer-Verlag*, (1979)
- 2) 磯田豊・佐藤千鶴, 沿岸海洋研究, 第 46 卷 1 号, 59-68, (2008)