

PoPな予測

小柳, 祐貴
九州工業大学大学院情報工学専攻

廣瀬, 英雄
九州工業大学大学院情報工学研究院

<https://hdl.handle.net/2324/1522100>

出版情報 : MI lecture note series. 60, pp.106-113, 2014-11-28. 九州大学マス・フォア・インダスト
リ研究所
バージョン :
権利関係 :

PoP な予測 Prediction on Predictions

九州工業大学大学院 情報科学専攻 小柳 祐貴 (KOYANAGI Yuki)
九州工業大学大学院 情報工学研究院 廣瀬 英雄 (HIROSE Hideo)

概要 In observing the widely spread of patients caused by infectious diseases or the increase of the number of failures of equipments, it is crucial to predict the final number of infected patients or failures at earlier stages. To estimate the number of infected patients, the SIR model, the ordinary differential equation model, statistical truncated model are useful. The predicted value for the final number of patients using data until time T becomes a function (trend) of T , called L-plot. We here consider the use of the L-plot to predict the final number of patients, and we defined the decay function. Applying the multiple methodologies to the same data, we could expect the better predicted values. This is called the PoP, the prediction on predictions. One of the PoP methods, we also propose to use the ensemble method. By applying these methods to the real SARS case, we have found that these methods work well.

1 はじめに

感染症感染者や機械の故障など、個体間を伝搬していく事象が観測されているときには、できるだけ早い段階で最終規模を予測することは非常に重要である [15]-[21]。普通、より正確な予測を行うには、より精密なモデリングが必要不可欠であると考えられる。しかし、精密なモデルを記述するために必要な情報は、専門分野に携わる者以外には得るのが困難である場合が多い。さらに一般的には、予測したい事象について、観測データしか得られない状況も十分に考えられる。そのような場合に、一般によく知られた汎用的な予測モデルを複数用いて予測精度を向上させることができれば、その有用性は高いと考えられる。本研究はそのような発想を出発点としている [14][17]。ここでは、SARS の実データを対象として、複数の予測モデルを多角的に用いることで予測精度に変化が見られるのか試みる。

2 予測モデル

本研究では Primary な予測モデルとして、SIR モデル [4][10][13]、sODE モデル [3][7]、statistical truncated(統計的打ち切り) モデル [2][5][6][8][9] の 3 つを用いる。

2.1 SIR モデル

SIR モデルは、直接伝搬する感染症を簡単に表した決定論的なモデルである。このモデルは考える感染症の対象集団を **Susceptible** (これから感染する可能性のある集団)、**Infected** (感染し、他人への感染性を有している集団)、**Removed** (感染から回復し免疫を獲得、または死亡し、他人への感染性を有さない集団) の 3 状態に分割する。このとき感染率 λ 、除外率 γ を用いて、各集団の時間変化を以下の常微分方程式で与える。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t) &= -\lambda S(t)I(t), \\ \frac{d}{dt}I(t) &= \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{d}{dt}R(t) &= \gamma I(t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

感染の対象となる集団の総人口 M は $M = S(t) + I(t) + R(t)$ とする．つまり，対象となる集団に対して，考える感染症以外の要因による人口変化や人口異質性を仮定しない．パラメータ推定には微分方程式モデルに適用される Best-Backword Solution (BBS) 法 [3][7] を用いる．

2.2 sODE モデル

sODE モデルは前述の SIR モデルのような multiple ではなく，single な ODE モデルであることを意味している．時刻 t における感染者数を $G(t)$ としたとき，一般化ロジスティック分布関数に対応する微分方程式を以下のように作ることができる．

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{\beta}{\sigma} \frac{\exp(-(t-\mu)/\sigma)}{1 + \exp(-(t-\mu)/\sigma)} G(t), \quad (2.2)$$

$$G(t; \mu, \sigma, \beta) = \frac{N}{\{1 + \exp(-(t-\mu)/\sigma)\}^\beta}. \quad (2.3)$$

ここでパラメータ μ, σ, β はそれぞれ location, scale, shape を表すパラメータである．また， N は最終感染者数である．パラメータの推定には，SIR モデルと同様に BBS 法 [3][7] を用いる．

2.3 statistical truncated モデル

打ち切り時刻を t_T とし，背後にある確率分布の分布関数として一般化ロジスティック分布関数 $F(t)$ を仮定する． T_{i-1} から T_i の区間を grouped data として取り扱い，その区間での観測数を n_i ， t_T までの group 数を r とすれば，対数尤度関数は以下のように表すことができる．

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^r n_i \log \left\{ \frac{F(T_i; \theta) - F(T_{i-1}; \theta)}{F(t_T; \theta)} \right\}, \quad (2.4)$$

$$F(t; \mu, \sigma, \beta) = \frac{1}{\{1 + \exp(-(t-\mu)/\sigma)\}^\beta}. \quad (2.5)$$

最尤法により分布のパラメータが推定できれば，最終的な累積観測数 \hat{N}_T は $\hat{N}_T = (\sum_{i=1}^r n_i) / F(t_T; \hat{\theta})$ から求めることができる．

3 L-plot

対象とする感染症の観測データが報告される毎に，用いる予測モデルの分だけパラメータの推定を行う．図1は SARS 実データの打ち切り時間毎に推定した statistical truncated モデルによる予測値ラインを示している．この図から予測値の傾向を把握することは難しい．ここで本研究では，ある打ち切り時間 T までの観測データから得られる予測終息値を時刻 T 上にプロットする L-plot を導入する．図2は，打ち切り時間 T における L-plot を表しており，すべての打ち切り時間に対して L-plot したものが図3である．

4 Prediction on Predictions, PoP

現在一般に用いられている予測モデルは多く存在するが，それらの中から最も良い予測モデルを選択することは非常に難しい．例えば予測モデル A,B,C のうち，予測モデル C のみ上手く予測ができないケースも考えられる．あるいは予測モデル B よりも予測モデル A の方が精度の良い結

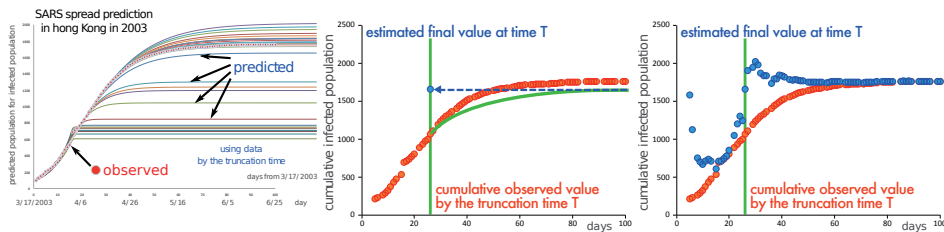


図 1: SARS 実データと
打ち切り時間毎に算出される
予測終息値

図 2: L-plot のコンセプト図
(1つの打ち切り時間)

図 3: L-plot のコンセプト図
(すべての打ち切り時間)

果が得られる一方で、別のケースでは予測モデル B の方が良い結果を算出する場合もある。ここで本研究では、L-plot を用いることで得られる、予測手法に対する新しい見方を提示する。それは、すでに算出している予測終息値を組み合わせることで新たな予測終息値を作るという発想である。本研究では組み合わせ方に関する二方向のアイデアを示す。まず一つ目は、同一の打ち切り時間において算出される複数モデルによる L-plot から、よりよい候補を選択することである。これには後述する ensemble method を使用する。そしてもう一つが、同一のモデルによる L-plot の傾向に対して指数関数をフィッティングさせ、今後得られるであろう L-plot 値を予測する Decay Function Fitting である。こちらも後述する。上記のように複数の予測値から新たな予測値を求めることを、Prediction on Predictions, PoP と呼んでいる。

4.1 Ensemble Method

同じ成功率 p を有する複数の事象から多数決を取ることで得られる P の値の式を (4.1) と定める。図 4 は p と P の関係を表した図であるが、この図より $p > 0.5$ の時には $P > p$ となることが分かる。ensemble method は、この多数決の原理と類似した発想であり、これは ensemble method の有効性を示している。

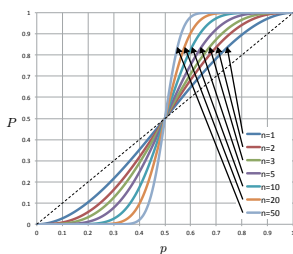


図 4: p と P の関係

$$P = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} p^i q^{2n+1-i}. \quad (4.1)$$

本研究では、SARS 実データに対し、先に示した 3つの手法を用いて打ち切り時間毎に予測終息値を算出している。図 5 はその L-plot の値である。ここで、3 の L-plot 値のうち近い値を算出した 2 値の平均値を多数決による値とする。例えば 800, 860, 1000 の値であれば、830 を ensemble の値とする。また 3つの値の平均値も、mean の値としてここでは考える。図 5 から ensemble および mean によって算出された値をプロットした図が図 6 である。

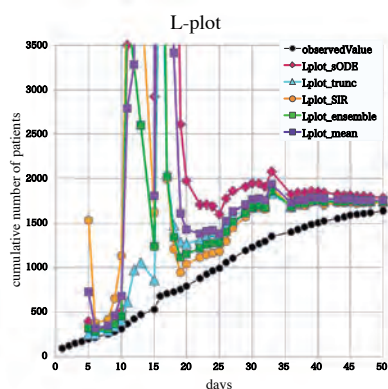
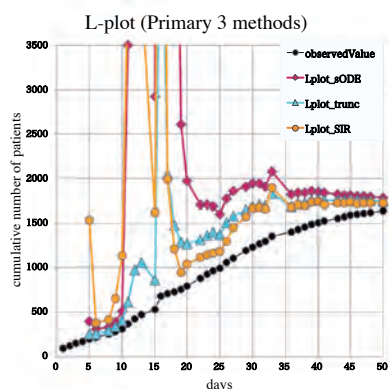


図 5: 3つの予測手法による L-plot 図 6: ensemble, mean を追加した L-plot

4.2 Decay Function Fitting

前掲の図 6 より，観測期間が長期になるにつれて，各手法の L-plot の値は実際の終息数の方へ集まっていく様子が見てとれる．これをトレンドと捉え，L-plot に対しカーブフィッティングを行うことで実際の終息値をより早期段階で得られるのではないかと考える．

フィッティングを行うための Decay Function を以下の式 (4.2) とする．ここで i は予測手法の ID を表し， a, b, c は定数である．各手法による L-plot に対して，よりよくフィッティングするような a, b, c を探索する．その際に用いる評価関数が式 (4.3) である．ここで \hat{R} は L-plot 値， \hat{R} は d_i の値を表す．つまりこの評価関数の値が最小となるような a, b, c を探索する．また，打ち切り時間から遠ざかるにつれて古い情報の影響力を小さくするために，式 (4.4) の形で重みを加味している．なお $p = 0$ の場合は，重みの影響はなくなる．

$$d_i(t; a, b, c) = c_i - b_i \exp(-a_i t), \quad (4.2)$$

$$S_p = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t w_t (\hat{R}(t) - \hat{R}(t))^2}, \quad (4.3)$$

$$w_t = \frac{(t/n)^p}{\sum^n (t/n)^p}. \quad (4.4)$$

図 7 に Decay Function Fitting の様子を示している．ある打ち切り時間 T までに得られている L-plot を用いて，カーブフィッティングを行う．式 (4.2) より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_i(t; a, b, c) \rightarrow c_i$$

となることから，Decay Function Fitting において c_i の値が予測手法 i の L-plot を用いた際の予測終息値に対応する値となる．図 8 および図 9 は，図 6 に対して Decay Function Fitting を行って得られた予測終息値 L-plot である．なお，それぞれ重み $p = 0, 1$ としている．

5 SARS 実データに対して PoP を適用したときの予測結果の評価

本研究では，感染の早期段階で最終終息値を予測できるのか考えている．ここから予測終息値を定量的に比較する指標として rRMSE を導入する．そして，SARS 感染拡大期間 88 日間のうち，

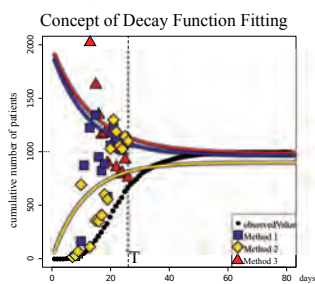


図 7: Decay Function Fitting のコンセプト

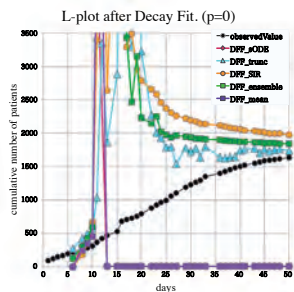


図 8: Decay Fitting 後の値による L-plot (重み 0)

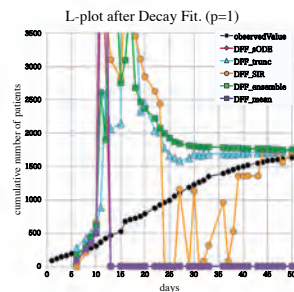


図 9: Decay Fitting 後の値による L-plot (重み 1)

初めの 20 日間に焦点を当てて比較を行う。

5.1 rRMSE

restricted RMSE の値は以下の式 (5.1) によって与えられる。

$$rRMSE(j) = \sqrt{\frac{1}{|\Delta_j|} \sum_{k \in \Delta_j} (\hat{W}_r(\infty|t_T = k) - W(\infty))^2}, \quad (5.1)$$

$$\hat{W}_r(\infty|t_T = k) = \min(\hat{W}(\infty|t_T = k), 2W(\infty)). \quad (5.2)$$

ここで $\hat{W}(\infty|t_T = k)$ は、打ち切り時間 k までのデータを使って算出した予測終息値であり、図 10 の上部に示すようにこの値が実際の最終終息値の 2 倍の値 $2W(\infty)$ を越えている場合には、算出値 $\hat{W}(\infty|t_T = k)$ の代わりに $2W(\infty)$ を評価に使用することとしている。つまり、 $rRMSE$ の上限値を $W(\infty)$ に制限している。また Δ_j および $|\Delta_j|$ は対象の期間とその日数を示している。

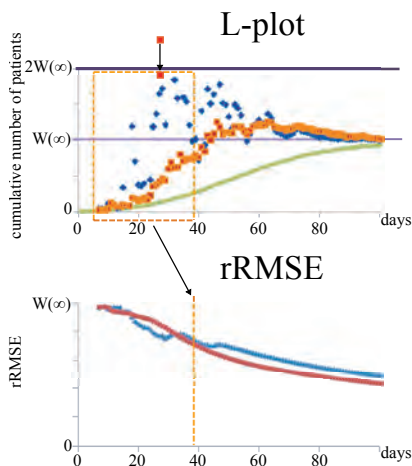


図 10: rRMSE の算出コンセプト図

5.2 予測結果の評価

上記の式より、各L-plotからrRMSEを算出する。図11がSIR, sODE, statistical truncated, ensembleとmeanによるL-plotから算出したrRMSE, 図12と図13が同じ5種のL-plotにそれぞれの重み付きDecay Function Fittingをして得られた予測終息値から算出したrRMSEである。本研究では、rRMSEの計算開始日を8日目としている。値が低ければ低いほど、実際の終息値に近い値を算出できていると判断できる。

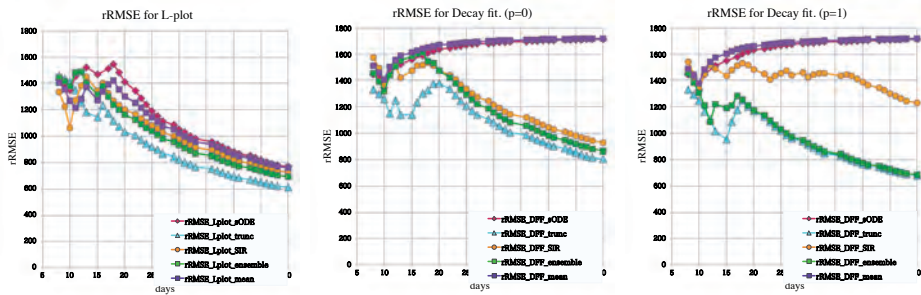


図 11: SIR, sODE, statistical truncated, ensemble, mean の rRMSE
 図 12: SIR, sODE, statistical truncated, ensemble, mean の Decay fit 後の rRMSE (重み 0)
 図 13: SIR, sODE, statistical truncated, ensemble, mean の Decay fit 後の rRMSE (重み 1)

図 11 から図 13 までの図を見ると、全体的に Decay Function Fitting の方が大きな値を算出している。これは Decay Function Fitting の性質として、打ち切り時間以前の予測結果を使用し続ける点に起因している。実際に sODE モデルでのパラメータ推定の際に、予測終息値として外れ値のような非常に大きな値を算出している日がある。通常の予測手法であれば以後の予測値算出に影響はないが、Decay Function Fitting の場合、それ以降も値をフィッティングに使用し続けるため、予測値算出に大きな影響が見られる結果となった。mean の Decay Fitting の結果も、mean の特性上外れ値を保持し続けるため、sODE の場合と同様の影響が見られた。

ここで、早期段階(観測開始日から 20 日目まで)に注目する。この期間では、手法によっては図 12 および図 13 の結果が図 11 の結果よりも rRMSE の値を低めに抑えられている傾向にあることが見てとれる。今回のケースでは、statistical truncated モデルによる予測は微分方程式モデルの予測に比べ予測値の傾向変化が少なかったため、Decay Function Fitting も良く適用できていたと考えられる。また ensemble においては多数決の原理により、ノイズのような予測値を排除できるため、mean のように外れ値の影響を受けにくい構造となっていることが分かった。

最後に、Decay Function Fitting の重みの効果について考察する。式(4.4)および式(4.3)より、重みの役割はより新しく算出された L-plot 値を重視するというものである。よって、重みによる予測値算出も元の L-plot の傾向変化の大小に依存すると言える。statistical truncated モデルや ensemble のように L-plot の傾向変化が少ないケースでは、重みを付加したほうが rRMSE の値を小さく抑えられるという結果が得られた。逆に SIR モデルや sODE モデル、mean など L-plot の傾向変化が大きめとなるケースでは、重みが原因で安定した Decay Function Fitting が行えないことも分かった。

6 結論

本研究は、感染症の罹患者数や機械の故障などのコンタクトモデルを対象に、できるだけ早い段階で最終規模を予測できるかについて考察した。このとき、より精度の良い予測を行うために詳細なモデリングを目指すのではなく、広く一般に知られている基本的な予測モデルを組み合わせることで予測精度向上に繋がるのかを考えた。まず、各予測手法に対してL-plotを行った。L-plotは、各打ち切り時間ごとに算出される予測終息値をその打ち切り時間上にプロットすることで、予測値の傾向を捉えやすくする表現方法である。本研究の表題ともなっている Prediction on Predictions, PoP は、このL-plotが基底となっている。

同一の打ち切り時間上には、用いる手法の数だけL-plotが存在する。ensemble methodはこれらのL-plotの多数決によって得られる値を新たなL-plotとして扱う方法である。ある手法によってまれに算出される外れ値のようなL-plotを排除できることが確認できた。

Decay Function Fittingは、同一の手法において見られるL-plotの時間傾向(トレンド)に着目した方法である。L-plotに対して指数関数をフィッティングすることで、一早く最終的な行き先(最終終息値)を捉えることを目標とした。フィッティングするL-plotのトレンドに結果は大きく左右されるが、ケースによってはrRMSEの値を小さく抑えられる可能性を示すことができた。

参考文献

- [1] R. Anderson and R. May, Infectious diseases of humans: Dynamics and control, Oxford University Press, 1991.
- [2] H. Hirose, The mixed truncated model with applications to SARS. Mathematics and Computers in Simulation, Vol.74, pp.443-453, 2007.
- [3] H. Hirose, Estimation of the number of failures in the Weibull model using the ordinary differential equation, European Journal of Operational Research, Vol.223, No.3, pp.722-731, 2012.
- [4] H. Hirose, Pandemic Simulations by MADE: A combination of Multi-agent and Differential Equations, with Novel Influenza A(H1N1), Information, Vol.16, No.7B, pp.5365-5390 (2013)
- [5] Hirose, H., 2005. The truncated model and its applications to lifetime analysis: unified censored and truncated models. IEEE Transactions on Reliability 54, 11-21.
- [6] Hirose, H., 2007. The mixed truncated model with applications to SARS. Mathematics and Computers in Simulation 74, 443-453.
- [7] Hirose, H., Matsukuma, K., Sakumura, T., 2010. Infectious disease spread prediction models and consideration. IPSJ SIG Technical Report 2010-MPS-81 15, 1-6.
- [8] H. Hirose: Estimation for the size of fragile population in the truncated and truncated models with application to the confidence interval for the case fatality ratio of SARS, Information, Vol.12, No.1, pp.33-50, 2009.
- [9] H. Hirose: The mixed truncated model with applications to SARS, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.72, No.6, pp.443-453 2007.
- [10] Kermack, W. O., McKendrick, A. G., 1933. Contributions to the mathematical theory of epidemics-iii. further studies of the problem of endemicity. Proceedings of the Royal Society 141A, 94-122.

- [11] C.A. Donnelly, et. al., Epidemiological determinants of spread of causal agent of severe acute respiratory syndrome in Hong Kong, *The Lancet*, Volume 361, Issue 9371, pp.1761-1766, 2003.
- [12] Nelder, J. A., Mead, R., 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal* 7, 308-313.
- [13] Y. Toyosaka, H. Hirose: The consistency of the pandemic simulations between the SEIR model and the MAS model, *IEICE Transactions on Fundamentals*, Vol.E92-A, No.7, pp.1558-1562 (2009)
- [14] H.Hirose, Y.Koyanagi: Prediction on Predictions by Ensemble Method, *Proceedings of The International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2014*, pp.1204-1208, 2014.
- [15] 廣瀬英雄, パンデミックの予測と統計学, *数学セミナー増刊 統計学ガイド*, 2014.8.
- [16] H. Hirose, M. Tokunaga, T. Sakumura, J. Sulaiman, H. Darwis, Matrix Approach for the Seasonal Infectious Disease Spread Prediction, *6th Asia-Pacific International Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM 2014)*, pp.137-144, 2014.
- [17] H. Hirose, "Some Methods to Predict Risks Earlier," *Ishigaki International Conference on Modern Statistics Theories, Practices, and Education in the 21st Century*, November 9 - 10, 2013.
- [18] 廣瀬, 豊坂, パンデミックシミュレーション, *日本信頼性学会誌*, Vol.33, No.6, pp.270-277 2009.
- [19] 廣瀬, 初期予兆データを用いた終息時の早期予測の可能性について, *久留米大学バイオ統計センター 10周年記念第 11 回久留米大学バイオ統計学フォーラム*, (平成 25.1.19)
- [20] 廣瀬, パンデミック解析と信頼性解析, *第 16 回情報・統計科学シンポジウム 特別講演*, (平成 23.12.9)
- [21] 廣瀬: パンデミックシミュレーションの信頼性, *日本信頼性学会フォーラム 2009 年度第 1 回フォーラム「医療の信頼性・安全性」- 安心につながる医療に向けて-* (2010.2.19)