# 入出力観測雑音がある場合のシステム同定法について

眺，虹
九州大学大学院システム情報科学府電気電子システム工学専攻 ： 博士後期課程

金江，春植
九州大学大学院システム情報科学研究院電気電子システム工学部門

楊，子江
九州大学大学院システム情報科学研究院電気電子システム工学部門

和田，清
九州大学大学院システム情報科学研究院電気電子システム工学部門

https://doi.org/10.15017/1516231

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 11 (1), pp.51-55, 2006-03-24. 九州大学大学院システム情報科学研究院
バージョン：
権利関係：

九州大学大学院
システム情報科学紀要
第11巻 第1号 平成18年3月

Research Reports on Information Science and
Electrical Engineering of Kyushu University
Vol.11, No.1, March 2006

# 入出力観測雑音がある場合のシステム同定法について

姚 虹* ・ 金江 春植**・ 楊 子江**・ 和田 清**

# A Note on the System Identification in the Presence of Input and Output Noises

Hong YAO, Shunshoku KANAE, Zi-Jiang YANG and Kiyoshi WADA

(Received December 9, 2005)

**Abstract:** A Dynamic Total Least Squares (DTLS) method can be applied to system identification in the presence of input and output noises. The DTLS problem is a special case of a Structured total least squares (STLS) problem that is an extension of the TLS problem and reduces to nonlinear singular value decomposition (SVD). In this paper, we discuss DTLS method to derive the relationship between TLS method and DTLS method under the input and output observation noise condition.

**Keywords:** System identification, Total least squares, Structured TLS, Dynamic TLS, Nonlinear SVD

## 1. はじめに

最近出力ばかりでなく入力にも観測雑音がある場合に対するパルス伝達関数のパラメータの一致推定[1),2),3)]が再び関心を集めている．筆者らは，入出力に観測雑音がある場合にバイアス補償最小2乗法を拡張するため，入出力観測雑音の分散を共に推定するアルゴリズムを提案しこれをバイアス補償最小2乗アルゴリズムと組合わせることにより一致推定値が得られることを示した[3)]．また，Total Least-Squares(TLS) 法による推定値と Koopmans-Levin の固有値法による推定値との関係について理論的に検討し，シミュレーションによって TLS 推定値とバイアス補償最小2乗推定値の漸近的な性質を検討した[4)]．

他の一致推定法として，De Moor によって提案された DTLS (dynamic total least squares) 法がある[5)]．この方法は構造化 TLS(structured total least squares) 法[6)]に属するものであり，非線形特異値問題に帰着する．この非線形特異値問題を解くためのアルゴリズムとして，現在，逆反復 (Inverse iteration) 法や RiSVD(Riemannian singular value decomposition) 法などが提案されているが[6)]，筆者らは，これらの2種のアルゴリズムの数値的な比較検討を行い[7)]，また非線形特異値問題を近似的に解くアルゴリズムとして IQML-like アルゴリズムを提案した[8)]．

しかしながら，入出力観測雑音がある場合のDTLS法についての検討は十分ではなく，特に TLS 法と DTLS 法との関係が明確ではなかった．そこで，本稿では，TLS 法を DTLS 法の近似として導くことにより，入出力観測雑音がある場合の TLS 法と DTLS 法との関係を明らかにする．

## 2. 問題の設定

観測される入力 $w_k$ と出力 $z_k$ ともに観測雑音が付加されている場合を考える．

$$y_k^0 = \frac{b^0(z^{-1})}{a^0(z^{-1})} u_k^0 \tag{1}$$

$$z_k = y_k^0 + e_k, \quad w_k = u_k^0 + d_k \tag{2}$$

ここで，$u_k^0$ はシステムの入力，$y_k^0$ はシステムの出力，$e_k$, $d_k$ はそれぞれ出力観測雑音，入力観測雑音であり，$a^0(z^{-1})$, $b^0(z^{-1})$ はシフト演算子 $z^{-1}$ の多項式で，それぞれ

$$a^0(z^{-1}) \triangleq 1 + a_1^0 z^{-1} + \cdots + a_n^0 z^{-n} \tag{3}$$

$$b^0(z^{-1}) \triangleq b_0^0 + b_1^0 z^{-1} + \cdots + b_n^0 z^{-n} \tag{4}$$

である．また

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[e_k] &= 0\ , \mathrm{E}[e_j e_k] = \sigma_{\mathrm{e}}^2\, \delta_{jk} \\ \mathrm{E}[d_k] &= 0\ , \mathrm{E}[d_j d_k] = \sigma_{\mathrm{d}}^2\, \delta_{jk} \\ \mathrm{E}[d_j e_k] &= 0\ , \text{for all } j,\ k \end{aligned}$$

であり，入力 $u_k$ は $e_k, d_k$ と無相関で，平均値 0 分散が有限の定常確率過程である．ここで，$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである．

問題は，$a^0(z^{-1})$, $b^0(z^{-1})$ の未知パラメータの一致推定値を求めることである．

## 3. モデルの表現

同定対象のモデルのパルス伝達関数を

平成17年12月9日受付

* 電気電子システム工学専攻博士後期課程
** 電気電子システム工学部門

$$H(z^{-1}) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} \tag{5}$$

とする．ここで，多項式 $a(z^{-1})$，$b(z^{-1})$ は

$$a(z^{-1}) \triangleq a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$
$$b(z^{-1}) \triangleq b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}$$

である．すなわちモデルの入力 $u_k$ と出力 $y_k$ の間に

$$a(z^{-1}) y_k = b(z^{-1}) u_k$$

なる関係を想定する．この関係を差分方程式の形で表せば

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} b_i u_{k-i}, \quad k = n, n+1, \ldots, N \tag{6}$$

である．以下での議論の便利のためにモデルの出力および入力からなるベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{y} = [y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_N]^T, \quad \boldsymbol{u} = [u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_N]^T$$

と定義し，シフト行列

$$S \triangleq \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix};\ (N+1) \times (N+1)$$

を用いて$(N+1) \times (n+1)$行列$Y$，$U$を

$$Y = [\boldsymbol{y}\ S\boldsymbol{y}\ \cdots\ S^n \boldsymbol{y}], \quad U = [\boldsymbol{u}\ S\boldsymbol{u}\ \cdots\ S^n \boldsymbol{u}]$$

と定義する．さらにモデルのパラメータからなるベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{a} \triangleq [a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n]^T, \quad \boldsymbol{b} \triangleq [b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_n]^T$$

と定義すると

$$Y\boldsymbol{a} = a_0 \boldsymbol{y} + a_1 S\boldsymbol{y} + \cdots + a_n S^n \boldsymbol{y} = a(S)\boldsymbol{y}$$

であること，同様にして$U\boldsymbol{b} = b(S)\boldsymbol{u}$ であることが分かる．したがって，$Y$，$U$ および $a(S)$，$b(S)$ を

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdots \\ Y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdots \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix}$$

$$a(S) = \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix}, \quad b(S) = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdots \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix}$$

のように分割すると

$$Y_2 \boldsymbol{a} = A_2 \boldsymbol{y}, \quad U_2 \boldsymbol{b} = B_2 \boldsymbol{u} \tag{7}$$

であり，(6) 式より

$$\left[-Y_2 : U_2\right] \boldsymbol{\varphi} = \left[-A_2 : B_2\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \mathbf{o} \tag{8}$$

であることがわかる．ここで

$$\boldsymbol{\varphi} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

## 4. DTLS 法

入出力観測値$\{z_k,\ w_k\}$を用いて，ベクトル

$$\boldsymbol{z} = [z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_N]^T$$
$$\boldsymbol{w} = [w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_N]^T$$

を定義し，行列

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \cdots \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix} = [\boldsymbol{z}\ S\boldsymbol{z}\ \cdots\ S^n \boldsymbol{z}]$$
$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \cdots \\ W_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \\ \}N-n+1 \end{matrix} = [\boldsymbol{w}\ S\boldsymbol{w}\ \cdots\ S^n \boldsymbol{w}]$$

を定義すると，$Z_2 \boldsymbol{a} = A_2 \boldsymbol{z}$ および $W_2 \boldsymbol{b} = B_2 \boldsymbol{w}$ を得る．そこで式誤差 $\xi_k = a(z^{-1}) z_k - b(z^{-1}) w_k$ からなるベクトルを

$$\boldsymbol{\xi}_2 \triangleq [\xi_n,\ \xi_{n+1},\ \cdots,\ \xi_N]^T$$

と定義すると

$$\boldsymbol{\xi}_2 = -\left[-A_2 : B_2\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = -\left[-Z_2 : W_2\right] \boldsymbol{\varphi} \tag{9}$$

であることが分かる．

$Z_2$，$W_2$，$Y_2$ および $U_2$ はすべて $(N-n+1)\times(n+1)$ 基底行列 $F_i$ によって

$$Z_2=\sum_{i=0}^{N} z_iF_i,\quad W_2=\sum_{i=0}^{N} w_iF_i$$
$$Y_2=\sum_{i=0}^{N} y_iF_i,\quad U_2=\sum_{i=0}^{N} u_iF_i$$

と表されるので，

入出力観測値からなる行列$\left[-Z_2:W_2\right]$を同じ構造を持つモデルの入出力からなる行列$\left[-Y_2:U_2\right]$で近似する問題，すなわち(8)式の$\left[-Y_2:U_2\right]\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{o}$ なる制約条件のもとでの

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}(z_i-y_i)^2h_i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}(w_i-u_i)^2g_i \tag{10}$$

の最小化問題を考える[6]．ここで，$h_i$，$g_i$は正の重みである．重み行列$H$および$G$を

$$H=\mathrm{diag}[h_0,\ h_1,\ \cdots,\ h_N],\quad G=\mathrm{diag}[g_0,\ g_1,\ \cdots,\ g_N]$$

と置けば，(10)式は

$$J=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^TH(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})^TG(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})$$

のように表される．

DTLS推定法は

$$J^{\mathrm{DTLS}}=J+\boldsymbol{l}^T\left[-Y_2:U_2\right]\boldsymbol{\varphi}$$

なる評価関数を最小化することよりパラメータの推定値をもとめる手法である[5]．ここで，$\boldsymbol{l}$ はラグランジュ乗数ベクトルである．よって，$J^{\mathrm{DTLS}}$ を $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{\varphi}$ および $\boldsymbol{l}$ で偏微分してそれらの結果を 0 とすると

$$\begin{bmatrix} H & O\\ O & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A_2^T\\ B_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{l} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}-Y_2^T\\ U_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{l}=\mathbf{o} \tag{12}$$

$$\left[-Y_2:U_2\right]\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{o} \tag{13}$$

を得る．(11)式より

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H & O\\ O & G\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-A_2^T\\ B_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{l} \tag{14}$$

であるので，この式の両辺に前から$\left[-A_2:B_2\right]$をかけると

$$\left[-A_2:B_2\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\left[-A_2:B_2\right]\begin{bmatrix} H & O\\ O & G\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-A_2^T\\ B_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{l}$$

となり，$D_\varphi$を

$$D_\varphi=\left[-A_2:B_2\right]\begin{bmatrix} H^{-1} & O\\ O & G^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-A_2^T\\ B_2^T\end{bmatrix}$$

とおけば

$$\left[-A_2:B_2\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=D_\varphi\boldsymbol{l} \tag{15}$$

が得られる．この式と(11)式より，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{u}$および$\boldsymbol{l}$についての$J^{\mathrm{DTLS}}$の最小値は

$$J_*^{\mathrm{DTLS}}=\left[(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^T\ (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})^T\right]\begin{bmatrix}-A_2^T\\ B_2^T\end{bmatrix}\times D_\varphi^{-1}\left[-A_2:B_2\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\end{bmatrix}$$

であり，(8)式および(9)式より

$$J_*^{\mathrm{DTLS}}=\boldsymbol{\xi}_2^TD_\varphi^{-1}\boldsymbol{\xi}_2 \tag{16}$$

であることが分かる．

一方，$(N+1)$次元ベクトル

$$\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n\\ \}N-n+1\end{matrix}$$

を用いて，行列$L$を

$$L^T=\left[\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix},\ S^T\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix},\ \cdots,\ (S^T)^n\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix}\right]$$

と定義すると

$$L^T\boldsymbol{a}=a(S)^T\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix}=A_2^T\boldsymbol{l}$$

$$L^T\boldsymbol{b}=b(S)^T\begin{bmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{l}\end{bmatrix}=B_2^T\boldsymbol{l}$$

であり，(14)式より

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & O \\ O & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L^T & O \\ O & L^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}$$

であることが分かる．また

$$Z-Y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} & S(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) & \cdots & S^n(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) \end{bmatrix}$$

$$W-U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u} & S(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}) & \cdots & S^n(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & \boldsymbol{l}^T \end{bmatrix} (Z-Y) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & \boldsymbol{l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} & S(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) & \cdots & S^n(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix}, S^T \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix}, \cdots, (S^T)^n \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix} \right] \\ &= (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^T L^T \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & \boldsymbol{l}^T \end{bmatrix} (W-U) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & \boldsymbol{l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u} & S(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}) & \cdots & S^n(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix}, S^T \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix}, \cdots, (S^T)^n \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{l} \end{bmatrix} \right] \\ &= (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})^T L^T \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & \boldsymbol{l}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(Z-Y) : W-U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})^T L^T : (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})^T L^T \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varphi}^T \begin{bmatrix} LH^{-1}L^T & O \\ O & LG^{-1}L^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

であり，(12)式を考慮すると

$$\begin{bmatrix} -Z_2^T \\ W_2^T \end{bmatrix} \boldsymbol{l} = D_l \boldsymbol{\varphi} \tag{18}$$

を得る．ここで

$$D_l = \begin{bmatrix} LH^{-1}L^T & O \\ O & LG^{-1}L^T \end{bmatrix}$$

である．(8)，(9)式および(15)式より得られる

$$\begin{bmatrix} -Z_2 : W_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} = D_\varphi \boldsymbol{l} \tag{19}$$

とともに，パラメータ推定問題が非線形特異値問題[6]となることが分かる（6節参照）．

## 5. IQML-likeアルゴリズム

$\boldsymbol{\theta}$ を

$$\boldsymbol{\varphi} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}1 \\ \}2n+1 \end{matrix}$$

と置き，$\begin{bmatrix} -Z_2 : W_2 \end{bmatrix}$を

$$\begin{bmatrix} -Z_2 : W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{z}_2 : \Omega \end{bmatrix}$$

と分割すると，(9) 式の $\boldsymbol{\xi}_2$ は

$$\boldsymbol{\xi}_2 = a_0(\boldsymbol{z}_2 - \Omega\boldsymbol{\theta})$$

と書け，これを (16) 式に代入すると

$$J^{\mathrm{DTLS}} = (\boldsymbol{z}_2 - \Omega\boldsymbol{\theta})^T D_\theta^{-1} (\boldsymbol{z}_2 - \Omega\boldsymbol{\theta})$$

を得る．ここで，$D_\theta$ は$D_\varphi = a_0^2 D_\theta$ である．$D_\theta$ を $\boldsymbol{\theta}$ に依存しない定数と見なすと，$J^{\mathrm{DTLS}}$ を最小にする $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\Omega^T D_\theta^{-1} \Omega\right)^{-1} \Omega^T D_\theta^{-1} \boldsymbol{z}_2 \tag{20}$$

で与えられる．そこで，$J^{\mathrm{DTLS}}$ を反復計算により最小化することにより推定値を求める方法として，以下のような方法が考えられる[7]．

1. $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{[k-1]}$を用いて，重み行列$D_\theta^{[k-1]}$を求める．
2. $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{[k]} = \left(\Omega^T D_\theta^{[k-1]^{-1}} \Omega\right)^{-1} \Omega^T D_\theta^{[k-1]^{-1}} \boldsymbol{z}_2$
3. $\epsilon_m$を計算機エプシロン(machine epsilon)とするとき$\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{[k]} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{[k-1]}\| < \epsilon_m$ならば，反復計算を終了する．そうでなければ，1に戻る．

## 6. 非線形特異値問題

便利のために$C = \begin{bmatrix} -Z_2 : W_2 \end{bmatrix}$とおくと，(19) と (18) 式は

$$C\boldsymbol{\varphi} = D_\varphi \boldsymbol{l}$$
$$C^T \boldsymbol{l} = D_l \boldsymbol{\varphi}$$

のように表される．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ とおき

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_a \\ \boldsymbol{v}_b \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ n+1 \\ \}\ n+1 \end{matrix}$$

と分割すると，$D_\varphi$ は定義より

$$D_\varphi = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\begin{bmatrix} -V_{a2} & V_{b2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H^{-1} & O \\ O & G^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -V_{a2}^T \\ V_{b2}^T \end{bmatrix}$$

と表される．ここで，$V_{a2}$，$V_{b2}$ はそれぞれ $\boldsymbol{v}_a$，$\boldsymbol{v}_b$ から $A_2$，$B_2$ と同様に構成される行列である．さらに，ベクトル $\boldsymbol{p}$を$\boldsymbol{l} = \tau\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{p}$ とおけば

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{v} &= \tau D_v \boldsymbol{p} \\ C^T\boldsymbol{p} &= \tau D_p \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

なる非特異値問題を得る．ここで

$$D_v = \begin{bmatrix} -V_{a2} & V_{b2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H^{-1} & O \\ O & G^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -V_{a2}^T \\ V_{b2}^T \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} PH^{-1}P^T & O \\ O & PG^{-1}P^T \end{bmatrix}$$

であり，$P$ は $\boldsymbol{p}$ から $L$ と同様に構成される行列である．

## 7. $h_i = 1/\sigma_{\mathrm{e}}^2$，$g_i = 1/\sigma_{\mathrm{d}}^2$ の場合

$H^{-1} = \sigma_{\mathrm{e}}^2 I$，$G^{-1} = \sigma_{\mathrm{d}}^2 I$であるので

$$D_\varphi = \begin{bmatrix} -A_2 : B_2 \end{bmatrix}\Lambda(\sigma_{\mathrm{e}}^2, \sigma_{\mathrm{d}}^2)\begin{bmatrix} -A_2^T \\ B_2^T \end{bmatrix}$$

であることが分かる．ここで

$$\Lambda(\sigma_{\mathrm{e}}^2, \sigma_{\mathrm{d}}^2) = \left(\begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{e}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{d}}^2 \end{bmatrix} \otimes I\right)$$

である．行列$D_\varphi$の対角要素は$\boldsymbol{\varphi}^T\Lambda(\sigma_{\mathrm{e}}^2, \sigma_{\mathrm{d}}^2)\boldsymbol{\varphi}$ であるので，$D_\varphi$を$D_\varphi \approx \boldsymbol{\varphi}^T\Lambda(\sigma_{\mathrm{e}}^2, \sigma_{\mathrm{d}}^2)\boldsymbol{\varphi} I$ と近似すると，(16)式は(9)式より

$$J_*^{\mathrm{DTLS}} \approx \frac{\boldsymbol{\varphi}^T\Phi\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\Lambda(\sigma_{\mathrm{e}}^2, \sigma_{\mathrm{d}}^2)\boldsymbol{\varphi}}$$

と近似される．ここで

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Z_2^T \\ W_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -Z_2 : W_2 \end{bmatrix}$$

この近似評価を最小にする推定値を求める方法はTLS法として知られている．

## 8. おわりに

TLS 法と DTLS 法は異なった問題設定のもとで議論されてきたので，これまで両者の関係が明確ではなかった．本稿では，TLS 法を DTLS 法の近似として導くことより，TLS 法と DTLS 法との関係を明らかにした．このことにより，DTLS 問題の近似解法としての IQML-like アルゴリズムがTLS問題にも適用可能であることが分かるので，この場合の IQML-like アルゴリズムの有効性を検証することが今後の課題である．

## 参 考 文 献


1) T. Soderstrom: Identification of stochastic linear systems in presence of input noise; Automatica, Vol.17,No.5 713/725(1981)
2) K.V. Fernando, and H. Nicholson: Identification of linear systems with input and output noise: the Koopmans-Levin method; IEE Proc.D,Control Theory and Application,132 30/36(1985)
3) 和田清，江口三代一: 入出力観測雑音がある場合のバイアス補償最小 2 乗法によるパルス伝達関数の推定, 第9回 DST シンポジウム予稿集, 315/318(1986)
4) K.Wada,M.Eguchi and S.Sagara: TLS Method for Pulse Transfer Function Estimation in the Presence of Input and Output Noise; Proc. of 10th IFAC Symposium on System Identificaton ,Copenhagen, Vol. 2, 625/629(1994)
5) B. De Moor: Dynamic Total Linear Least Squares; Proc. of 10th IFAC Symposium on System Identification, Copenhagen, Vol. 3, 159/164(1994)
6) B. De Moor: Structured Total Least Squares and $L_2$ Approximaton Problem; Linear Algebra and its Applications, Vol.188-189, 163/207(1993)
7) 姚，池之上，金江，楊，和田: DTLS 法における逆反復アルゴリズムと RiSVD アルゴリズムの比較, 第 33 回制御理論シンポジウム予稿集, 315/318(2004)
8) H. Yao, M. Ikenoue, S. Kanae, Z.-J. Yang, and K. Wada: IQML-like Algorithm and Inverse Iteration Algorithm in Dynamic System Identification; SIP'05 Proceedings, 204/209(2005)