Schröder圏における整基関係と関係システム

堀部，久寿男
熊本県庁

古澤，仁
産業技術総合研究所関西センター

河原，康雄
九州大学大学院システム情報科学研究院情報理学部門

https://doi.org/10.15017/1525452

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 7 (2), pp.99-104, 2002-09-26. 九州大学大学院システム情報科学研究院
バージョン：
権利関係：

九州大学大学院
システム情報科学紀要
第7巻　第2号　平成14年9月

Research Reports on Information Science and
Electrical Engineering of Kyushu University
Vol.7, No.2, September 2002

Schröder 圏における整基関係と関係システム

堀部久寿男* ・ 古澤仁** ・ 河原康雄***

Well-Founded Relations and Relational Systems in Schröder Categories

Kusuo HORIBE, Hitoshi FURUSAWA and Yasuo KAWAHARA

(Received June 14, 2002)

Abstract: Labelled transition systems are generally recognised as an appropriate model for nondeterministic computations. This paper presents a fundamental theory of well-founded relations and relational systems in Schröder categories.

Keywords: Schröder category, Relational calculus, Well-founded relation, Relational system

1. はじめに

ラベル付遷移システムは非決定的計算の理論的なモデルであると見なされている. Castellani[3] など多くの論文では遷移システムの理論を通常の集合論に基づいて展開している. 本論文では, これらの遷移システムの基礎理論の多くが関係計算の枠組みで十分に議論できることを示す. (関係計算と関係集合論については、Schmidt・Ströhlein[6] あるいは Kawahara[4] を参照のこと.) ここでは, 多域関係計算の代数的な枠組みとして古典論理に基づく集合論に対応する Schröder 圏を採用する. 本論文は次のような内容で構成される. 2節では, 準備として Schröder 圏の定義とその基本事項について述べる. 3節では, 遷移の無限連鎖をもたない整基関係の関係論的な定義を与え, その基本性質を示す. 4節では, 関係システム, 基点を付加した関係システムおよびそれらの間の準同型, 合同関係について述べ, 遷移関数が整基である関係システム上の合同関係に関する凸性や抽象準同型の Church-Rosser 性などの興味ある性質を示す. 最後の5節では, 関係システムの与えられた点を基点とする部分システムの構成, および新しい基点を添加する前置構成を与え, それらと抽象準同型の関わりを示す.

2. Schröder 圏

この節では, Schröder 圏と呼ばれるブール関係圏の定義と基礎事項を述べる. 本論文では以下に定義される Schröder 圏における対象 X から対象 Y への射 α は部分矢を用いて $\alpha : X \rightharpoonup Y$ と記す. また, 射 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ と射 $\beta : Y \rightharpoonup Z$ の合成関係を $\alpha\beta : X \rightharpoonup Z$ で表す. さらに, 対象 X の恒等射は id_X と標記される.

定義 1 Schröder 圏 $\mathcal{D}$ とは次の条件を満たす圏である.

D1. [完備ブール代数] 対象 X, Y に対して, X から Y へのすべての射からなる射集合 $\mathcal{D}(X,Y)$ は最小射 0_{XY}, 最大射 ∇_{XY} をもつ完備ブール代数である. そのブール代数の構造は次のように表される.

$$\mathcal{D}(X,Y) = (\mathcal{D}(X,Y), \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, ^{-}, 0_{XY}, \nabla_{XY}).$$

D2. [反転関係] 対象 X, Y に対して, 反転演算 $^\sharp : \mathcal{D}(X,Y) \to \mathcal{D}(Y,X)$ があり, 反転公式を満たす. すなわち, 射 $\alpha, \alpha' : X \rightharpoonup Y$, $\beta : Y \rightharpoonup Z$ に対して, 次が成り立つ.

(a) $(\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$,

(b) $(\alpha^\sharp)^\sharp = \alpha$,

(c) $\alpha \sqsubseteq \alpha' \Rightarrow \alpha^\sharp \sqsubseteq \alpha'^\sharp$.

D3. [Dedekind 公式] 射 $\alpha : X \rightharpoonup Y$, $\beta : Y \rightharpoonup Z$, $\gamma : X \rightharpoonup Z$ に対して, $\alpha\beta \sqcap \gamma \sqsubseteq \alpha(\beta \sqcap \alpha^\sharp\gamma)$ が成り立つ.

D4. [商関係] 射 $\beta : Y \rightharpoonup Z$, $\gamma : X \rightharpoonup Z$ に対して, 商関係 $\gamma \div \beta : X \rightharpoonup Y$ が存在する. 商関係 $\gamma \div \beta$ は, すべての射 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ に対して, $\alpha\beta \sqsubseteq \gamma \Leftrightarrow \alpha \sqsubseteq \gamma \div \beta$ を満たす. □

以下では Schröder 圏 $\mathcal{D}$ の射を関係と呼ぶ. Schröder 圏においては Dedekind 公式は, Schröder 同値と呼ばれる条件 $\alpha\beta \sqsubseteq \gamma \Leftrightarrow \alpha^\sharp\gamma^- \sqsubseteq \beta^- \Leftrightarrow \gamma^-\beta^\sharp \sqsubseteq \alpha^-$ と同等である. Schröder 圏 $\mathcal{D}$ の関係 $f : X \rightharpoonup Y$ が一価性 $f^\sharp f \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$ と全域性 $\mathrm{id}_X \sqsubseteq ff^\sharp$ を満たすとき, (全域)関数と呼ばれ, $f : X \to Y$ と表される. また, Schröder 圏 $\mathcal{D}$ は単位対象をもつと仮定する.

D5. [単位対象] $0_{II} \neq \mathrm{id}_I = \nabla_{II}$ かつ すべての対象 X に対して $\nabla_{XI}\nabla_{IX} = \nabla_{XX}$ を満たす対象 I が存在する. 対象 I は単位対象と呼ばれる. □

X を Schröder 圏 $\mathcal{D}$ の対象とする. 関数 $x : I \to X$ を X の点と呼び, 記号 $x \in X$ で表す. 点 $x \in X$ は非

平成14年6月14日受付

* 熊本県庁
** 産業技術総合研究所関西センター
*** 情報理学部門

零である．なぜなら，もし $x = 0_{IX}$ なら x の全域性から $\mathrm{id}_I \sqsubseteq xx^\sharp = 0_{IX}x^\sharp = 0_{II}$ となり，単位対象 I の条件 $0_{II} \neq \mathrm{id}_I$ に反する．関係 $\rho : I \to X$ は，少なくとも1つの点を含む(すなわち，$x \sqsubseteq \rho$ である点 $x : I \to X$ が存在する)とき，非空と呼ばれる．また，そうでなければ，空であると言う．

補題 2 関係 $\alpha : X \to Y$，点 $x \in X$，$y \in Y$ に対して，$y \sqsubseteq x\alpha \Leftrightarrow x^\sharp y \sqsubseteq \alpha \Leftrightarrow x \sqsubseteq y\alpha^\sharp$ である．

証明．$y \sqsubseteq x\alpha \Leftrightarrow x^\sharp y \sqsubseteq \alpha$ を示せば十分である．まず，$y \sqsubseteq x\alpha$ と仮定すると，x の一価性 $x^\sharp x \sqsubseteq \mathrm{id}_X$ から $x^\sharp y \sqsubseteq x^\sharp x\alpha \sqsubseteq \alpha$ by である．逆に，$x^\sharp y \sqsubseteq \alpha$ と仮定すると，x の全域性 $\mathrm{id}_I \sqsubseteq xx^\sharp$ から $y \sqsubseteq xx^\sharp y \sqsubseteq x\alpha$ である．□

本論文では，Schröder 圏 $\mathcal{D}$ はさらに次の点公理を満たすとする．

D6. [点公理] 非零関係 $\alpha : X \to Y$ に対して，$y \sqsubseteq x\alpha$ である点 $x \in X, y \in Y$ が存在する．□

点公理 D6 のもとでは，関係 $\rho : I \to X$ が非零 $(\rho \neq 0_{IX})$ であることと，非空であることは同値である．さらに，次の基礎的な事実が成立する．

命題 3 関係 $\rho : I \to X$，$\alpha : X \to Y$ に対して，点 $y \in Y$ が $y \sqsubseteq \rho\alpha$ を満たすならば，$x \sqsubseteq \rho$ かつ $y \sqsubseteq x\alpha$ を満たす点 $x \in X$ が存在する．

証明．$y \sqsubseteq \rho\alpha$ を仮定すると，$y = y \sqcap \rho\alpha \sqsubseteq (y\alpha^\sharp \sqcap \rho)\alpha$ なので，$y\alpha^\sharp \sqcap \rho$ は非零である．点公理 D6 により $x \sqsubseteq u(y\alpha^\sharp \sqcap \rho)$ を満たす点 $u \in I$，$x \in X$ が存在する．I は単位対象なので $u = \mathrm{id}_I$ である．よって，$x \sqsubseteq \rho$，$x \sqsubseteq y\alpha^\sharp$ である．□

3. 整基関係

以下では，Schröder 圏 $\mathcal{D}$ は，公理 D1 – D6 を満たすと仮定する．まず，関係の無限連鎖をもたない整基関係の定義を述べる．

定義 4 関係 $\alpha : X \to X$ が整基であるとは，すべての非零関係 $\rho : I \to X$ に対して，$x \sqsubseteq \rho$ かつ $x\alpha \sqcap \rho = 0_{IX}$ を満たす点 $x \in X$ が存在するときである．□

整基関係について次の基本的な命題が成り立つ．

補題 5 関係 $\alpha, \theta : X \to X$ に対して，次が成り立つ．

(a) α が整基かつ $\theta \sqsubseteq \alpha$ ならば，θ も整基である．

(b) α が整基ならば，$\alpha \sqcap \mathrm{id}_X = 0_{XX}$ である．

(c) α が整基であり，θ が反射的・推移的で $\theta\alpha \sqsubseteq \alpha\theta$ ならば，$\alpha\theta$ も整基である．

(d) α が整基 $\Leftrightarrow \alpha^+ = \sqcup_{n>0}\alpha^n$ が整基．

証明．(a) 整基性の定義から自明である．(b) $\nabla_{IX}(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X)$ を非零と仮定する．α は整基であるから $x \sqsubseteq \nabla_{IX}(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X)$ かつ $x\alpha \sqcap \nabla_{IX}(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X) = 0_{IX}$ を満たす点 $x \in X$ が存在する．よって

$$x = x \sqcap \nabla_{IX}(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X) = x(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X) \sqsubseteq x\alpha$$

となり $x \sqsubseteq x\alpha \sqcap \nabla_{IX}(\alpha \sqcap \mathrm{id}_X) = 0_{IX}$ を得る．しかし，これは点 x が非零であることに矛盾する．よって $\alpha \sqcap \mathrm{id}_X = 0_{XX}$ である．(c) 関係 $\rho : 1 \to X$ を非零と仮定する．θ の反射性 $\mathrm{id}_X \sqsubseteq \theta$ から $\rho \sqsubseteq \rho\theta^\sharp$ であるから $\rho\theta^\sharp$ も非零である．よって α の整基性により $x \sqsubseteq \rho\theta^\sharp$ かつ $x\alpha \sqcap \rho\theta^\sharp = 0_{IX}$ を満たす点 $x \in X$ が存在する．命題 3 から $y \sqsubseteq \rho$ かつ $x \sqsubseteq y\theta^\sharp$ である点 $y \in X$ がある．したがって，補題 2 から $y \sqsubseteq x\theta$ なので

$$\begin{aligned}
y\alpha\theta \sqcap \rho &\sqsubseteq x\theta\alpha\theta \sqcap \rho && \{\, y \sqsubseteq x\theta \,\} \\
&\sqsubseteq x\alpha\theta\theta \sqcap \rho && \{\, \theta\alpha \sqsubseteq \alpha\theta \,\} \\
&\sqsubseteq x\alpha\theta \sqcap \rho && \{\, \theta\theta \sqsubseteq \theta \,\} \\
&\sqsubseteq (x\alpha \sqcap \rho\theta^\sharp)\theta && \{\, \text{Dedekind 公式} \,\} \\
&= 0_{IX} && \{\, x\alpha \sqcap \rho\theta^\sharp = 0_{IX} \,\}
\end{aligned}$$

である．これは $\alpha\theta$ が整基であることを示す．(d) α^+ が整基であれば，$\alpha \sqsubseteq \alpha^+$ であるから (a) の結果より α は整基である．逆に，α を整基と仮定する．$\theta = \alpha^* \ (= \sqcup_{n\geq 0}\alpha^n)$ は反射的・推移的で，$\theta\alpha \sqsubseteq \alpha\theta (= \alpha^+)$ である．故に，(c) より $\alpha^+ = \alpha\theta$ は整基である．□

関係 $\alpha : X \to Y$ および点 $r \in X$，$s \in Y$ に対して

$$\alpha_{r,s} = \alpha - (r^\sharp r\alpha \sqcup \alpha s^\sharp s)$$

と定義する．(差関係は $\alpha - \alpha' = \alpha \sqcap \alpha'^-$ で定義する．)

補題 6 関係 $\alpha : X \to Y$，$\beta : Y \to Z$ および点 $r \in X$，$s \in Y$，$t \in Z$ に対して

$$(\alpha_{r,s} \sqcup r^\sharp s)(\beta_{s,t} \sqcup s^\sharp t) \sqsubseteq (\alpha\beta)_{r,t} \sqcup r^\sharp t$$

が成り立つ．

証明．$r\alpha_{r,s} = 0$，$\alpha_{r,s}s^\sharp = 0$，$s\beta_{s,t} = 0$，$\beta_{s,t}t^\sharp = 0$ は明らか．(例えば $r\alpha_{r,s} = r\alpha_{r,s} \sqcap r\alpha \sqsubseteq r(\alpha_{r,s} \sqcap r^\sharp r\alpha) = 0$ である．) よって

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{r,s} \sqcup r^\sharp s)(\beta_{s,t} \sqcup s^\sharp t) \\
&= \alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqcup \alpha_{r,s}s^\sharp t \sqcup r^\sharp s\beta_{s,t} \sqcup r^\sharp ss^\sharp t \ \{\, \text{分配律} \,\} \\
&= \alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqcup r^\sharp t.
\end{aligned}$$

となる．また

$$\alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqcap r^\sharp r\alpha\beta \sqsubseteq r^\sharp(r\alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqcap r\alpha\beta) = 0,$$
$$\alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqcap \alpha\beta t^\sharp t \sqsubseteq (\alpha_{r,s}\beta_{s,t}t^\sharp \sqcap \alpha\beta t^\sharp)t = 0$$

である．故に，$\alpha_{r,s}\beta_{s,t} \sqsubseteq (\alpha\beta)_{r,t}$ を得る．□

系 7 同値関係 $\theta : X \to X$ と点 $r \in X$ に対して, $\theta^\bullet = \theta_{r,r} \sqcup r^\sharp r$ は同値関係であり, $\theta^\bullet \sqsubseteq \theta$ かつ $r\theta^\bullet = r$ を満たす.

証明. $r\theta_{r,r} = 0$ から $r\theta^\bullet = r$ は明らかである. また, $r^\sharp r \sqsubseteq \mathrm{id}_X \sqsubseteq \theta$ から $\mathrm{id}_X \sqcap r^\sharp r\theta = r^\sharp r$, $\mathrm{id}_X \sqcap \theta r^\sharp r = r^\sharp r$ である. よって

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_X - r^\sharp r &= \mathrm{id}_X - \{\mathrm{id}_X \sqcap (r^\sharp r\theta \sqcup \theta r^\sharp r)\}\\ &= \mathrm{id}_X - (r^\sharp r\theta \sqcup \theta r^\sharp r)\\ &\sqsubseteq \theta - (r^\sharp r\theta \sqcup \theta r^\sharp r)\\ &= \theta_{r,r}\end{aligned}$$

から $\mathrm{id}_X = (\mathrm{id}_X - r^\sharp r) \sqcup r^\sharp r \sqsubseteq \theta_{r,r} \sqcup r^\sharp r = \theta^\bullet$ で $\theta^\bullet$ の反射性が示される. 対称性 $(\theta^\bullet)^\sharp = \theta^\bullet$ は自明であろう. 推移性は補題 6 により $\theta^\bullet\theta^\bullet \sqsubseteq (\theta\theta)^\bullet = \theta^\bullet$ と示される. □

4. 関係システム

この節では, A をラベル(あるいは, 動作)の集合とする. また, A は特別のラベル $\tau \in A$ をもつと仮定する.

定義 8 (A-関係)システムとは, A でラベル付けられた関係の族 $(\delta_a : X \to X; a \in A)$ のことである. このとき, 対象 X は状態対象, δ_a は遷移関係と呼ばれる. 2 つのシステム

$(\delta_a : X \to X; a \in A)$ と $(\beta_a : Y \to Y; a \in A)$

に対して, 関数 $f : X \to Y$ が, すべての $a \in A$ に対して, $f\beta_a = \delta_a f$ を満たすとき, システム準同型と呼ばれる. □

関係システムと準同型は圏を形成する. このような関係システムは, 余代数としての側面ももつ. 非整基集合論 (ZF+AFA) においては, 余代数の圏は終対象をもつことが知られている[1),2)]. 河原・森[5)] は通常の ZF 集合論において, 遷移の分岐が(無限でもよい)ある 1 つの集合の基数を超えない関係システムの圏も終対象をもつことを示している.

記号 システム $(\delta_a : X \to X; a \in A)$ に対して, 次のような記号を用いる.

(a) $\delta = \sqcup_{a\in A}\delta_a$, (b) $\delta^* = \sqcup_{n\geq 0}\delta^n$, (c) $\delta^+ = \sqcup_{n>0}\delta^n$,
(d) $\delta_a^\circ = \delta_\tau^*\delta_a\delta_\tau^*$ $(a \neq \tau)$, $\delta_\tau^\circ = \delta_\tau^*$, (e) $\delta^\circ = \sqcup_{a\in A}\delta_a^\circ$. □

上記の記法を用いれば, 関係式 $\delta^* = \mathrm{id}_X \sqcup \delta\delta^*$, $\delta^+ = \delta\delta^*$, $\delta_a \sqsubseteq \delta_a^\circ \sqsubseteq \delta^*$ †1, $\delta \sqsubseteq \delta^\circ \sqsubseteq \delta^*$, $(\delta^\circ)^* = \delta^*$ が成り立つ.

†1 以後, 断りがない限り, a はラベル集合 A の要素を表し, $\delta_a \sqsubseteq \delta_a^\circ \sqsubseteq \delta^*$ などの表現(条件)は, すべての $a \in A$ に対して, その条件が成り立つことを意味する.

基点(付)システムとは, X の 1 点 $r \in X$ が付加されたシステム

$(\delta_a : X \to X; a \in A, r)$

で $r\delta^* = \nabla_{IX}$ を満たすものである. 以後, システムは $(\delta_a : X)$ と, 基点システムは $(\delta_a : X, r)$ と略記される.

2つの基点システム $(\delta_a : X, r)$, $(\beta_a : Y, s)$ に対して, 関数 $h : X \to Y$ が $sh^\sharp = r$ および $h\beta_a^\circ = \delta_a^\circ h$ を満たすとき, 抽象準同型と言う. この抽象準同型は

$h : (\delta_a : X, r) \to (\beta_a : Y, s)$

と表記される.

補題 9 基点システムの抽象準同型

$h : (\delta_a : X, r) \to (\beta_a : Y, s)$

に対して, 次が成り立つ.

(a) $h\beta^* = \delta^* h$,
(b) h は全射 $(h^\sharp h = \mathrm{id}_Y)$ である,
(c) δ が整基かつ $\beta \sqcap \mathrm{id}_Y = 0_{YY}$ ならば, β も整基である.

証明. (a) 抽象準同型の定義から $h(\beta^\circ)^* = (\delta^\circ)^* h$ は明らか. また $(\delta^\circ)^* = \delta^*$ であったので $h\beta^* = \delta^* h$ である.
(b) h の一価性 $h^\sharp h \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$ より $rh = sh^\sharp h \sqsubseteq s$ であるから $rh = s$ を得る. よって (a) を利用して

$\nabla_{IX} h = r\delta^* h = rh\beta^* = s\beta^* = \nabla_{IY}$.

したがって $h^\sharp h = \mathrm{id}_Y$ となり h は全射である.
(c) まず $h\beta \sqsubseteq \delta^+ h$ を示す. $\delta^* = \mathrm{id}_X \sqcup \delta^+$ と (a) の結果から $h\beta \sqsubseteq h\beta^* = \delta^* h = h \sqcup \delta^+ h$ である. したがって

$$\begin{aligned}h\beta &= h\beta \sqcap (h \sqcup \delta^+ h) && \{\, h\beta \sqsubseteq h \sqcup \delta^+ h \,\}\\ &= h(\beta \sqcap \mathrm{id}_Y) \sqcup (h\beta \sqcap \delta^+ h) && \{\, \text{分配律} \,\}\\ &\sqsubseteq \delta^+ h. && \{\, \beta \sqcap \mathrm{id}_Y = 0_{YY} \,\}\end{aligned}$$

次に, β の整基性を示すため関係 $\sigma : I \to Y$ を非零と仮定する. h の全射性から $\sigma = \sigma h^\sharp h$ なので $\sigma h^\sharp$ は非零である. 補題 5(d) から δ^+ は整基であるから $x \sqsubseteq \sigma h^\sharp$ かつ $x\delta^+ \sqcap \sigma h^\sharp = 0_{IX}$ を満たす点 $x \in X$ が存在する. よって

$$\begin{aligned}xh\beta \sqcap \sigma &\sqsubseteq x\delta^+ h \sqcap \sigma && \{\, h\beta \sqsubseteq \delta^+ h \,\}\\ &\sqsubseteq (x\delta^+ \sqcap \sigma h^\sharp)h && \{\, \text{Dedekind 公式} \,\}\\ &= 0_{IX} h && \{\, x\delta^+ \sqcap \sigma h^\sharp = 0_{IX} \,\}\\ &= 0_{IY}\end{aligned}$$

であり、かつ $xh \sqsubseteq \sigma h^\sharp h = \sigma$, $xh \in Y$ であるから β の整基性が示された. □

基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の同値関係 $\theta : X \to X$ が $r\theta = r$ かつ $\theta\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta$ を満たすとき, $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係であると言う. (このとき $\theta\delta^* \sqsubseteq \delta^*\theta$ に注意. 何故なら $\theta\delta^\circ \sqsubseteq \delta^\circ\theta$ より $\theta(\delta^\circ)^* \sqsubseteq (\delta^\circ)^*\theta$ であるから.)

命題 10 $\theta : X \to X$ を基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係とする. δ が整基ならば, 次が成り立つ.

(a) $r\delta^\sharp = 0_{IX}$,

(b) $a \neq \tau$ に対して, δ_a° は整基である,

(c) $a \neq \tau$ に対して, $\delta_a^\circ \sqcap \theta = 0_{XX}$ である.

証明. まず, 補題 5(d) から δ^+ は整基的である.

(a) 次の計算から明らか.

$$\begin{aligned} r\delta^\sharp &= r\delta^* \sqcap r\delta^\sharp && \{\, r\delta^\sharp \sqsubseteq \nabla_{IX} = r\delta^* \,\} \\ &\sqsubseteq r(\delta^*\delta \sqcap \mathrm{id}_X)\delta^\sharp && \{\, \text{Dedekind 公式} \,\} \\ &= r(\delta^+ \sqcap \mathrm{id}_X)\delta^\sharp && \{\, \delta^*\delta = \delta^+ \,\} \\ &= 0_{IX}. && \{\, 5(\mathrm{b}):\ \delta^+ \sqcap \mathrm{id}_X = 0_{XX} \,\} \end{aligned}$$

(b) $a \neq \tau$ に対して $\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta^+$ であるから補題 5(a) により δ_a° は整基である. (c) 合同関係の定義から $\theta\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta$ なので, (b) と補題 5(c) から $a \neq \tau$ に対して $\delta_a^\circ\theta$ は整基である. よって, 補題 5(b) から $\delta_a^\circ\theta \sqcap \mathrm{id}_X = 0_{IX}$ となり $\delta_a^\circ \sqcap \theta \sqsubseteq (\delta_a^\circ\theta^\sharp \sqcap \mathrm{id}_X)\theta = 0_{IX}$ を得る. □

補題 11 $\theta : X \to X$ を基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係とする. δ が整基ならば, 次の 6 つの条件は同値である.

(a) $\theta\delta_\tau^+ \sqsubseteq \delta_\tau^+\theta \quad (\theta\delta_\tau \sqsubseteq \delta_\tau^+\theta)$,

(b) $\theta\delta^+ \sqsubseteq \delta^+\theta \quad (\theta\delta \sqsubseteq \delta^+\theta)$,

(c) $\delta^+\theta$ は整基,

(d) $\delta^+ \sqcap \theta = 0_{XX}$,

(e) $\delta \sqcap \theta = 0_{XX}$,

(f) $\delta_\tau \sqcap \theta = 0_{XX}$.

証明. (a)⇒(b) $a \neq \tau$ に対して, $\theta\delta_a \sqsubseteq \theta\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta \sqsubseteq \delta^+\theta$ を注意する. また (a) から $\theta\delta_\tau \sqsubseteq \delta_\tau^+\theta \sqsubseteq \delta^+\theta$ となる. よって $\theta\delta \sqsubseteq \delta^+\theta$. (b)⇒(c) 補題 5(d) から δ^+ は整基であるから条件 (c) は補題 5(c) から従う. (c)⇒(d) 補題 5(b) から $\delta^+\theta \sqcap \mathrm{id}_X = 0_{XX}$. 故に

$$\delta^+ \sqcap \theta \sqsubseteq (\delta^+\theta^\sharp \sqcap \mathrm{id}_X)\theta = 0_{XX}.$$

(d)⇒(e)⇒(f) これは $\delta_\tau \sqsubseteq \delta \sqsubseteq \delta^+$ から明らか. (f)⇒(a) 合同関係の定義より $\theta\delta_\tau^\circ \sqsubseteq \delta_\tau^\circ\theta$ であるから

$$\theta\delta_\tau \sqsubseteq \theta\delta_\tau^* \sqsubseteq \delta_\tau^*\theta = \theta \sqcup \delta_\tau^+\theta$$

に注意する. (f) を仮定すると

$$\theta\delta_\tau \sqcap \theta \sqsubseteq \theta(\delta_\tau \sqcap \theta^\sharp\theta) = \theta(\delta_\tau \sqcap \theta) = 0_{XX}$$

かつ

$$\theta\delta_\tau = \theta\delta_\tau \sqcap (\theta \sqcup \delta_\tau^+\theta) = (\theta\delta_\tau \sqcap \theta) \sqcup (\theta\delta_\tau \sqcap \delta_\tau^+\theta) \sqsubseteq \delta_\tau^+\theta.$$

□

定理 12 $\theta : X \to X$ を基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係とすると, 次が成り立つ.

(a) 基点システム $(\beta_a : Y, s)$ と抽象準同型 $h : (\delta_a : X, r) \to (\beta_a : Y, s)$ が存在して $\theta = hh^\sharp$ および $\beta_a = h^\sharp\delta_a h$ を満たす. (べき共役性を仮定)

(b) δ が整基かつ $\delta_\tau \sqcap \theta = 0$ ならば, β も整基である.

証明. (a) べき共役性から同値関係 θ に対して, 商対象 Y と全射 $h : X \to Y$ が存在して $\theta = hh^\sharp$ を満たす. そこで $\beta_a = h^\sharp\delta_a h : Y \to Y$ および $s = rh$ と定義する. $sh^\sharp = rhh^\sharp = r\theta = r$ は明らか. $\delta_a h \sqsubseteq hh^\sharp\delta_a h = h\beta_a$ から $\delta_\tau^* h \sqsubseteq h\beta_\tau^*$ で $a \neq \tau$ に対しては

$$\delta_a^\circ h = \delta_\tau^*\delta_a\delta_\tau^* h \sqsubseteq h\beta_\tau^*\beta_a\beta_\tau^* = h\beta_a^\circ$$

である. 一方, $h\beta_a \sqsubseteq \delta_a^\circ h$ であることが

$$h\beta_a = hh^\sharp\delta_a h = \theta\delta_a h \sqsubseteq \theta\delta_a^\circ h \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta h = \delta_a^\circ h$$

により示される. 特に $h\beta_\tau \sqsubseteq \delta_\tau^* h$ であり, これより $h\beta_\tau^* \sqsubseteq \delta_\tau^* h$ である. したがって, $a \neq \tau$ に対して

$$\begin{aligned} h\beta_a^\circ &= h\beta_\tau^*\beta_a\beta_\tau^* && \{\, \beta_a^\circ = \beta_\tau^*\beta_a\beta_\tau^* \,\} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^* h\beta_a\beta_\tau^* && \{\, h\beta_\tau^* \sqsubseteq \delta_\tau^* h \,\} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^*\delta_a^\circ h\beta_\tau^* && \{\, h\beta_a \sqsubseteq \delta_a^\circ h \,\} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^*\delta_a^\circ\delta_\tau^* h && \{\, h\beta_\tau^* \sqsubseteq \delta_\tau^* h \,\} \\ &= \delta_a^\circ h. && \{\, \delta_a^\circ = \delta_\tau^*\delta_a\delta_\tau^* \,\} \end{aligned}$$

故に $h\beta_a^\circ = \delta_a^\circ h$ が得られた. さらに $\delta^* = (\delta^\circ)^*$ であったから $h\beta^* = \delta^* h$ となり, h の全射性から

$$s\beta^* = rh\beta^* = r\delta^* h = \nabla_{IX} h = \nabla_{IY}$$

これで $(\beta_a : Y, s)$ が基点システムであり, h は抽象準同型であることが示された. (b) 補題 9(c) の結果より $\beta \sqcap \mathrm{id}_Y = 0$ を示せば十分である. 補題 11 から $\delta \sqcap \theta = 0$ なので

$$\begin{aligned} \beta \sqcap \mathrm{id}_Y &= h^\sharp\delta h \sqcap \mathrm{id}_Y && \{\, \beta = h^\sharp\delta h \,\} \\ &\sqsubseteq h^\sharp(\delta \sqcap hh^\sharp)h && \{\, \text{Dedekind 公式} \,\} \\ &= h^\sharp(\delta \sqcap \theta)h && \{\, hh^\sharp = \theta \,\} \\ &= 0_{YY} && \{\, \delta \sqcap \theta = 0_{XX} \,\} \end{aligned}$$

である. □

定理 13 (凸性) $\theta : X \to X$ を基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係とする. δ が整基かつ $\delta_\tau \sqcap \theta = 0$ ならば, $\delta^* \sqcap \delta^{*\sharp}\theta \sqsubseteq \theta$ が成り立つ.

証明. δ が整基かつ $\delta_\tau \sqcap \theta = 0$ なので, 補題 11 から $\delta^+\theta$ は整基かつ $\delta^+ \sqcap \theta = 0$ である. よって

$$\begin{aligned} \delta^* \sqcap \delta^{*\sharp}\theta &= \delta^* \sqcap (\mathrm{id}_X \sqcup \delta^+)^\sharp\theta && \{\, \delta^* = \mathrm{id}_X \sqcup \delta^+ \,\} \\ &= (\delta^* \sqcap \theta) \sqcup (\delta^* \sqcap \delta^{+\sharp}\theta) && \{\, \text{分配律} \,\} \\ &\sqsubseteq \theta \sqcup \delta^{+\sharp}(\delta^+\delta^* \sqcap \theta) && \{\, \text{Dedekind 公式} \,\} \\ &= \theta \sqcup \delta^{+\sharp}(\delta^+ \sqcap \theta) && \{\, \delta^+\delta^* = \delta^+ \,\} \\ &= \theta. && \{\, \delta^+ \sqcap \theta = 0_{XX} \,\} \end{aligned}$$

□

定理 14 (Church-Rosser 性) $\theta_1, \theta_2 : X \to X$ が基点システム $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係ならば, $(\theta_1 \sqcup \theta_2)^*$ も $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係である.

証明. $(\theta_1 \sqcup \theta_2)^*$ が同値関係であることは明らか. $r(\theta_1 \sqcup \theta_2)^* = r$ かつ $(\theta_1 \sqcup \theta_2)^*\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ(\theta_1 \sqcup \theta_2)^*$ も帰納

法により容易に検証できる. □

命題 15 基点システム $(\delta_a : X, r)$ において δ を整基とする. 同値関係 $\theta : X \to X$ が条件 $\theta\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta$ を満たすならば, $\theta^\bullet = \theta_{r,r} \sqcup r^\sharp r$ は $(\delta_a : X, r)$ 上の合同関係である.

証明. 系 7 から $\theta^\bullet$ は同値関係で $\theta^\bullet \sqsubseteq \theta$, $r\theta^\bullet = r$ である. $\theta^\bullet\delta_a^\circ \sqsubseteq \theta\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta$ と $\theta = \theta^\bullet \sqcup r^\sharp r\theta \sqcup r^\sharp r\theta$ から

$$\begin{aligned}\theta^\bullet\delta_a^\circ &= \theta^\bullet\delta_a^\circ \sqcap \delta_a^\circ\theta \\ &= \theta^\bullet\delta_a^\circ \sqcap \delta_a^\circ(\theta^\bullet \sqcup r^\sharp r\theta \sqcup \theta r^\sharp r) \\ &\sqsubseteq \delta_a^\circ\theta^\bullet \sqcup (\theta^\bullet\delta_a^\circ \sqcap \delta_a^\circ r^\sharp r\theta) \sqcup (\theta^\bullet\delta_a^\circ \sqcap \delta_a^\circ\theta r^\sharp r) \\ &\sqsubseteq \delta_a^\circ\theta^\bullet \sqcup (\theta^\bullet\delta_a^\circ \sqcap \delta_a^\circ r^\sharp r\theta) \sqcup (\theta^\bullet\delta_a^\circ r^\sharp \sqcap \delta_a^\circ\theta r^\sharp)r\end{aligned}$$

である. $a \neq \tau$ の場合, 命題 10(a) から $\delta r^\sharp = 0$ なので $\delta_a^\circ r^\sharp \sqsubseteq \delta^+ r^\sharp = \delta^*\delta r^\sharp = 0$ となり $\theta^\bullet\delta_a^\circ \sqsubseteq \delta_a^\circ\theta^\bullet$ を得る.
次に $a = \tau$ の場合は

$$\begin{aligned}\theta^\bullet\delta_\tau^* \sqcap \delta_\tau^* r^\sharp r\theta &= \theta^\bullet\delta_\tau^* \sqcap r^\sharp r\theta && \{\ \delta^+ r^\sharp = 0_{XX}\ \} \\ &\sqsubseteq r^\sharp(r\theta^\bullet\delta_\tau^* \sqcap r\theta) && \{\ \text{Dedekind 公式}\ \} \\ &= r^\sharp r(\delta_\tau^* \sqcap \theta) && \{\ r\theta^\bullet = r\ \} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^* && \{\ r^\sharp r \sqsubseteq \mathrm{id}_X\ \} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^*\theta^\bullet && \{\ \mathrm{id}_X \sqsubseteq \theta^\bullet\ \}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}(\theta^\bullet\delta_\tau^* r^\sharp \sqcap \delta_\tau^*\theta r^\sharp)r &\sqsubseteq \theta^\bullet\delta_\tau^* r^\sharp r \\ &= \theta^\bullet r^\sharp r && \{\ \delta^+ r^\sharp = 0_{XI}\ \} \\ &= r^\sharp r && \{\ r\theta^\bullet = r\ \} \\ &\sqsubseteq \delta_\tau^*\theta^\bullet && \{\ r^\sharp r \sqsubseteq \mathrm{id}_X \sqsubseteq \delta_\tau^*\theta^\bullet\ \}\end{aligned}$$

から $\theta^\bullet\delta_\tau^* \sqsubseteq \delta_\tau^*\theta^\bullet$ が成り立つ. □

5. 関係システムの構成

$(\delta_a : X, r)$ を基点システム, $x : I \to X$ を X の点とする. Schröder 圏の有理性を仮定すると, 対象 $X|x$ と単射 $m : X|x \to X$ が存在して $\nabla_{IX|x}m = x\delta^*$ を満たす. このとき, 基点システム $((\delta|x)_a : X|x, r|x)$ を $(\delta|x)_a = m\delta_a m^\sharp$, $r|x = xm^\sharp$ により定義する. まず

$$x \sqsubseteq x\delta^* = \nabla_{IX|x}m,$$
$$\nabla_{IX|x}m\delta_a = x\delta^*\delta_a \sqsubseteq x\delta^* = \nabla_{IX|x}m$$

に注意すると, $x = xm^\sharp m$ と $(\delta|x)_a m = m\delta_a$ が得られる. したがって

$$(r|x)^\sharp(r|x) = mx^\sharp xm^\sharp \sqsubseteq mm^\sharp = \mathrm{id}_{X|x},$$
$$(r|x)(r|x)^\sharp = xm^\sharp mx^\sharp = xx^\sharp = \mathrm{id}_I$$

から, $r|x$ は実際に $X|x$ の点であり $(r|x)m = x$ を満たす. また, 次の計算から $(r|x)(\delta|x)^* = \nabla_{IX|x}$ であり $((\delta|x)_a : X|x, r|x)$ は本当に基点システムである.

$$\begin{aligned}(r|x)(\delta|x)^* &= (r|x)(\delta|x)^* mm^\sharp && \{\ (\delta|x)^* = (\delta|x)^* mm^\sharp\ \} \\ &= (r|x)m\delta^* m^\sharp && \{\ (\delta|x)^* m = m\delta^*\ \} \\ &= x\delta^* m^\sharp && \{\ (r|x)m = x\delta^*\ \} \\ &= \nabla_{IX|x}mm^\sharp && \{\ x\delta^* = \nabla_{IX|x}m\ \} \\ &= \nabla_{IX|x}. && \{\ \nabla_{IX|x}mm^\sharp = \nabla_{IX|x}\ \}\end{aligned}$$

命題 16 抽象準同型

$$h : (\delta_a : X, r) \to (\beta_a : Y, s)$$

と $y = xh$ を満たす点 $x \in X$, $y \in Y$ に対して, 関係 $h' = mhn^\sharp : X|x \to Y|y$ は関数であり $(r|x)h' = s|y$ かつ $(\delta|x)_a^\circ h' = h'(\beta|y)_a^\circ$ を満たす. さらに, $x = yh^\sharp$ ならば, $s|y = (r|x)h'^\sharp$ かつ h' は抽象準同型

$$h' : (\delta_a|x : X|x, r|x) \to (\beta_a|y : Y|y, s|y)$$

を与える. (ここに, $n : Y|y \to Y$ は $\nabla_{Y|y}n = y\beta^*$ を満たす単射である.)

証明. 補題 9(a) から $\alpha^* h = h\beta^*$ なので

$$\nabla_{X|x}mh = x\alpha^* h = xh\beta^* = y\beta^* = \nabla_{Y|y}n$$

から $mh = mhn^\sharp n$ を得る. また

$$h'^\sharp h' = nh^\sharp m^\sharp mhn^\sharp \sqsubseteq nn^\sharp = \mathrm{id}_{Y|y},$$
$$h'h'^\sharp = mhn^\sharp nh^\sharp m^\sharp = mhh^\sharp m^\sharp \sqsupseteq \mathrm{id}_{X|x}$$

から確かに h' は関数である. したがって

$$h'n = mhn^\sharp n \sqsubseteq mh$$

から $h'n = mh$ である. よって

$$(r|x)h' = (r|x)mhn^\sharp = xhn^\sharp = yn^\sharp = s|y$$

かつ

$$\begin{aligned}(\alpha|x)_a^\circ h' &= (\alpha|x)_a^\circ mhn^\sharp && \{\ h' = mhn^\sharp\ \} \\ &= m\delta_a^\circ hn^\sharp && \{\ (\alpha|x)_a^\circ m = m\delta_a^\circ\ \} \\ &= mh\beta_a^\circ n^\sharp && \{\ \delta_a^\circ h = h\beta_a^\circ\ \} \\ &= h'n\beta_a^\circ n^\sharp && \{\ mh = h'n\ \} \\ &= h'(\beta|y)_a^\circ && \{\ n\beta_a^\circ n^\sharp = (\beta|y)_a^\circ\ \}\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, $x = yh^\sharp$ ならば

$$(s|y)h'^\sharp = yn^\sharp nh^\sharp m^\sharp = yh^\sharp m^\sharp = xm^\sharp = r|x$$

であり h' は抽象準同型である. □

Schröder 圏が関係余積をもつと仮定すれば, 基点システム $(\beta_a : Y, s)$ とラベル $\mu \in A$ に対して, 基点システム

$$\mu.Y = ((\mu.\beta)_a : \mu.Y, \perp_Y)$$

が構成される. ただし, $\mu.Y$ は Y と単位対象 I の関係余積 $(= Y + I)$, $i_Y : Y \to \mu.Y$ と $\perp_Y : I \to \mu.Y$ は関係余積の包含単射で $i_Y i_Y^\sharp = \mathrm{id}_Y$, $\perp_Y \perp_Y^\sharp = \mathrm{id}_I$, $i_Y \perp_Y^\sharp = 0_{YI}$ および $i_Y^\sharp i_Y \sqcup \perp_Y^\sharp \perp_Y = \mathrm{id}_{\mu.Y}$ を満たす. また, $(\mu.\beta)_a = i_Y^\sharp \beta_a i_Y$ $(a \neq \mu)$, $(\mu.\beta)_\mu = (\perp_Y^\sharp s \sqcup i_Y^\sharp \beta_\mu)i_Y$ と定義する. $\mu.\beta = (\perp_Y^\sharp s \sqcup i_Y^\sharp \beta)i_Y$ から

$$(\mu.\beta)^{n+1} = (\perp_Y^\sharp s \sqcup i_Y^\sharp \beta)\beta^n i_Y \ (n \geq 0),$$
$$(\mu.\beta)^* = \mathrm{id}_{Y+I} \sqcup (\perp_Y^\sharp s \sqcup i_Y^\sharp \beta)\beta^* i_Y$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}\bot_Y(\mu.\beta)^* &= \bot_Y \sqcup s\beta^* i_Y = \bot_Y \sqcup \nabla_{IY} i_Y \\ &= \nabla_{I\mu.Y}\bot_Y^\sharp \bot_Y \sqcup \nabla_{I\mu.Y} i_Y^\sharp i_Y = \nabla_{I\mu.Y}\end{aligned}$$

から $\mu.Y = ((\mu.\beta)_a : \mu.Y, \bot_Y)$ は確かに基点システムである．また $i_Y(\mu.\beta)_a = \beta_a i_Y$, $\bot_Y(\mu.\beta)_\mu = s i_Y$ が成り立つ．$\mu.Y$ は基点システム $Y = (\beta_a : Y, s)$ の μ による前置構成と呼ばれる．

次の定理は，抽象準同型と前置構成 $\mu.Y$ の関係を示す．

定理 17 基点システム $(\delta_a : X, r)$, $(\beta_a : Y, s)$ において δ, β はそれぞれ整基とする．関数 $k : X \to Y$ が条件 $rk = (r^- \sqcap sk^\sharp)k$, $k\beta_a^\circ = \delta_a^\circ k$ を満たすならば，抽象準同型 $h : (\delta_a : X, r) \to \tau.Y$ が存在する．

証明．Schröder 圏の有理性の仮定から，単射 $j : X' \to X$ で $\nabla_{IX'} j = r^-$ を満たすものが存在する．このとき $jj^\sharp = \mathrm{id}_{IX'}$, $jr^\sharp = 0_{X'X}$, $r^\sharp r \sqcup j^\sharp j = \mathrm{id}_X$ は明らか．関数 $h : X \to \tau.Y$ を $h = r^\sharp \bot_Y \sqcup j^\sharp j k i_Y$ により定義する．$i_Y(\tau.\beta)_a = \beta_a i_Y$, $\bot_Y(\tau.\beta)_\tau = s i_Y$ であったので，$i_Y(\tau.\beta)_\tau^* = \beta_\tau^* i_Y$ かつ $\bot_Y(\tau.\beta)_\tau^+ = \bot_Y(\tau.\beta)_\tau(\tau.\beta)_\tau^* = s i_Y(\tau.\beta)_\tau^* = s\beta_\tau^* i_Y = rk\beta_\tau^* i_Y$．故に

$$\begin{aligned}h(\tau.\beta)_\tau^* &= (r^\sharp \bot_Y \sqcup j^\sharp j k i_Y)(\tau.\beta)_\tau^* \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup r^\sharp \bot_Y (\tau.\beta)_\tau^+ \sqcup j^\sharp j k i_Y (\tau.\beta)_\tau^* \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup r^\sharp rk\beta_\tau^* i_Y \sqcup j^\sharp j k \beta_\tau^* i_Y \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup (r^\sharp r \sqcup j^\sharp j) k\beta_\tau^* i_Y \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup k\beta_\tau^* i_Y \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup \delta_\tau^* k i_Y.\end{aligned}$$

一方，δ は整基なので $\delta_\tau^+ r^\sharp = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\delta_\tau^* h &= \delta_\tau^*(r^\sharp t \sqcup j^\sharp j k i_Y) \\ &= (\mathrm{id}_X \sqcup \delta_\tau^+) r^\sharp t \sqcup \delta_\tau^* j^\sharp j k i_Y \\ &= r^\sharp \bot_Y \sqcup \delta_\tau^* j^\sharp j k i_Y.\end{aligned}$$

少なくとも1つは τ でないラベルの列 $a_1, \cdots, a_n \in A$ に対する遷移関係の合成 $\delta_{a_1} \cdots \delta_{a_1}$ の上限(和) を δ_w と表すと $\delta^* = \delta_\tau^* \sqcup \delta_w$ である．k の条件 $k\beta_a^\circ = \delta_a^\circ k$ と $\beta_a^\circ \sqsubseteq \beta^+$ $(a \neq \tau)$ から $\delta_w k \sqsubseteq \delta_w^\circ k = k\beta_w^\circ \sqsubseteq k\beta^+$ が成り立つ．$r^- \sqcap sk^\sharp \sqsubseteq \nabla_{IX'} j$ より $r^- \sqcap sk^\sharp = (r^- \sqcap sk^\sharp) j^\sharp j$ であるから

$$rk = (r^- \sqcap sk^\sharp)k = (r^- \sqcap sk^\sharp) j^\sharp j k \sqsubseteq r\delta^* j^\sharp j k$$

かつ

$$\begin{aligned}rk &= rk \sqcap r\delta^* j^\sharp j k && \{\, rk \sqsubseteq r\delta^* j^\sharp j k \,\} \\ &= rk \sqcap r(\delta_\tau^* \sqcup \delta_w) j^\sharp j k && \{\, \delta^* = \delta_\tau^* \sqcup \delta_w \,\} \\ &\sqsubseteq r\delta_\tau^* j^\sharp j k \sqcup r(k \sqcap \delta_w k) && \{\, j^\sharp j \sqsubseteq \mathrm{id}_{X'} \,\} \\ &\sqsubseteq r\delta_\tau^* j^\sharp j k \sqcup rk(\mathrm{id}_Y \sqcap \beta^+) && \{\, \delta_w k \sqsubseteq k\beta^+ \,\} \\ &= r\delta_\tau^* j^\sharp j k. && \{\, \mathrm{id}_Y \sqcap \beta^+ = 0_{YY} \,\}\end{aligned}$$

よって $\delta_\tau^* r^\sharp rk \sqsubseteq \delta_\tau^* r^\sharp r \delta_\tau^* j^\sharp j k \sqsubseteq \delta_\tau^* \delta_\tau^* j^\sharp j k = \delta_\tau^* j^\sharp j k$ から

$$\delta_\tau^* k = \delta_\tau^*(r^\sharp r \sqcup j^\sharp j)k = \delta_\tau^* r^\sharp rk \sqcup \delta_\tau^* j^\sharp j k = \delta_\tau^* j^\sharp j k.$$

これで $h(\tau.\beta)_\tau^* = \delta_\tau^* h$ が示された．最後に $a \neq \tau$ に対して $h(\tau.\beta)_a^\circ = \delta_a^\circ h$ を検証する．まず

$$h(\tau.\beta)_a = (r^\sharp \bot_Y \sqcup j^\sharp j k i_Y) i_Y^\sharp \beta_a i_Y = j^\sharp j k \beta_a i_Y,$$

$$\begin{aligned}\delta_a^\circ h &= \delta_a^\circ(r^\sharp \bot_Y \sqcup j^\sharp j k i_Y) && \{\, h = r^\sharp \bot_Y \sqcup j^\sharp j k i_Y \,\} \\ &= \delta_a^\circ(r^\sharp r \sqcup j^\sharp j) k i_Y && \{\, \delta^+ r^\sharp = 0_{XI} \,\} \\ &= \delta_a^\circ k i_Y && \{\, r^\sharp r \sqcup j^\sharp j = \mathrm{id}_X \,\}\end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}h(\tau.\beta)_a^\circ &= h(\tau.\beta)_\tau^*(\tau.\beta)_a(\tau.\beta)_\tau^* \\ &= \delta_\tau^* h(\tau.\beta)_a(\tau.\beta)_\tau^* && \{\, h(\tau.\beta)_\tau^* = \delta_\tau^* h \,\} \\ &= \delta_\tau^* j^\sharp j k \beta_a i_Y (\tau.\beta)_\tau^* && \{\, h(\tau.\beta)_a = j^\sharp j k \beta_a i_Y \,\} \\ &= \delta_\tau^* k \beta_a i_Y (\tau.\beta)_\tau^* && \{\, \delta_\tau^* j^\sharp j k = \delta_\tau^* k \,\} \\ &= \delta_\tau^* k \beta_a \beta_\tau^* i_Y && \{\, i_Y(\tau.\beta)_\tau = \beta_\tau i_Y \,\} \\ &= k\beta_\tau^* \beta_a \beta_\tau^* i_Y && \{\, \delta_\tau^\circ k = k\beta_\tau^\circ \,\} \\ &= k\beta_a^\circ i_Y \\ &= \delta_a^\circ k i_Y && \{\, k\beta_a^\circ = \delta_a^\circ k \,\} \\ &= \delta_a^\circ h && \{\, \delta_a^\circ k i_Y = \delta_a^\circ h \,\}\end{aligned}$$

を得る．　□

6. おわりに

非決定的計算の理論モデルである遷移システムと準同型・合同関係の理論を Schröder 圏における関係計算に基づいて展開した．ここで得られた主要な結果は遷移関係の整基性という，ある意味での計算の停止性という強い仮定に基づいている．非整基なシステムの理論に関する同様の関係理論は今後の課題である．

参考文献

1) Peter Aczel and Nax Mendler, A final coalgebra theorem, Lecture Notes in Computer Science 389(1989), 357-365.
2) Michael Barr, Terminal coalgebras in well-founded set theory, Theoretical Computer Science 114(1993), 299-315.
3) Ilaria Castellani, Bisimulations and abstraction homomorphisms, J. Computer and System Sciences, **34**(1987), 210-235.
4) Yasuo Kawahara, Relational set theory, Lecture Notes in Computer Science **953**(1995), 44 - 58.
5) Yasuo Kawahara and Masao Mori, A small final coalgebra theorem, Theoretical Computer Science **233**(2)(2000), 129 - 145.
6) Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein, Relations and graphs – Discrete Mathematics for Computer Science –(Springer-Verlag, 1993).