九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

時系列区分化手法による時間変化多変量ベクトル自己回帰モデルの推定と金融政策ショック分析への応用

時永, 祥三
九州大学 : 名誉教授

松野, 成悟
宇部工業高等専門学校経営情報学科 : 教授

https://doi.org/10.15017/1522395

出版情報：經濟學研究. 82 (1), pp.47-68, 2015-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

時系列区分化手法による時間変化多変量ベクトル自己回帰モデルの推定と金融政策ショック分析への応用

時　永　祥　三
松　野　成　悟

1　まえがき

Sims(シムズ) らにより提唱された多変量ベクトル自己回帰 (Vector Auto-Regressive: VAR) モデル分析は, それまでの大規模なマクロモデルの推定に代わる簡便な検証方法として認識され, 多方面に応用されている [1]-[8]. この伝統的な VAR モデル分析に加えて最近では, 自己回帰 (Auto-Regressive: AR) 係数が時間変化する VAR モデル (以下では時間変化 VAR モデルと呼ぶ) が提案されている [9]-[13]. このモデルは, 従来の VAR モデルにおいて回帰係数が時間的に変化するケースへと拡張した方法であり, 経済状況の時間変化や, それを前提とした経済分析へと応用されている [9]-[13]. 時間変化 VAR モデルについて, 更にこれを 3 つに分類することがなされ, 1) AR 係数が時間の関数であることを仮定し原理的にはその時刻ごとの係数を推定する方法 [9][10] , 2) 時間的な AR 係数変化は連続的にではなくイベント生起に相当するように間欠的に発生し, 係数の変化幅はある正規分布にしたがうと仮定する方法に分けられる [11]-[13]. 更に第 3 番目の方法として, 3) 一般的な線形ダイナミックスの時間変化としてとらえるものがある [14]-[16](ただし, この方法論はカバーする範囲が広範であり本論文で議論するテーマには適さないので, 以下では議論しない). しかしながら, VAR モデル分析の最大の利点は, 変数へのショック入力がいつまで影響を及ぼすかを推定する分散分解 (詳細は後述する) であるため, AR 係数は確定的な数値で推定されることが望ましい. 本論文では時系列区分化手法による時間変化多変量自己回帰モデルの推定と応用について展開し, その手法を日米イノベーションにおける金融政策ショック分析へと適用することを考察する.

本論文では, まず最初に 2 つに分類される時間変化 VAR モデルの推定方法の概要を示すとともに, この分析手法の問題点を整理する. 同時に, 回帰モデル分析の簡潔さを継承することが望ましいことを述べ, この利点を活用するための 1 つの手法として, 時系列の区分化手法を援用する方法を提案する. 具体的には, 複数の変化事象が対応する複数の時系列として表現されると仮定し, 時系列パラメータの変化時点の発生を, イベントの発生として推定する方法である [17]-[21]. この方法により, AR 係数を完全に時間的に変化すると仮定することではなく, 区分的には定常定数であり, 区間の境界において変化すると仮定することができる. なお, 回帰モデル分析手法の適用によりモデルの基本部分である係数の推定における計算量を軽減することが可能である. また, 通常の回帰モデル分析の手法を援用することができ, しかも区間の間においてはモデルは定常であると仮定することができるので, 分散分解も自然に適用可能となる. イベントの発生時刻の推定においては統計

的なばらつきが存在することが予想される. したがって不確実性に対応できるように, 時系列区分化の実施においてはベイズ推定の手法を適用する. 通常の AR 係数が時間変化するモデルとは異なり, ベイズ推定の対象となるのは時系列区分化の境界の生起だけとなる. 本論文で提案する時間変化の応用として, 日米イノベーションにおける金融政策ショック分析を取り上げる. その大きな理由の 1 つとしては, 最近の極めて大規模な金融緩和の実施にも関わらず, 各国の経済成長が低調であることを時間的な経過の中で分析することにある.

応用例として, 本論文の手法を人工データに適用し, 時系列パラメータの同時変化を推定する性能を確認するとともに, 実際に観測される日米の金融政策に関連するマクロ指標データによる分析への適用可能性について考察する.

2 時間変化 VAR モデルとその応用

2.1 VAR モデルの基本

時系列解析や経済モデル分析における同時方程式のモデルにおいては, 説明変数と被説明変数をあらかじめ区別できることが前提となっている. しかし実際には, このような区分をあらかじめ設定できない場合も少なくない. このようなケースに適用されるものが, シムズにより導入された VAR モデルであり, 変数ベクトルをそのラグ付き変数で説明するモデルである [1]. この手法の導入により, やや規模が小さいマクロモデルを分析することが可能となっている. シムズが提案したモデルでは, マネーストック (サプライ), 実質 GDP, 失業率, 賃金, 物価, 輸入価格の 6 変数を解析の対象としている. それぞれの変数について 4 つにラグを許すので, 合計 24 個の係数に対する推定となっている.

VAR モデルは線形の同時方程式の体系を指しているが, この場合, 制約の無い誘導型の形式をしている. すなわち, 複数の方程式を同時にモデル化していることに加えて, 内生変数ベクトルを表現する場合に, 該当する方程式のラグ付き変数だけではなく, 他の方程式のラグ付き変数も用いて表現した線形モデルである. また, 更に拡張され, 同時点におけるラグ付き外生変数もシステムに含めることができる. 分かりやすい事例として, 変数が 2 個の場合を仮定すると, 次のような 2 つの変数 $y_{1,t}$ および $y_{2,t}$ について誘導型の方程式体系を仮定する.

$$y_{1,t} = \pi_{10} + \pi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \pi_{12}^{(1)} y_{1,t-2} + \pi_{21}^{(1)} y_{2,t-1} + \pi_{22}^{(1)} y_{2,t-2} + v_{1,t} \tag{1}$$

$$y_{2,t} = \pi_{20} + \pi_{11}^{(2)} y_{1,t-1} + \pi_{12}^{(2)} y_{1,t-2} + \pi_{21}^{(2)} y_{2,t-1} + \pi_{22}^{(2)} y_{2,t-2} + v_{2,t} \tag{2}$$

ここで $v_{1,t}, v_{2,t}$ は, ホワイトノイズである. すなわち, 現在の時刻の内生変数を, 外生変数と先決変数およびラグ付きの内生変数により表現するものであり, このような形は構造方程式を変換することにより, 間接的に得ることができる. また, 自己回帰のモデルとして見た場合には 2 次の自己回帰モデルであり VAR(2) として記号で表すこともある. 式 (1), (2) に示す関係式を変数の個数が n, 変数の最大のラグが L である一般的な場合に拡張した場合の定義式は, 次のようになる

$$Y_t = AX_t + B + V_t, Y_t = [y_{1,t}, y_{2,t}, ..., y_{n,t}]^T, V_t = [v_{1,t}, v_{2,t}, ..., v_{n,t}]^T \tag{3}$$

$$X_t = [y_{1,t-1}, y_{1,t-2}, ..., y_{1,t-L}, y_{2,t-1}, y_{2,t-2}, ..., y_{2,t-L}, ..., y_{n,t-1}, y_{n,t-2}, ..., y_{n,t-L}]^T \tag{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{11}^{(1)} & \pi_{12}^{(1)} & \dots \pi_{1L}^{(1)} & \pi_{21}^{(1)} & \pi_{22}^{(1)} & \dots \pi_{2L}^{(1)} & \dots & \pi_{n1}^{(1)} & \pi_{n2}^{(1)} & \dots \pi_{nL}^{(1)} \\ \pi_{11}^{(2)} & \pi_{12}^{(2)} & \dots \pi_{1L}^{(2)} & \pi_{21}^{(2)} & \pi_{22}^{(2)} & \dots \pi_{2L}^{(2)} & \dots & \pi_{n1}^{(2)} & \pi_{n2}^{(2)} & \dots \pi_{nL}^{(2)} \\ \dots & & & & & & & & & \\ \pi_{11}^{(n)} & \pi_{12}^{(n)} & \dots \pi_{1L}^{(n)} & \pi_{21}^{(n)} & \pi_{22}^{(n)} & \dots \pi_{2L}^{(n)} & \dots & \pi_{n1}^{(n)} & \pi_{n2}^{(n)} & \dots \pi_{nL}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$B = [\pi_{10}, \pi_{20}, ..., \pi_{n0}]^T \tag{6}$$

なお, 方程式には時間トレンドを含ませることができるが, ここでは表示を簡略化している.

VAR モデルが有用であるのは, 変数ごとに加えた瞬間的な入力パルスが他の変数にどのように影響を与え, どの時刻まで持続するかを分析するツールになることがある. これを分散分解と呼んでいる. その詳細をここで述べるのは適切ではないので, 付録に示している.

2.2 AR 係数が時間変化する VAR モデルの開発

シムズらにより提唱された VAR 分析は, それまでの大規模なマクロモデルの推定に代わる簡便な検証方法として提案され, 特にそれぞれの変数の入力ショックが, 将来的にどのような大きさでいつまで影響を及ぼすかを推定する分散分解は有用な方法となっている. この伝統的なモデル分析に加えて, 最近では, AR 係数が時間変化する VAR モデルが提案されている [9]-[13]. この時間変化 VAR モデルにおいては, AR 係数が時間的に変化するケースへと拡張されている. よく知られている事例として, 米国における金融政策の時代的な区分を説明する方法論として用いられており, Volcker, Burns, Greenspan という政策実施主体の代表者の名前で区分する妥当性が示されている [10].

回帰係数が時間的に変化するモデルについて, 更にこれを分類すると, (1) Time-Varying Parameter (TVP)-VAR, (2) Markov Switching(MS)-VAR の 2 つに分けることがなされている. これらの 2 つの分類については, すでに多くの研究がなされ, その概要を見ることは容易であるので, ここでは概要と問題点だけをまとめておく.

最初の方法である TVP-VAR は, AR 係数がどの時刻においても異なっているという前提で, すべての係数を同時に求める方法である [9][10]. いま n 個の変数が存在し, これらの時系列データが, $Y_t = [y_{1,t}, y_{2,t}, ..., y_{n,t}]^T$ として観測されていると仮定する. この観測データに関して推定されるべき方程式は式 (3)∼(6) になるが, この場合 AR 係数は定数ではなく, 時間変化するため, $A(t)$ として表現されることになる. したがって変数に関連する AR 係数の要素数は, 大きなものとなる. なお AR 係数の推定手順において, いわゆるベイズ推定の手法を用いて, 精度を向上させる方法も多用されている [9][10]. 月次のデータで 6 変数 13 時刻までのラグを仮定した場合にはパラメータ数は 468 となる. 変数の持続時間が数年であることは稀であり, 一般的にはこの 468 という数値より大きな未知係数が推定の対象となる.AR 係数推定を行うための方程式は巨大なものになる可能性があるため, いくつかの縮約方法も同時に提案されている. まず一般的な簡略化の方法として, 変数の間の分散共分散行列をコレスキー分解することで, 行列に含まれる未知係数の個数を減少させる. 更に, AR 係数の遷移過程はブラウン運動にしたがうとする仮定を導入して, AR 係数そのものではなく, その統計量を推定する問題に帰着させている. しかしながら, このようなブラウン運動の仮定は, 一般的なものであるとは言えない. このように AR 係数がすべての時刻で変化するという仮定のもと

では, 計算量が増加する問題は避けられない. 更に, 時間変化する AR 係数の仮定のもとでは, 分散分解における係数は, 何らかの時間不変係数への近似的な変換が必要であるという問題が残される.

第 2 番目の方法である MS-VAR は回帰係数が時間の関数であることを仮定し, 原理的にはその時刻ごとの AR 係数を推定するように分析手法の拡張がなされている [11]-[13]. ただし, この方法においては, 時間的な AR 係数変化は連続的ではなく, イベント生起に相当するように, 間欠的に発生することが仮定されている. そのため, 推定すべき AR 係数の項数は, 連続的に係数が変化すると仮定する手法に比べて, 大幅に少ないものとなっている. いま, 変数の間の分散共分散行列をコレスキー分解したときの変換後の係数行列の対角要素を a_t として, 分散行列の対角成分の分散 σ_t^2 の対数値を $h_t = \ln \sigma_t$ とする. このとき, これらが次の式にしたがって変動すると仮定する.

$$h_t = h_{t-1} + I_2 \eta_t, \eta_t \sim N(0, c_h) \tag{7}$$

$$a_t = a_{t-1} + I_3 \xi_t, \xi_t \sim N(0, c_a) \tag{8}$$

ここで, $N(0, c_h), N(0, c_a)$ は平均がゼロで, 標準偏差がそれぞれ c_h, a_h である正規分布である. また, I_2, I_3 は, ジャンプ状にパラメータが切り替わる変数であり, ベルヌーイ分布 (過程) にしたがって変化すると仮定している. すなわち, ジャンプ状の係数変動が間欠的に発生すると仮定し, その発生確率はあらかじめ与えられている.

しかしながら, AR 係数の変化幅はある正規分布にしたがう確率的なものであると仮定されているので, 確定的な数値ではない. これらの方法は, 工学的には興味ある VAR モデル分析の拡張になってはいるが, 経済分析における分散分解などの実際的な目的には, ややそぐわない点が見い出せる. これについて, 以下で述べる.

このように AR 係数を時間的に変化させるモデルは, 興味ある拡張であると言える. しかしながら, もともとは大規模で複雑なマクロモデル分析に代わるものとして提案され, しかも分散分解による政策ショック分析が主要な応用分野であるとも言えるので, この適用分野に沿った拡張や, 応用がなされることが望ましい. 具体的には, 経済モデル分析の場合には, 工学データとは異なり, 頻繁に状況が変化することは稀であることや, 定常性を仮定することが多いので, 時間的に細かく変化するモデルの適用が, どの範囲まで有効であるかは疑問である. また, AR 係数のそれぞれが, 時間的に変化すると仮定するモデルにおいては, 連続時間ではなくても, 少なくとも間欠的に変化する時刻ごとの係数の管理を行うことや, その時間ごとの変化を記録する必要がある. このような AR 係数の変化管理は, 一般的には意味があることではあるが, 工学モデルの場合とは異なり, VAR モデル分析の場合には個別の係数変化そのものは重視されず, 分散分解などの変換においてこそ意味がある.

このような係数変化を詳細に管理し記録することの問題点は, これ以外にも存在すると思われるが, 詳細は省略する.

2.3 本論文の手法: VAR 時系列区分化による

以上のようなことを考慮すると, これまで提案されている AR モデル分析の簡潔さを継承することが望ましいことが分かる. この問題点を回避する方法として, 本論文では時系列区分化の手法を基本とした時間変化 VAR モデル分析を提案する. 具体的には, AR 係数を完全に時間的に変化すると仮定するよりは, 区分的には定常定数であり, 区間の境界において変化すると仮定するモデルで

ある. このことにより, 通常の VAR モデル分析の手法を援用することができる. しかも, 区間の間においては VAR モデルは定常であると仮定することができるので, 分散分解も自然に適用可能となる.

提案手法の基本的なポイントは 3 つにまとめられる. すなわち, 1) 観測される時系列データから推定されるモデルにおいては, AR 係数が複数の時間変化の時刻において間欠的に切り替わる仮定を置くこと, 2) 時間変化の時刻の推定において不確実性をカバーするため, ベイズ手法を適用すること, 3) 更に区分化された区間の中においては, データは定常であると仮定して通常の従来の VAR モデル分析における最小 2 乗法による AR 係数推定を適用することである. 1) については, 詳細は次のモデル化の節で述べるが, 推定される VAR モデルから求められる尤度を改善する方向に, 時系列区分化の境界を変更する手法である. 次に 2) については, ベイズ推定の手法を適用することにより, 不確実性に対応する手順として用いている. 実際のデータ分析に, この手法を適用する場合には, 統計的なばらつきが存在することが予想される. したがって, このような不確実性が存在する場合においても, その変動をカバーすることができる手法を用いることが望ましい. 具体的には, ベイズ推定の手法を用いて時系列を区分化するための境界の選択を行うことである.3) については時系列区分化の手法を前提とすることで, 時系列の区分化されて区間においては定常的な VAR 分析が適用できると仮定し, 計算を簡略化できることである. 具体的には, 既存の VAR モデル分析手法の適用により, モデルの基本部分である AR 係数の推定における計算量を軽減することができる. 以上述べるように本論文で提案する分析手法のもとでは, 通常の AR 係数が時間変化するモデルとは異なり, ベイズ推定の対象となるのは, 時系列区分化の境界の生起だけとなる.

次に, 本論文で提案する時系列区分化の方法による時間変化 VAR モデルの推定において, 基本となる関係式を示す. いま多変量ベクトル時系列 Y_t について, 次のような記号を定義する.

$t = 1, 2, ..., N$: 観測データ Y_t が集計される等間隔の時間幅の t 番目の時刻

Y_t: 多変量ベクトル時系列の時刻 t における計測値

K: ベクトル時系列 Y_t におけるセグメントの個数

I_k: ベクトル時系列 Y_t において発生した k 番目のセグメント, このセグメントに含まれる時刻 t を $t \in I_k$ として表現する

このような定義のもとで, 観測される多変量ベクトル時系列 Y_t への時間変化 VAR モデル当てはめの尤度は, 次のようになる. ただし θ はパラメータ, A, B はセグメント内でのみ定数.

$$L(Y|\theta) \sim \exp[-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{K}\prod_{t\in I_k}(Y_t - AX_t - B)^T(Y_t - AX_t - B)] \tag{9}$$

3 時系列区分化による時間変化 VAR モデル推定

3.1 ベイズ推定による時系列区分化

観測される時系列 (一般的には複数の同時に観測される時系列) の特性の変化を抽出し, 時系列を区分化する手法が提案されている [14]-[21]. この手法は大きく分類して, 1) あらかじめ既存のパラメータ集合から選択されるパラメータを特定する方法 [14]-[16] と, 2) パラメータそのものが未知であり時系列特性の変化と同時にパラメータの変化後の値も同時に推定する方法 [17]-[21] に分けら

れる. 第1番目の手法においても, 例えばシステムを駆動するノイズの平均や分散を推定する手法などのバリエーションは存在する. しかしながら, 基本的にはパラメータの集合から選択されたパラメータを特定する手法に帰着できる. モデル分析の複雑さについては, 一般的には後者において, やや増加する傾向にある. 本論文では, 第2番目の時系列特性の変化後の値が未知である問題を取り上げているので, この分野における, これまでの手法をまとめる [18]-[21].

用いるモデルの定義

本論文では, 時系列パラメータの同時変化の推定が主な目的であるので, パラメータそのものは, やや簡単なものに限定をしておく. 具体的には, 文献 [18] に示されている光子 (photon) 到着に関する多変量時系列であり, モデルを分かりやすく説明するために, この例題を用いてモデルを記述する.

光子などの粒子が複数のカウンタを用いて観測されると仮定し, 以下のように, 観測データに関連して変数が定義されているとする. パラメータ変化が発生して区分化される時系列の部分を, セグメントと呼ぶ.

$t = 1, 2, ..., N$:観測データが集計される等間隔の時間幅の t 番目の時刻

$j = 1, 2, ..., J$:観測される時系列の番号 (全部で J 個)

$y_{j,t}$:j 番目の時系列の時刻 t における計測値

K_j:j 番目の時系列におけるセグメントの個数

$I_{j,k}$:j 番目の時系列において発生した k 番目のセグメント, このセグメントに含まれる時刻 t を $t \in I_{j,k}$ として表現する

$\lambda_{j,k}$:j 番目の時系列の, k 番目のセグメントにおけるポアソン分布にしたがう光子の到着率

$r_{j,t}$:j 番目の時系列で時刻 t におけるパラメータ変化の発生を示す変数

$$r_{j,t} = \begin{cases} 1, & \text{この時刻に変化が発生;} \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{10}$$

記号として $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, ..., \lambda_{j,K_j})$, $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_J)$, $R_t = (r_{1,t}, ..., r_{J,t})^T$, $R = (R_1, R_2, ..., R_N)$, $\theta = (R, \Lambda)$ を用いる. 定義のように, R_t は時刻 t における複数の時系列ごとの境界の生起の有無を, ベクトルとして表記したものであり, 行列は R, この R_t を列ベクトルとして, 全部の時刻について並べたものである.

全体で J 個の複数の観測時系列データ全体に関する尤度関数は, 次のように定義される.

$$f(Y|\theta) = \prod_{j=1}^{J} \prod_{k=1}^{Kj} \prod_{t \in I_{j,k}} \frac{\lambda_{j,k}^{y_{j,t}} \exp(-\lambda_{j,k})}{y_{j,t}!} \tag{11}$$

更にパラメータ $\lambda_{j,k}$ は, ベイズ推定における事前分布と事後分布が同じ形状であるガンマ分布にしたがうと仮定して, 推定を安定化させている. 同時に, パラメータの変化の発生事象である $R = (R_1, R_2, ..., R_N)$ についても, 同時生起の確率が, 後述するディリクレ分布 (過程) にしたがうと仮定して, ベイズ推定の対象としている.

次に, パラメータ変化の生起とそのベイズ推定の手法について整理する. いま, 時系列 j で時刻 t におけるパラメータ変化の発生を意味する変数 $r_{j,t}$ を j についてベクトルとして表記すると同時に, これを集合から選択する表現を定義する. 変数 $r_{j,t}$ を j についてベクトルとして見た場合には

ビット列であるととらえることができるので, この存在可能な集合からの選択として, パラメータの変化を記述する. すなわち, j 番目の時系列変化である $r_{j,t}$ をある変数のビット表現として, この全体の集合を B とする. 例えば時系列の個数が 3 である場合には, 変数 $r_{j,t}$ の値を j を順番として並べると, 次のように記述することができる.

$$b_i \in B, B = (000, 001, ..., 111) \tag{12}$$

更に本論文の以降での議論の都合上, ビット列の発生確率を $P_{000}, P_{001}, ..., P_{111}$ として表現し, これらを順番に並べた確率変数を z_i としておく. すなわち,

$$z_1 = P_{000}, z_2 = P_{001}, ..., z_8 = P_{111} \tag{13}$$

である. また, 確率変数 $z_1 = P_{000}, z_2 = P_{001}, ..., z_8 = P_{111}$ についての確率分布の集合を, P としておく. 以上の操作を手順としてまとめると, 次のようになる. 推定の対象は, 2 つのパラメータの組みである $\theta = (R, \Lambda)$ と, 境界の発生確率である確率変数 $z_i, z_i \in (P_{000}, P_{001}, ..., P_{111})$ の分布 P である. なおこれらの操作手順は, 同時に適用するには問題が複雑になるため, 後述するように, 適切なサンプリング手法を適用して, 複数の項目について順次推定する方法を適用する.

未知パラメータの推定手順

次に, 未知パラメータの推定手順についてまとめる.

(1) 境界のランダムな入れ替えと変更

現在与えられている境界のパターンをランダムに変更して, 尤度が増加するかどうかを確認する. そして尤度が増加する場合に限って, この新しい境界を存在可能な境界のパターンとして登録する. すなわち, 集合 R のある要素 R_t(列ベクトル) をランダムに集合 B から選択した b_j^T と入れ替える. この場合の R を R_i とする. この結果得られる尤度の変化を, 観測する.

$$f(R)_{R_t = b_j^T} \sim f(R_i|Y) \tag{14}$$

同時に, この場合の妥当な b_j の使用確率を, S_j として求めておく. なお, このようにランダムにイベント生起のベクトル R_t を入れ替えて検査する方法は, 文献 [17] に示されているような, 図式的にあるいは組織的に境界の移動の可能性をチェックする方法と比較して, 冗長なイメージがある. しかしながら, 計算手順の簡略化などの効果と, 実際的な計算時間の比較などから, ここにまとめている手法には遜色はない.

(2) Λ の更新

まず $\lambda_{j,k}$ の初期値を, 2 つの初期パラメータ ν, γ を仮定したガンマ分布 $G(\nu, \gamma)$ から抽出する. すなわち, $\lambda_{j,k} \sim G(\nu, \gamma)$ とする. 次に, 与えられた R, Φ(ただし $\Phi = (P, \gamma)$ として定義する) のもとで, j 番目の時系列の区間 k における到着率を, その区間に含まれるサンプル数 $s_{j,k}$ と観測される粒子の個数 $n_{j,k}$ に応じて, ガンマ分布のパラメータを増加させる.

$$\lambda_{j,k}|R, \gamma, Y \sim G(\nu + s_{j,k}, \gamma + n_{j,k}) \tag{15}$$

(3) 境界の発生パターンの確率の更新

与えられた θ, Φ のもとで, 境界の発生パターンの確率を与える確率変数 z_j に与えられているディリクレ分布のパラメータ α_j を, S_j にしたがって更新する. なおディリクレ分布 (過程) については付録 B にまとめているので, パラメータ α_j の定義についても付録 B に述べている.

$$\alpha_j \rightarrow \alpha_j + S_j \tag{16}$$

(4) ハイパーパラメータ γ の更新

ガンマ分布の第 2 番目のハイパーパラメータである γ を, 次の手順にしたがって更新する. なお第 1 番目のパラメータ ν は固定して, 変更しない.

$$\gamma|R, \Lambda \sim G(\nu \sum_{j=1}^{J} K_j, \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K_j} \lambda_{j,k}) \tag{17}$$

なお, 上に示した事例では, 粒子のポアソン到着率などの未知パラメータ θ, Φ が推定対象であるが, 本論文のモデルにおいては, 回帰分析の結果として得られる解があるだけで, Λ に相当する推定すべきパラメータは存在しない. この点が大きな差異である. また j 番目の観測時系列は, 粒子の到着個数という複数個の 1 次元の変数 $y_{j,t}$ ではなく, 多変量 VAR モデルにおけるベクトル Y_t を複数のベクトル時系列に拡張したものであることも異なっている. このため, 本論文で説明に用いている単独の多変量ベクトル変数 Y_t を, $Y_{j,t}$ として j 番目の多変量ベクトルであることを明示するように拡張を行っている. したがって, 比較のための例示は, これ以上は行わない.

しかしながら, 上に述べた 4 つの推定手順は, そのまま本論文のモデルにおいても適用可能であり, 異なるのは, 式 (11) に用いている複数の単独の変数からのパラメータ推定のための尤度の定義を, 式 (9) に示す, 複数の多変量ベクトル変数に拡張することである. 具体的には, 推定のための尤度は次のように定義される.

$$f(Y|R) = \exp[-\frac{1}{2} \prod_{j=1}^{J} \prod_{k=1}^{K_j} \prod_{t \in I_{j,k}} (Y_{j,t} - A^{(j)} X_{j,t} - B^{(j)})^T (Y_{j,t} - A^{(j)} X_{j,t} - B^{(j)})] \tag{18}$$

ここで, 粒子の観測と時系列区分化の例題について説明しているパラメータ $\theta = (R, \Lambda)$ の中で, 到着率 Λ は時間変化 VAR モデル推定においては含まれないので, 単 R にだけを推定すべきパラメータとしている. なお, 式 (18) に示されている推定すべきパラメータ A, B(AR 係数) は, 多変量時系列の順番 j ごとに異なっていることを前提として, 上の定義式においてこれらの区別は, 上付きの添え字 (j) として示している. $A^{(j)}, B^{(j)}$ はセグメントごとに異なると仮定する.

3.2 ベイズ推定による時系列区分化と時間変化 VAR モデル推定

本論文では, 複数の多変量ベクトル時系列の観測データ $Y_{j,t}$ からパラメータ変化の時刻を推定することが目的である. モデル推定において, 推定に用いる R, P についての確率密度関数を $f(Y|R), f(R|\Phi)$ として定義した場合に, 区分化を示すパラメータの推定問題は, 次のように形式的に書くことができる. ここで, $\Phi = (P, \gamma)$ である.

$$f(R|Y) = \int f(R, \Phi|Y) \sim \int f(Y|R) f(R|\Phi) f(\Phi) d\Phi \tag{19}$$

ここで, この関係式は解析的には解は求められないので, Gibbs sampling による手法により, 最適解を推定することになる. したがって式 (19) は, 基本的には左辺の R を右辺の事前分布を仮定して, 逐次的に推定することを意味している. なお推定される R は時系列変化の時刻変数であるが, そのものではなく, この生起確率 (生起する可能性) を $r_{j,t}$ についてを示すものであるので, これも確率分布として示すことになる. 本論文のモデルにおいては時系列パラメータとこれを制御するハイパーパラメータ, およびこれに関連する同時変化のメカニズムを記述する変量が多数含まれており, 一度に推定を進めることは効率的ではない. これを考量して, 多数のパラメータを推定するベイズ推定の問題において適用される Gibbs sampling による逐次推定を用いる.

Gibbs sampling による逐次推定

パラメータを単独の値ではなく, 分布として与えることにより, パラメータ推定の不確実性を緩和することができる. したがって, パラメータ推定においても, この分布を前提とした手順に変更する必要がある. 具体的には, Gibbs sampling と呼ばれるサンプリング手法である. この方法においては, パラメータの値はある注目する現在の分布関数に示す分布からサンプリングされて, 次の適用のステップにおいて適用される, 式 (19) に示すパラメータの更新が行われ, このように更新された数値のもとで, 再びサンプリングが行われる. この場合, この注目する分布関数以外の分布関数は固定されている. このような逐次的な操作により, 複雑な計算を簡単な計算に分解している.

このような Gibbs sampling によるパラメータの分布形状の推定の手順を全体としてまとめると, 次のようになる. なお推定に用いる関係式は, 粒子到着の時系列区分化の例題においてすでに説明しているので, 以下では引用だけを簡潔に述べる.

(1) 初期値の設定

パラメータ R, P の初期値を設定する.

(2) パラメータの更新

前節に示した手順にしたがって, 時系列のパラメータである R の値を推定して, 更新する. しかしながら, すでに述べたように, パラメータ Λ は推定対象には含まれないので, 自動的にガンマ関数による分布の近似と推定は必要がなくなる. したがって, 残る推定対象は時系列の区分化を与える R と, これに並行して更新される確率分布の集合 P だけになる. 具体的には, $f(R)_{R_i=b_j} \sim f(R_i|Y)$ にしたがって時系列区分化の境界を入れ替えた場合の尤度の改善を計算として求め, これに比例してビット列 b_j の選択の頻度 S_j を計算する. 次に, $\alpha_j \to \alpha_j + S_j$ にしたがって, P の分布を決めるディリクレ分布におけるパラメータ α_j を更新する.

(3) 繰り返し

これらの推定結果として, 式 (18) に示すモデル全体の尤度が計算される. この尤度が, あらかじめ設定した基準より大きくなると, 推定の手順を終了する. もし得られた尤度が基準以下である場合には, 上に整理した計算手順を繰り返す.

4 応用例

4.1 人工データを用いた時間変化 VAR モデルパラメータ変化の推定

本論文では, 実際に観測される時系列データをもとにして, これにあてはまる時間変化 VAR モデルを推定することを目的としている. 以下ではまず, これらの検討を進める前に, 人工的に生成される時系列データを用いて, 本論文で提案するモデル推定方法の適用結果をまとめておく. 具体的には, 次のような手順で行う.

(1) 複数の多変量ベクトル時系列について区分化の境界を与える

あらかじめ相互に関連性のある複数の多変量ベクトル時系列の組みを人工データとして生成しておくことにより, 本論文で提案する時系列区分化手法の性能を評価することができる. 本論文の場合にはこの係数変化の境界となる時刻と, 同時生起であるかだけを推定する問題である. したがって, 同時変化あるいは単独変化であるかだけをあらかじめ与えておけばよい. すなわち, J 個の時系列 j を仮定し, それぞれの時系列 j について, あらかじめ K_j 個の時刻 (境界) において, 時系列パラメータ係数が変化すると仮定しておく. これらの変化には, 同時変化も含まれている.

(2) これらの区間における係数をランダムに与え時系列を生成する

設定された多変量ベクトル時系列の区分化範囲において, それぞれ式 (3)∼(6) で用いている係数行列 A, B の要素を乱数から選択すると同時に, 式 (3) における正規乱数 $v_{j,t}$ を生成しながら, 逐次的に VAR 変数の値を時系列として生成していく. すなわち, このように生成した多変量ベクトル時系列を用いて, その生成された期間において VAR モデルを推定すれば, 結果として, あらかじめ与えている AR 係数の値に極めて近い数値として計算されるであろう. 同時に, その場合の最小 2 乗推定の誤差の分散は, あらかじめ設定した数値 ($v_{j,t}$ の分散) に極めて近いものになるであろう.

(3) 推定手法を適用し性能を評価する

次に, これらの時系列を観測データとして用いて, 本論文の推定手法を適用する. 具体的には, 1) まず区分化の同時生起確率の分布を仮定する, 2) 区分化の初期値を与える, 3) それぞれの区間において通常の VAR モデル推定, すなわち最小 2 乗法によるパラメータ係数の推定を行う. この操作を繰り返しながら, 最終的に, 推定誤差が減少しないステップまで行う. 最後に, 推定された区分化の境界を, あらかじめ設定した値と比較して, 推定の精度を検証する. なお, あらかじめ設定している AR 係数については, 個別の推定結果を既知の値と比較することはあまり意味がないので, 本論文では実施しない.

シミュレーションの条件を, 以下のように設定する.

多変量ベクトル時系列の長さ: $N = 240$

多変量ベクトル時系列の個数: $J = 2$

それぞれの多変量ベクトル時系列の区分数: $K_1 = 4, K_2 = 2$

$\alpha_j = (100, 2, 3, 2)$

なお, 多変量ベクトル時系列生成に用いる式 (3)∼(6) における AR 係数 A, B およびホワイトノイズ v_t はランダムに選択するが, 時系列が発散しない範囲で選択している. しかしながら, この詳細や推定結果は, シミュレーションによる本論文の手法の評価には直接的には影響しないので, 詳細は省略する.

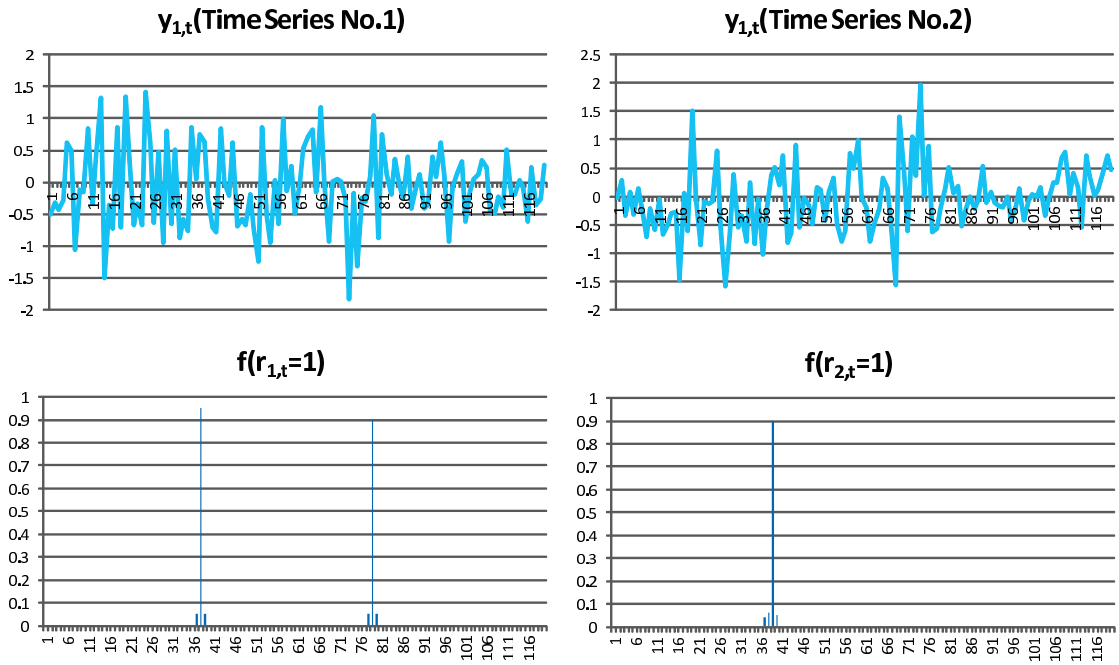

図 1: 生成された時系列の例と区分化の推定結果 (上: $y_{1,t}$, 下: 得られる $f(r_{j,t}=1)$)

図 1 には, 既知である VAR モデルにしたがって生成した時系列 $y_{1,t}$(観測データ) の例を示している.2 つの多変量ベクトル時系列 (No.1, No.2) の 1 つの要素 (第 1 番目の変数 $y_{1,t}$ だけ) を示している. また図 1 の下方には, ベイズ推定により得られる区分化の結果を示している. 具体的には推定結果として時系列 j について, ある時刻 t における境界が発生する ($r_{j,t}=1$ となる) 確率である $f(r_{j,t}=1)$ を示している. データは, 最初の部分だけを示している. 図 2 には確率分布の集合 P の要素のそれぞれを示しており, これらの図の横軸は図に示すように, 確率変数 $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ であり, 縦軸はこの確率変数が実現される確率である. また図 3 には, 推定された時系列区分化の個数の分布関数を示している. この場合, $K_j = \sum_{t=1}^{N} r_{j,t}$ により, 区分化の個数 K の存在確率を計算している.K_j の存在確率として $K_j = m, m = 1, 2, ...$ となる確率 $f(K_j = m)$ を示す. 簡単化のため推定である記号を省略する. これらの結果から分かるように, 既知の設定として与えている時系列区分化の境界の場所とその最尤値は一致しており, 本論文の推定手法は有効である.

4.2 日米イノベーションにおける金融政策ショック分析

次の応用例として, 米国と日本の経済構造の変化を抽出する問題を, 本論文で示す手法を適用して考察する. この分析における分野として, イノベーションにおける金融政策ショック分析を取り上げる. 具体的には, 最近大きな議論のテーマとなっている, いわゆる大規模な金融緩和政策が経済成長に寄与しているかどうかの分析である. このための 1 つの分析を, 本論文で提案する時系列の時

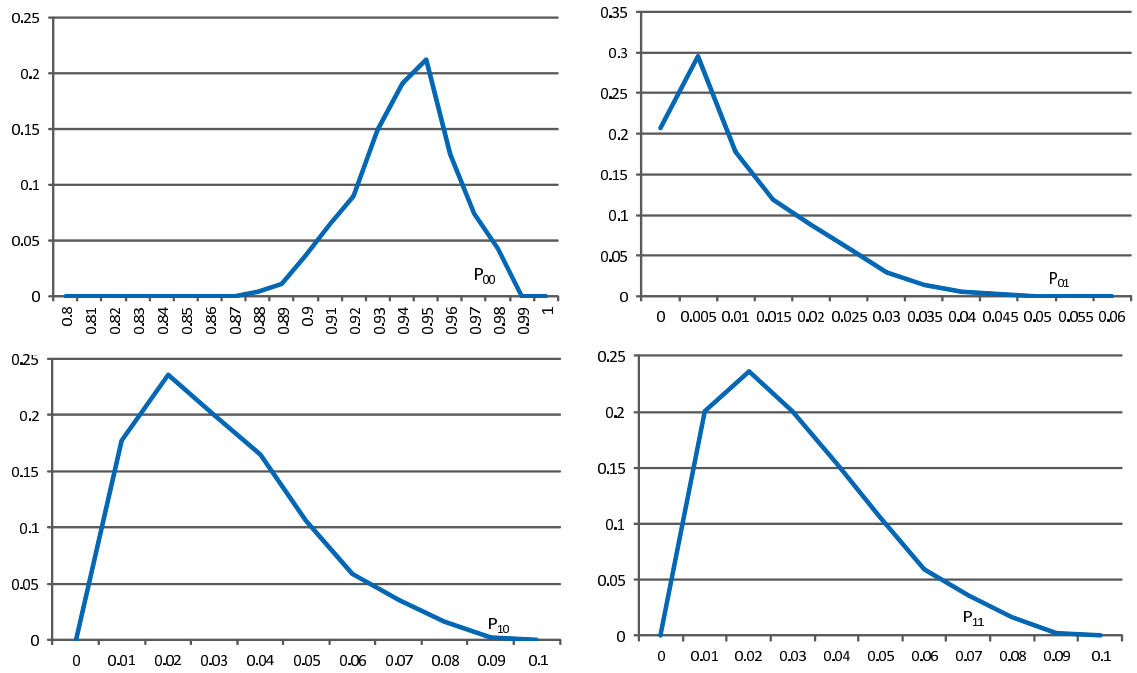

図 2: $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ のベイズ推定結果

間的な区分化の手法を援用することにより考察する.

日米金融緩和に関連した多変量時系列の区分化

本論文で示す方法においては, 経済活動を代表する指標を時系列として収集すると同時に, 一般的によく知られている経済構造の変化を, 時系列の特性変化の境界であるとしてとらえる. この時系列区分化の境界検出に, 本論文で提案する VAR モデル分析における区分化手法を用いる. この場合, 区分化された観測区間ごとに, 特にマネタリーベースのショックが, GDP および消費者物価指数 (CPI) の上昇にどのように寄与するかを, VAR 分析における分散分解を用いて検証する. したがって, 時系列の区分化が完了したあとでは, それぞれの区間ごとに, 従来から用いられている線形の VAR モデル分析を適用する. 収集するデータは, GDP, CPI のほかに, 関連する経済指標であり, 具体的には, 表 1 に示すような時系列データである. 観測頻度は年 4 回観測される, いわゆる四半期データであり, 1970 年の第 1 四半期から 2014 年の第 4 四半期の間のデータである.

表 1. 収集する GDP, CPI に関連する経済指標データ

変数名	意味	データの形式
GDP	国内総生産	前期からの増加率 (%)
CPI	消費者物価指数	増加率 (%)
Rate	短期金利	米国は federal fund rate, 日本は短期貸出金利
Unemploy	失業率	雇用者全体における比率
Monetary	マネタリーベース	米国は St. Louis Adjusted Monetary Base(billion dollar), 日本は日銀データ (億円)

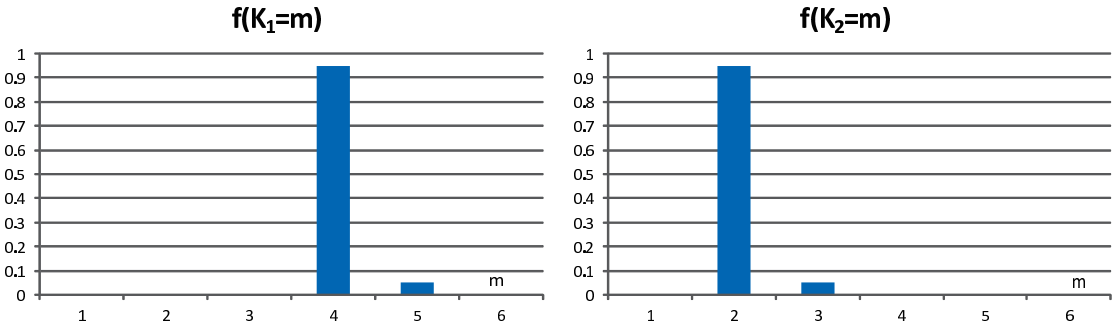

図 3: 時系列区分化個数 K_1, K_2 の存在確率

時系列区分化の結果およびマネタリーベースなどの傾向

分析結果として, 最初に時系列区分化について示す. 時系列では $j = 1$, $j = 2$ のそれぞれが米国および日本のデータに対応する. 図 4, 5 には米国と日本のデータにおける観測データ (時系列) の代表事例として GDP の時系列を示し, 同時に本論文の時系列区分化の手法を適用した場合の, 区分境界の検出結果を示している. それぞれの図 4, 5 における上方が観測時系列 (GDP) であり, 下方が区分化の境界発生の推定結果である. 具体的には推定結果として時系列 j について, ある時刻 t における境界が発生する ($r_{j,t} = 1$ となる) 確率である $f(r_{j,t} = 1)$ を示している. また図 6 には, 推定された時系列区分化の個数の分布関数を示している. この場合, $K_j = \sum_{t=1}^{N} r_{j,t}$ により, 区分化の個数 K の存在確率を計算している.K_j の存在確率として $K_j = m, m = 1, 2, ...$ となる確率 $f(K_j = m)$ を示す. 簡単化のため推定である記号を省略する.

これらの図において分かるように, 日米の観測データにおける分析について検出される区分化の境界は, どちらも 3 つであり, これらの中で 2 つは同時に生起している. なお, この区分化の生起個数とその確率については, 図 6 から分かるように, 区分化の個数が日米の分析において 2 から 5 の範囲に分布はしているが, これらの中での最大確率は, それぞれ 3 となっている.

次に, マネタリーベースと GDP および CPI との関係の概要について述べておく. マネタリーベースと GDP, CPI との関連性を示すために, 図 7 において日米における, これらの時系列の変化を示している. なお, 図を分かりやすくするために, GDP と CPI とは, 増分ではなく, 観測された実数値そのものを示している. また図示する都合上, CPI については数値 (相対値) を, 米国のデータは 10 倍, 日本のデータは 10000 倍したものを表示している. 同時に米国の GDP データも, 10 倍したものを表示している. この図から分かるように, 日米において, 2008 年以降に金融緩和の結果として, 多量のマネーが投入されている. この結果として, 米国においては緩やかではあるが GDP, CPI は持続的に拡大しているが, 日本においては成長は停滞している.

金融政策ショックの分散分析の結果

本論文では 1970 年から 2014 年までの, 日米のマクロ指標を変数とする VAR モデル分析による時系列区分化の結果を用いて, 更にそれぞれの区間において分散分解を実施している. すでに述べたように, VAR モデル分析における日米における時間の区分化の結果として, 4 つの時代が抽出さ

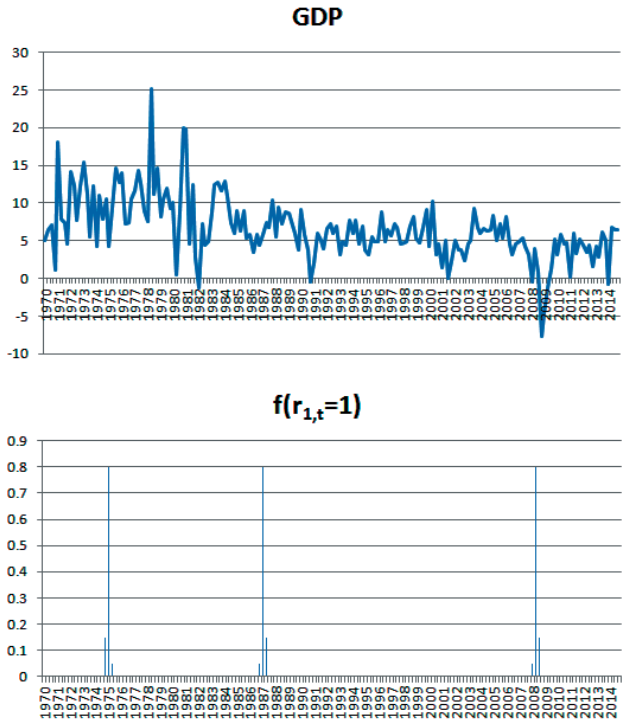

図 4: 米国における GDP の時系列例と区分化 (上: 観測時系列 $y_{1,t}$, 下: 区分化の境界発生確率 $f(r_{1,t}=1)$)

れるので, これらの時代ごとに, 金融政策ショックの分散分解を行う. ただし VAR モデル分析においては, 特定の被説明変数や説明変数の選択はしないことや, 有意でない係数が, 分散の持続性の減少として自然に分析結果に反映されるので, 全部の変数を同時に投入した結果だけを用いている. また, われわれの関心はマネタリーベースが GDP および CPI に及ぼすショックであるので, これ以外の変数への影響の考察は, 省略している.

金融政策ショック分析の方法として, 本論文では, マネタリーベースを入力とした場合の GDP および CPI への影響の大きさと, その持続性を分析している. 分散分解における予測の長さは 10 であり, すなわち 10 期 (四半期) 先までのショックによる値の広がり (大きさ) を分解している. したがって, 用いる結果はやや簡単であり, 図 8, 9 のような 4 つの図にまとめることができる. この図において, 米国のデータでは線分 U1, U2, U3, U4 として 4 つの時代区分におけるマネタリーベースを入力とした場合の, 分散分解の結果を意味している. 日本のデータの場合には, これらの時代区分の分散分解の結果の線分を, J1, J2, J3, J4 として区別している. この結果から, 次のような 2 つの点が明らかとなる.

(1) 米国における金融緩和の一定の有効性

大幅な金融緩和の目的は, 政策実施による GDP の拡大と CPI の順調な伸張にあるとして整理で

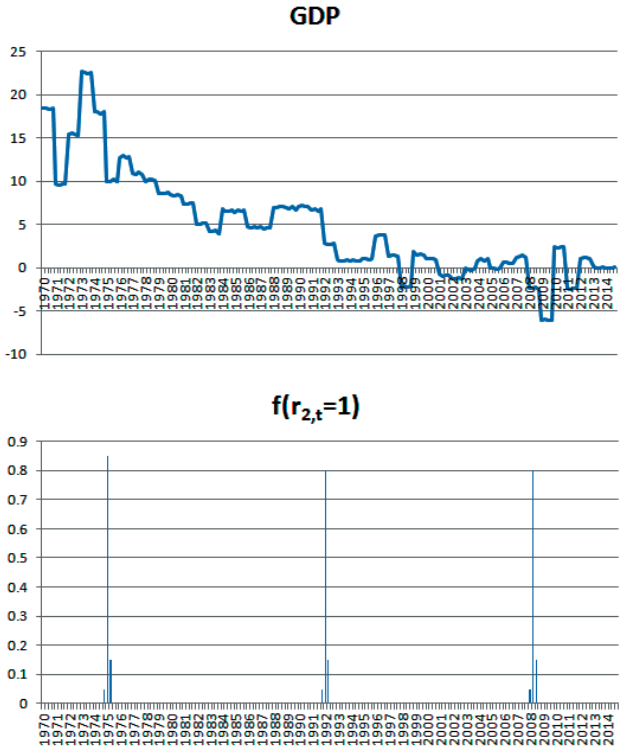

図 5: 日本における GDP の時系列例と区分化 (上: 観測時系列 $y_{1,t}$, 下: 区分化の境界発生確率 $f(r_{2,t}=1)$)

きる.4 つの時代区分の中においても, 特に最近の第 4 期 U4 における金融政策の実施では, この点は重視されている. リーマンショックを境として, 他の時代区分では見られなかった規模のマネタリーベースの拡大がなされてきている. この結果として, 米国においては, マネタリーベースを入力とした分散分解を見る限りでは, このショックの効果を一定程度見ることができる. 具体的には, 図 8 に示すように, マネタリーベースを入力とした場合の GDP および CPI への影響の大きさは, U4 における線分において, 他の線分 (U1, U2, U3) よりは大きくなっている. しかも, その持続性においても, 10 期 (四半期) 後までの継続が確認される. 確かに, マネタリーベースが過去の数値と比較して 3 倍ないしは 4 倍となっていることを考慮すると, GDP および CPI における拡大の大きさは十分ではないと言える. しかしながら, 大規模な金融緩和の効果として, GDP および CPI の伸張が見られることを確認することができる.

(2) 日本における金融緩和の問題点

米国におけると同様に日本においても, リーマンショックを境として, 大規模な金融緩和政策が実施され今日に至っている. しかしながら, これまでの各種の分析結果を参考にすると, 緩和政策の実効性は顕著には見られないと言えよう. 確かに円安の進行による輸出企業の業績の回復と, 大企業における勤労者の所得の増加などが見られるが, マクロ的には金融緩和が顕著に影響を与えてい

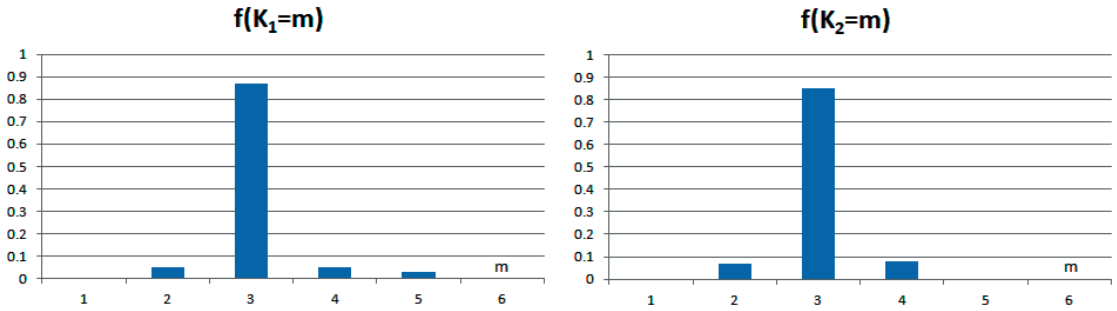

図 6: 時系列区分化個数 K_1, K_2 の存在確率

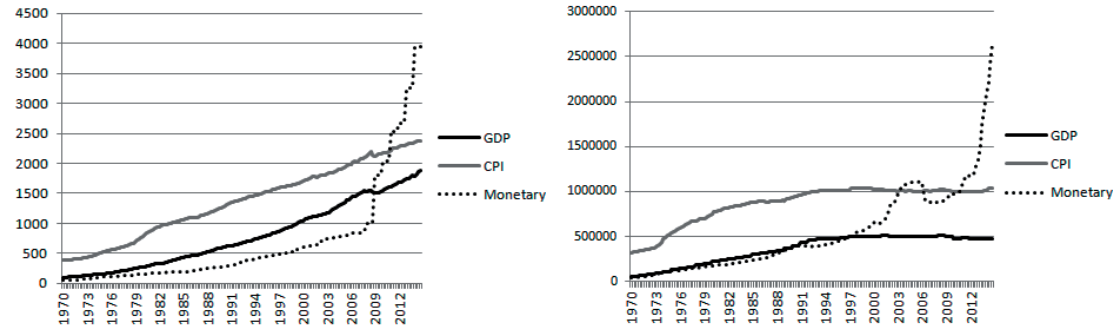

図 7: 日米におけるマネタリーベースと GDP, CPI の関係 (左: 米国, 右: 日本)

るとは言えない. このような事象は, 本論文の分析結果からも確認することができる. 具体的には, 最終の時代区分である J4 においては, 大規模のマネタリーベースの拡大がなされてきているが, 日本においては, マネタリーベースを入力とした分散分解では, このショックの効果を見ることはできない. 図 9 に示すように, 最終時期の時代区分である J4 においても, 他の時代区分の場合と同様に, 小さなレベルにとどまっている. なお, 本論文の分析目的とは直接の関連性はないが, 日本においては, いわゆるバブル経済の時期においては, マネタリーベースの拡大がなされていないにもかかわらず, GDP へのマネタリーベースショックは, 他の時代区分のときよりも相対的に大きくなっている. これはまさに, バブルにより誘発された伸張であると言える.

4.3 イノベーションをめぐる問題

これまで見てきたように, マネタリーベースが GDP 拡大に及ぼす影響の日米における差は大きなものとなっている. しかしながら, 米国において経済の回復基調が達成されたかに関しては, 多くの議論がある. いわゆる成長戦略として金融緩和が決定的な影響を与えているかの分析に関しては, 明確ではないのが現状であろう. この成長戦略の全体をここで議論するのは本論文の目的から考え

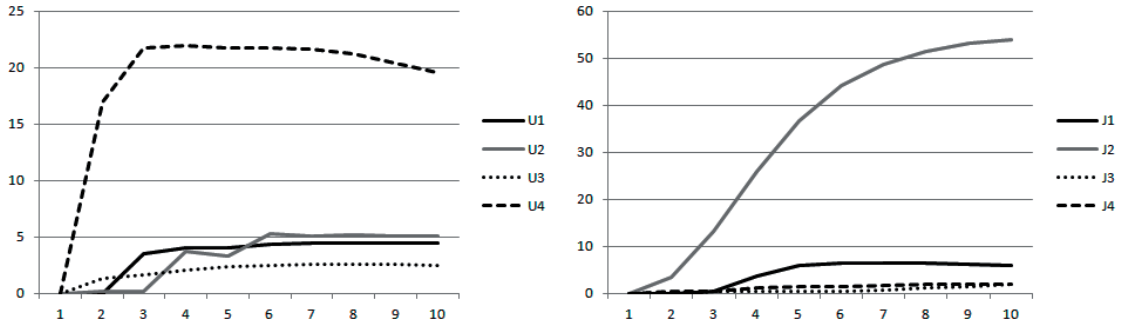

図 8: 米国と日本における金融政策ショックの例 (マネタリーベースによる GDP 誘発)

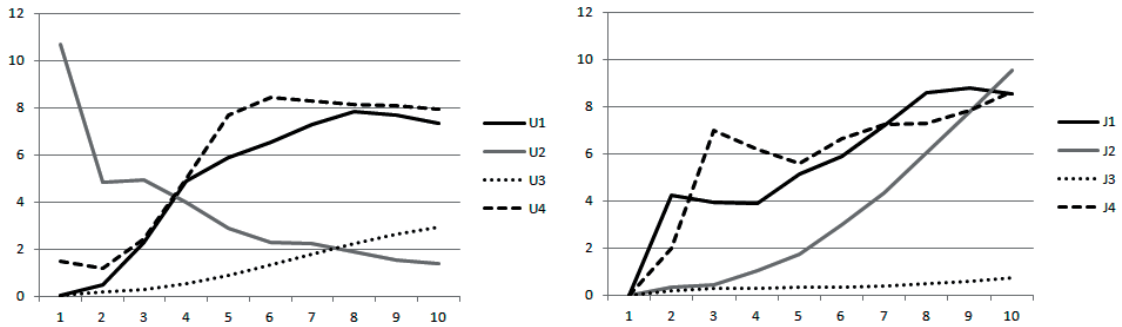

図 9: 米国と日本における金融政策ショックの例 (マネタリーベースによる CPI 誘発)

て適切ではないので, 今までなされている議論を引用するにとどめておく. 分析のポイントは, 以下の 3 つである [22]-[26].

(1) 成長戦略とその成果

多くの先進国と同様に, 第 2 次オバマ政権においても, 経済成長戦略の基本には, いわゆる先進製造業が位置づけられている. 最近ではシェール革命が注目されているが, 成長の基本は製造業であるとする分析は少なくない. しかしながら, GDP に占める製造業のシェアは 2000 年代半ばから低下傾向にある. 一方では, 成長の大きな要因である製造業におけるデフレの進行についても, 下げ止まる傾向にあることが分析されている. この製造業デフレは, 労働生産性の向上や労働コストの低下によりもたらされてきたが, 最近では, 労働生産性の向上の鈍化と労働コストの低下傾向の縮小などが懸念されいる.

(2) 企業投資の拡大傾向

最近の傾向として, 大企業を中心として米国国内への投資を進める案件が増加している. その原因として, 1) 海外進出と比較しても国内回帰が総合的なコストの面で優位となりつつあること, 2) イノベーションを促進するには, 国内投資が望ましいこと, 3) 米国国内での需要の重視, などのポイントが指摘されている. 特に, 労働コストについては, 新興国における急激な賃金上昇のほかに, 米国

国内での労働運動の低下による賃金上昇圧力の低下などが指摘されている. したがって, イノベーション戦略に直接的に誘発されていると考えるよりは, 海外投資との相対的な比較による選択であると言える.

(3) 成長の内容と問題点

最近の米国における最大の成長産業は, 教育, 医療, 福祉であると分析されているが, これらのいずれの分野も, 労働集約的で生産性の低い分野である.1990 年から 2012 年までの産業別雇用者数の変動を見ると, 製造業は 19.4%から 10.7%へと低下している. 一方では, サービス業の雇用者数のシェアは 74%から 83.5%へと拡大している. その中でも, 教育, 医療, 福祉の分野における拡大が著しいことが指摘されている.

このように米国においては, 成長戦略が政府により策定され, しかもこの成果についての評価も行われ始めている. しかしながら日本においては, 金融緩和政策を除いては, 政策の策定が検討されている段階である. しかも, 製造業に重点が置かれるよりは, 米国でシェアは拡大してはいるが, 生産性が極めて低いとして問題とされている教育, 医療, 社会福祉サービスや, 実現性が問題視される農業分野での先進性などが中心的なテーマとなっている. そして日本においては, 大規模な金融緩和にもかかわらず, GDP 拡大はなされていない.

5 むすび

本論文では時系列区分化手法による時間変化 VAR モデルの推定と応用について展開し, その日米イノベーションにおける金融政策ショック分析への適用について述べた. 最初にこれまでの時間変化 VAR モデルの推定方法の概要を示し問題点を整理しながら, 解決する 1 つの手法として, 時系列の区分化手法を援用する方法を提案した. これにより通常の VAR モデル分析の手法を援用することができ, 区間の間においてはモデルは定常であるので, 分散分解も自然に適用可能となることを述べた. 時系列区分化の実施においてはベイズ推定の手法を適用した. 応用例として, 本論文の手法を人工データに適用し, 時系列パラメータの同時変化を推定する性能を確認すると同時に, 実際に観測される日米イノベーションにおける金融政策ショック分析への適用可能性について考察した.

今後これらのモデル分析の手法を, 更に他の国における時間変化 VAR モデル分析へと適用するとともに, イノベーション政策との関連性を分析する予定である.

謝辞

本研究の一部は, 日本学術振興会科学研究費基盤研究 (B)23310104 により実施されている. ここに感謝の意を表する.

参考文献

[1] C. A. Sims,“Econometric and reality,” *Econometrica*, vol.48, pp.1–48, 1980.

[2] T. Amemiya,“Multivariate regression and simultaneous equation models when dependent variables are truncated normal,” *Econometrica*, vol.42, pp.999–1012, 1974.

[3] R. B. Litterman, “Forecasting with Bayesian vector autoregressions-Five years’ of experience,” *Journal of Business, and Economic Statistics*, vol.4, pp.25–38, 1986.

[4] C. W. J. Granger,“Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods,” *Econometrica*, vol.37, pp.424–438, 1969.

[5] A. S. Dexter, D. Levi and B. R. Nault,“Sticky prices : The impact of regulation,” *Journal of Monetary Economics*, vol.49, pp.797–821, 2002.

[6] W. Oh and K. Lee,“Causal relationship between energy consumption and GDP revisited : The case of Korea 1970-1999,” *Energy Economics*, vol.26, pp.51–59, 2004.

[7] 時永祥三, 呂健軍, 情報経済のマクロ分析, 九州大学出版会, 229 ページ, 2008.

[8] 時永祥三, 松野成悟,“日米情報化投資における構造変化の推定– チョウテスト・VAR・誘発効果による分析,” 経済学研究, vol.81, no.1, pp.21–43, 2014.

[9] C. A. Sims and T. Zha, “Bayesian methods for dynamic multivariate models,” *International Economic Review*, vol.39, no.4, pp.949–968, 1998.

[10] C. A. Sims and T. Zha, “Where there regime switches in U. S. monetary policy?,” *The American Economic Review*, vol.96, no.1, pp.54–81, 2006.

[11] G. Koop, R. Leon-Gonzalet and R. W. Strachan, “On the evolution of the monetary policy transmission mechanism,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.33, pp.997–1017, 2009.

[12] G. E. Primiceri, “Time varying structural vector autoregressions and monetary policy,” *Review of Economic Studies*, vol.72, pp.821–852, 2005.

[13] Y. Liu and J. Morley, “Structural evolution of the postwar U. S. economy,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.42, pp.50–68, 2014.

[14] A. Andreiu, A. Doucet, S. S. Singh and B. Tadic, “Particle methods for change detection, system identification and control,” *Proc. IEEE*, vol.93, pp.423–438, 2004.

[15] F. Caron, M. Davy, A. Doucet, E. Duflos and P. Vanheeghe, “Bayesian inference for linear dynamic models with Dirichlet process mixtures,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.56, no.1, pp.71–84, 2008.

[16] E. Fox, E. B. Sudderth, M. I. Jordan and A. S. Willsky “Bayesian nonparametric inference of switching dynamic linear models,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.59, no.4, pp.1569–1585, 2011.

[17] E. Punskaya, C. Andrieu, A. Doucet and W. J. Fizgerald, “Bayesian curve fitting using MCMC with applications to signal segmentation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.50, no.3, pp.747–758, 2002.

[18] N. Dobigeon, J. Y. Tourneret and J. D. Scargle, “Joint segmentation of multivariate astronomical time series: Bayesian sampling with a hierarchical model,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.55, no.2, pp.414–423, 2007.

[19] 時永祥三, “3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける edge snapping による同期化とその応用,” 情報処理学会論文誌, 数理モデルと応用, vol.6, no.2, pp.36–52, 2013.

[20] 時永祥三, 池田欽一, “結合型プライシングを用いた複数時系列におけるパラメータの同時変化のモデル化とその推定,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J97-A, no.7, pp.503–518, 2014.

[21] 時永祥三, 池田欽一, “粒子フィルタとプライシングによる時系列区分化の手法を用いた非線形時系列生成モデル変化の推定,” 経済学研究, vol.81, no.4, pp.99–122, 2015.

[22] The White House, Fact sheet: The president’s plan to make America a magnet for jobs by investing in manufacturing, 2011.

[23] Economist,“Special report: Manufacturing and innovation,” April 21, 2012, and “Special report: Outsourcing and Offshoring,” January 19, 2013.

[24] J. Hatzius, The US manufacturing renascence: Fact of fiction, The Goldman Sachs Group Inc., *US Economics Analyst*, no.13/12, March 22, 2013.

[25] G. P. Pisano and W. C. Shih, “Does America really need manufacturing?,” *Harvard Business Review*, vol.90, no.3, pp.94–102, 2012.

[26] U. S. Department of Labor, U. S. Bureau of Labor Statistics, Employment Outlook 2010-2020, *Monthly Labor Review*, 2012.

付録 A. VAR モデルとイノベーション (ホワイトノイズ展開) の計算

VAR モデルにおいて重視されている性質の 1 つに, イノベーション (技術革新の意味ではなく工学的なホワイトノイズ展開を意味する) の計算がある. イノベーション計算とは, 工学分野で用いられているインパルス応答関数と同じものであり, システムに大きさが 1 であるパルス状の信号を加えた場合に, これがその後の時系列データとしてどのようになるかを推定するものである. 方法論としては, AR モデルを逐次近似の方法を用いて MA モデルに変換することにより, 逆の関係として表現することに相当する. いま, 式 (1), (2) のような VAR モデルを考える. ただし分散分解においては, それぞれの時系列方程式を独立して分析するので, 以下では式 (1) だけを考察し, 添え字を省略し, 単独の時系列 y_t とする.

ここで, 残差の項 $v_t = (v_{1t}, v_{2t}, ..., v_{Mt})$ は, 平均がゼロで相互に無相関であり, すべての時刻について同じ共分散行列 $\Sigma_v = E[v_t v_t^T]$ をもつと仮定する. このような残差を, ベクトルホワイトノイズと呼ぶことがある. このような自己回帰モデルに対して, 次のような無限の項からなる MA モデルによる表現が可能であることが示されている.

$$y_t = \mu + v_t + M_1 v_{t-1} + ... \tag{20}$$

ここで, μ は Θ_i から計算することができる.

$$\mu = E[y_t] = (I - \Theta_1 - \Theta_2 - .... - \Theta_p)^{-1}\nu \tag{21}$$

M_i の kj の番目の要素は, 時刻が i 期間まえの変数 j により発生された単位大きさのショックに対する k 番目の変数の応答を表している. これらのショックと応答の関係は相互に独立であり, 係数を通じて反映されている. VAR(p) 過程の共分散行列は正定符号行列であるので, $P\Sigma_v P^T = I$ となるような行列が存在する. この行列を用いて, 次のような表現を得る.

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i w_{t-i}, \Phi_i = M_i P^{-1}, w_t = (w_{1t}, w_{2t}, ..., w_{Mt})^T = P v_t \tag{22}$$

このときベクトル w_t は, その要素が相互に無相関で分散が 1 であるという, 便利な性質をもっている. したがって, 係数 Φ_i は大きさが 1, すなわち単位イノベーション w_t に対する y_t の応答であるとみなすことができる.

単位イノベーションに対する応答は, 具体的には, ある被説明変数に対する説明変数 (この場合, 説明変数には被説明変数自体も含まれる) の影響が, 将来にわたりどのように残存するかを見る場合に用いる. これは時期 h 先の予測誤差により説明されている.

式 (22) の関係式を用いると, 時期 h 先の予測誤差の共分散行列は, 次のように記述することができる.

$$\Sigma(h) = \Sigma_v + M_1 \Sigma_v M_1^T + ... + M_{h-1} \Sigma_v M_{h-1}^T \tag{23}$$

この式に, 行列分解 $P\Sigma_v P^T = I$ の関係式を適用し書き換えを行うと, 次のような式が導出できる.

$$\Sigma(h) = \Phi_0 \Phi_0^T + \Phi_1 \Phi_1^T + ... + \Phi_{h-1} \Phi_{h-1}^T \tag{24}$$

この式の中で, 第 mb 番目の対角要素は第 m 番目の変数 y_m が予測誤差に与える影響として見積もることができ, これを予測誤差の説明変数への分散分解と呼んでいる. すでに述べたように, この分

散分解は h 先の時期における予測誤差への説明変数の寄与の割合を示しているので, ある被説明変数に対して, この説明変数が保有する (残存する) 影響の度合いを表している. この分散の定義より, これらの割合の合計は 1 になる.

付録 B. ディリクレ分布 (過程) の適用

切り替えを含む線形システムのモデル化において用いられている方法論の中で, パラメータ変化をモデル化する方法としてディリクレ過程 (Dhirichle Process: DP) による定義がある. この DP 方法を用いる場合のパラメータ推定の方法についてまとめておく.

ディリクレ分布は, 事前確率も事後確率も類似した形式をしていることを用いる. いま, 事象 1, 2,..., K の生起確率の確率変数を $z_1, z_2, ..., z_K$ としておく. 一般的なディリクレ分布の事前分布形状を次のように仮定しておく.

$$P(Z) = \frac{1}{B(\alpha)} \Pi_{i=1}^{K} z_i^{\alpha_i - 1}, \sum_{i=1}^{K} z_i = 1 \tag{25}$$

$$B(\alpha) = \frac{\Pi_{i=1}^{K} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} \alpha_i)} \tag{26}$$

ここで α_i は分布の形状を調整するためのパラメータであり, $\Gamma(.)$ はガンマ関数である. この場合には, ディリクレ確率の事前分布と事後分布は次のような関係になる.

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i + m_i \tag{27}$$

ここで m_i は変数 z_i(事象 i) が観測される割合である. このような方法論を本論文で用いる, 複数の時系列におけるイベント生起の同時確率の変数を定式化する場合に適用する. すなわち式 (13) に示すように複数の時系列におけるイベントの同時発生の確率変数を $z_i = P_{000}, P_{001}, ..., P_{111}$ とした場合 (話を簡単にするために, 式 (13) に示している時系列の個数が 3 である場合だけを述べる) に, ここに示す確率変数に z_i, この変数の定義をそのまま適用することになる. したがって式に示すパラメータの増分 m_i は, $P_{000}, P_{001}, ..., P_{111}$ などのイベントの生起回数に比例して, 変化させることになる.

時永　祥三〔九州大学名誉教授〕
松野　成悟〔宇部工業高等専門学校経営情報学科　教授〕