線形・非線形ロバスト制御理論を用いたデルタシグマ変調器の設計手法

喜田, 健司

https://doi.org/10.15017/1500737

出版情報：Kyushu University, 2014, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン：

線形・非線形ロバスト制御理論を用いたデルタシグマ変調器の設計手法

Design approach of Delta-Sigma Modulator based on linear and nonlinear robust control theory

喜田　健司
Kenji Kita

2015 年 3 月

目次

第 1 章

序論

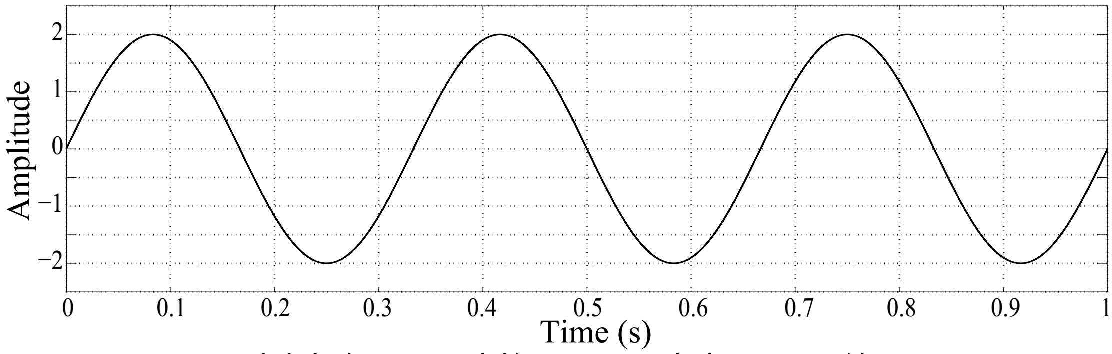
1.1　研究の背景

1.1.1　アナログ信号とデジタル信号

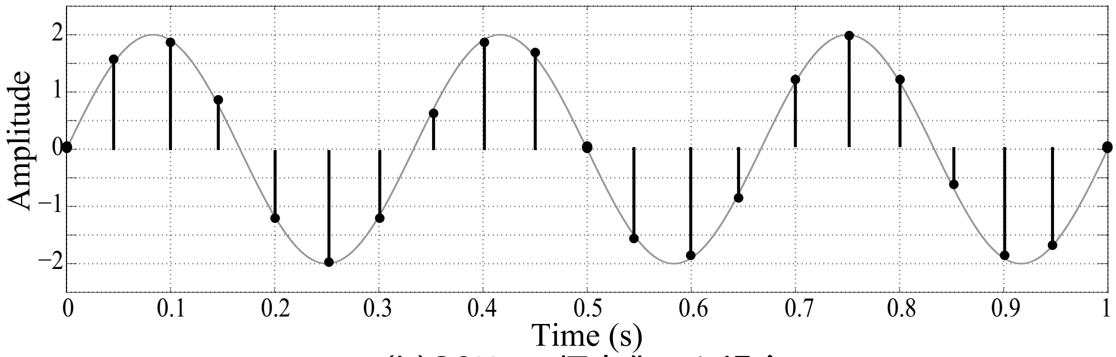
自然界に存在する信号，例えば会話のときには音声，日常風景を見ているときには映像情報や画像情報，その他地震の波や，脳波などの情報はアナログ信号である。しかしながら，アナログ信号を近年急速に進化しているコンピュータで演算することはできない。そのため，コンピュータで演算できるようにアナログ信号をデジタル信号に変換する必要がある。このアナログ信号をデジタル信号に変換することをアナログーデジタル変換（A-D 変換）と言い，一般的には音声も映像もマルチビット方法による A-D 変換器によってデジタル信号に変換される。

1.1.2　A-D 変換の方法と量子化雑音

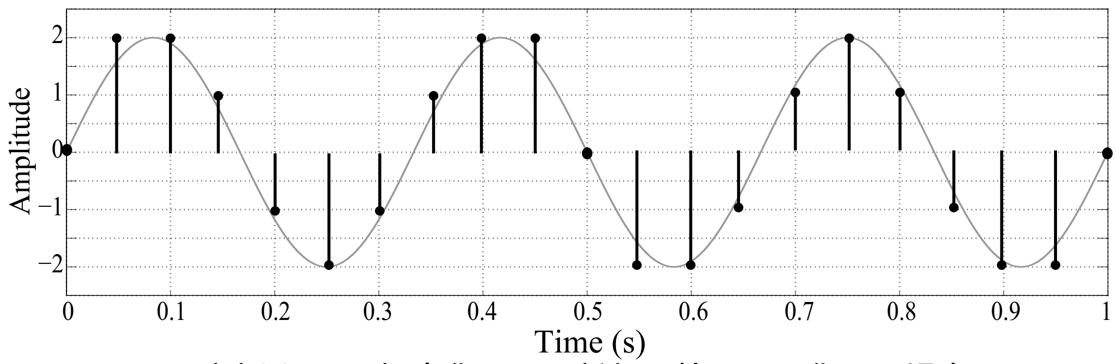
アナログ信号をデジタル化するためには，標本化と量子化を行う必要がある。専門書 (例えば [1–3]) や文献 [4] を参考文献として，ここでは簡単な例を示しながら説明を行うことにする。まずは，標本化について簡単に述べる。標本化はサンプリング (sampling) とも呼ばれ，信号を離散的な間隔で抽出する操作のことである。Fig. 1.1(a) は，周波数 3Hz，振幅 2 の正弦波アナログ信号である。このアナログ信号をサンプリング周波数 20Hz で標本化すると，Fig. 1.1(b) の黒丸のような時間は離散であるが振幅はアナログ値であり有限な桁で数値化することができない信号となる。この状態はサンプル値信号と呼ばれる。さらに Fig. 1.1(b) の状態から振幅を [-2,-1,0.1,2] の５種類の値のみで表すことを考えてみる。この５種類の値は３ビットの２進数で表現することが可能である。しかし，サンプル値は５種類の値と等しいとは限らず，当てはめるには５種類の値からもっとも近い値を選ぶことになる。このように連続信号である振幅を有限な桁数の２進数で表せるように変換する操作を量子化といい，Fig. 1.1(b) を量子化すると Fig. 1.1(c) の黒丸のようになる。この量子化された値と元のサンプル値は若干の誤差が生じることになる。この誤差を量子化誤差といい，Fig. 1.1(d) に量子化誤差の様子を示す。



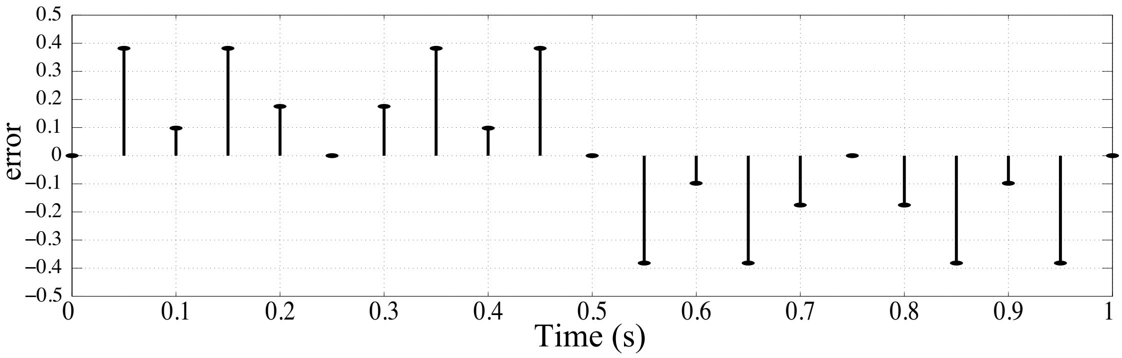
(a) 振幅2，周波数3Hzの正弦波アナログ信号



(b)20Hz で標本化した場合



(c)20Hz で標本化し，５種類の値で量子化した場合



(d) 量子化誤差

Fig. 1.1: 標本化と量子化

量子化誤差は量子化ステップ幅を Δ とすると $-\Delta/2$ と $\Delta/2$ の間の値をとることになる。量子化誤差を小さくするためには量子化ステップ幅を小さくすれば良いことになる。量子化ステップ幅 Δ が十分に小さいか，もしくは的確なディザが加算・減算されている場合には，量子化誤差は信号全体で見ると，入力信号と無相関な白色雑音となり，これを量子化雑音と呼ぶ。量子化雑音電力は量子化ステップ幅 Δ とサンプリング周波数 f_s に関係があり，0 から $f_s/2$ の量子化雑音電力は $\Delta^2/12$ となる。信号周波数帯域内で量子化雑音を減らし信号対雑音比（SNR:Signal-to-Noise Ratio）をあげるためには，量子化ステップ幅 Δ を小さくして，つまり量子化ビット数を増やして量子化する方法や，サンプリング周波数より高い周波数で標本化して量子化雑音電力は同じまま，信号対周波数帯域内の量子化雑音レベルを下げるオーバーサンプリング方式と呼ばれる方法，さらには，両方を組み合わせるなどの方法が考えられる。

Fig. 1.2 に A-D 変換の方式についての構成を，Fig. 1.3 に A-D 変換の方法の違いによる量子化雑音の違いや SNR の違いについて示した。Fig. 1.2(a) は信号帯域が 20kHz まであるアナログ信号をサンプリング周波数 48kHz，量子化ビット数 16bit でデジタル化するときの構成であり，この構成をここでは基本方式と呼ぶことにする。Fig. 1.3(a) は Fig. 1.2(a) の基本方式のときの周波数スペクトルの例である。白い四角で囲われた枠の部分に必要な信号があり，それを取り出すためには，赤色で示した高次の急峻なローパスフィルタが必要である。灰色の量子化雑音成分と白色の枠の最大信号レベルとの差が SNR となる。次に Fig. 1.3(b) はオーバーサンプリング方式を用いて，(a) のサンプリング周波数 48kHz に対して，4 倍の 192kHz でサンプリングした場合の例である。この場合，量子化雑音電力は Fig. 1.3(a) の場合と同じであるが，サンプリング周波数を 4 倍にしたために，量子化雑音を高域まで広げることができ，信号周波数帯域での量子化雑音レベルが下がっていることがわかる。この結果，SNR は Fig. 1.3(a) の基本方式よりも大きくなりダイナミックレンジが広くなる。さらに白い枠で囲まれた必要な信号を取り出すために，青色で示した低次のローパスフィルタに基本方式から置き換えることができる。また，Fig. 1.3(a) のときと同等の SNR で十分な場合は，量子化ビット数を減らすことができる。Fig. 1.3(c) はオーバーサンプリング方式の一つであるデルタシグマ変調方式で，Fig. 1.3(b) と同じように 192kHz でサンプリングした様子である。デルタシグマ変調については２章で詳しく説明するが，その特徴は量子化器をフィードバックシステム内に組み込み，ループフィルタで量子化雑音に高域上がりの特徴を持たせ，信号周波数帯域内の量子化雑音電力を小さくすることができることである。しかし，量子化雑音電力はループフィルタの次数を上げていくことで増大していく。また，量子化された出力信号を D-A 変換すること無く，スピーカーが持つローパスフィルタ特性のみでアナログ信号が再生可能であるという特徴を持つ。Fig. 1.3(c) を見ると，信号周波数帯域での SNR は高くなり，信号周波数帯域外の高域に押し上げられた量子化雑音の総電力は増大している。デルタシグマ変調方式も量子化ビット数を抑え SNR が確保できる技術であり，一般的には 1 bit 量子化器が用いられることが多い。

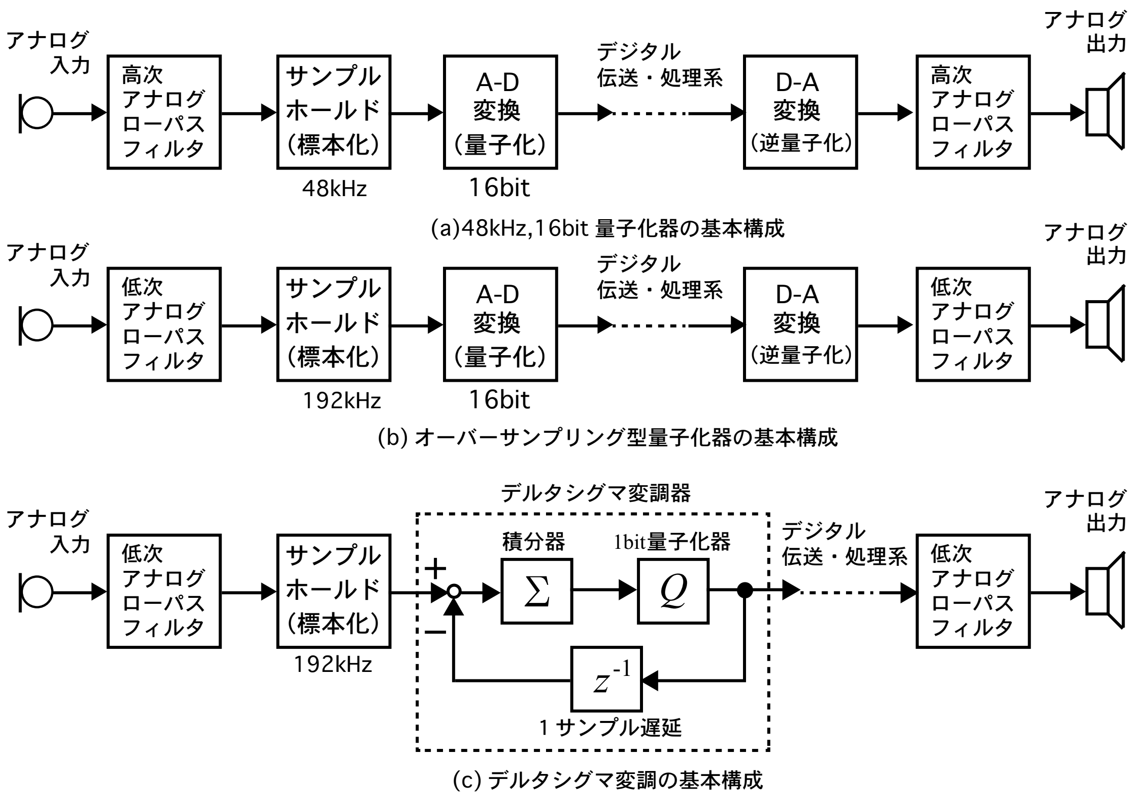


Fig. 1.2: 各変換方式の基本構成

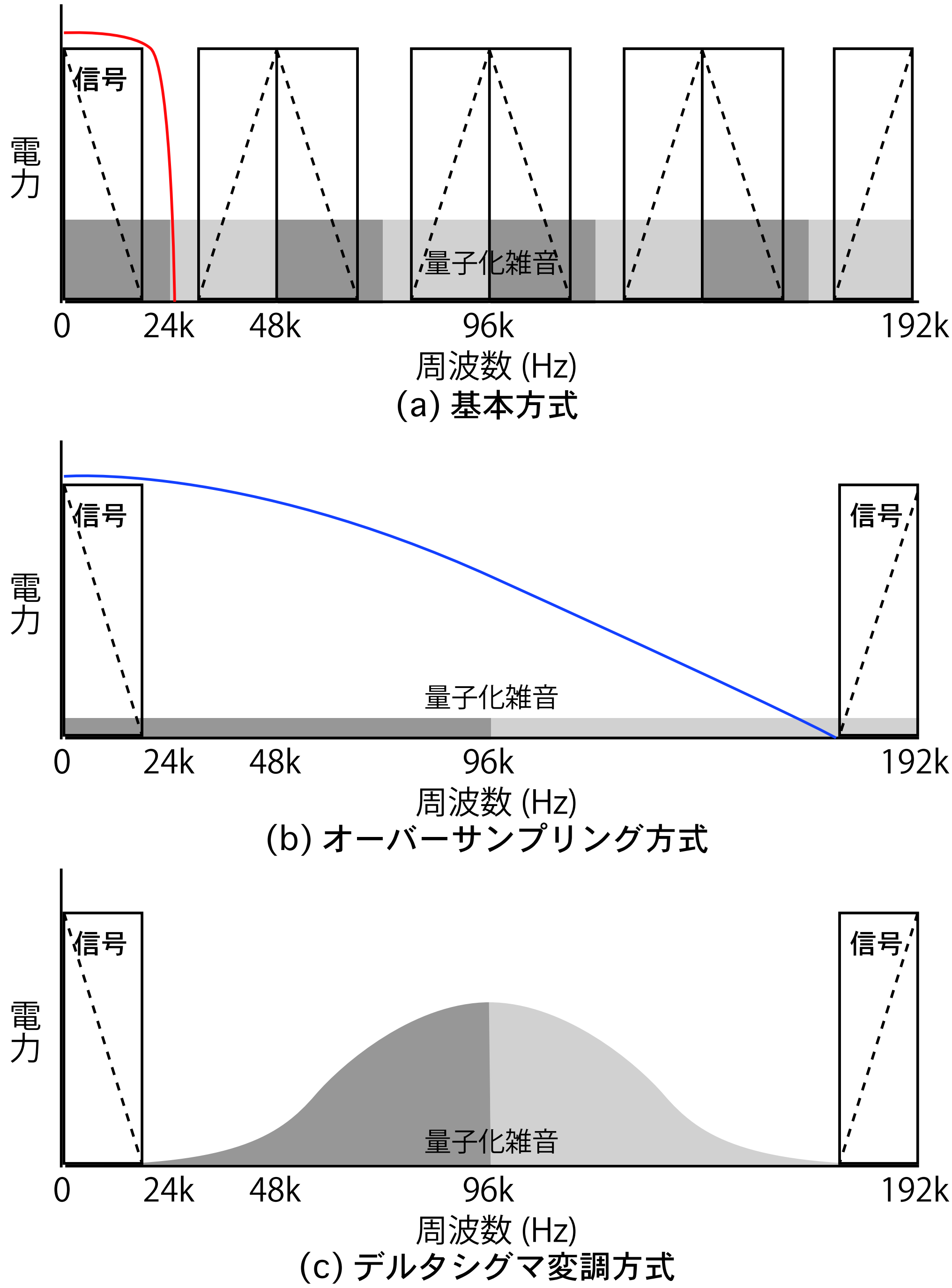


Fig. 1.3: 変換方式と周波数スペクトル

1.2 本研究の目的

デルタシグマ変調器は実際のハードウェアを構築するときに，回路素子が少なくて良いことやその精度に対する要求が緩和されること，さらにはデータ通信 [5]，バンドパス型デルタシグマ変調器を利用した無線通信 [6] など応用範囲が広いため研究が盛んに行われている。その中でも，デルタシグマ変調方式を用いて音響信号を A-D 変換し記録することは，近年の CD 音質を超えるハイレゾリューション音源 [7] の普及によって身近な技術となってきている。

ところで，現在，音響信号を A-D 変換する際に主に使用されているデルタシグマ変調器のループフィルタの次数は５次程度である。そのループフィルタの次数を５次以上，例えば１０次を超えるような高次のループフィルタを適用することで，信号周波数帯域における量子化雑音を減少させることが可能であり SNR を高くすることができる。しかし，デルタシグマ変調器はその構造上フィードバック系であることから，ループフィルタの高次化に伴いシステムの安定性を確保することが困難になる。デルタシグマ変調器の安定性に関する研究の中で「リーの基準 [8, 9]」は，数多くのシミュレーション結果によって導かれたデルタシグマ変調器が安定に動作するための経験則に基づいた基準であり，簡明性により広く利用されている。しかし，リーの基準は必要条件でも十分条件でもない基準である。

デルタシグマ変調器のループフィルタの設計に関して，その設計を困難にしているのは強い非線形特性をもつ１ビット量子化器である。１ビット量子化器をそれへの入力信号の統計値に基づいた線形利得と量子化雑音によって近似し，線形システムとして解析，設計する手法が一般的に用いられている。ループフィルタを設計するためのツールとして，MATLAB の synthesizeNTF 関数 [10] があり，使用目的に応じた設計パラメータを入力することで雑音伝達関数を設計できる。この synthesizeNTF 関数の設計法は，雑音伝達関数を振幅の２乗を信号帯域にわたって積分し，その量子化雑音電力が最小となるように零点の配置を調節したものである。極の配置に関しては選択肢が広く，信号帯域での信号伝達関数関数が１となり，なおかつ雑音伝達関数が安定になるような極を選択しているにとどまっており，synthesizeNTF 関数で設計される極零点配置が最適なものとは限らない。

このように，デルタシグマ変調器のループフィルタの設計に関しては多くの問題点が存在するがその設計の困難さからループフィルタそのものの設計手法に関する研究は進んでおらず，それよりも，量子化器のマルチビット化 [11, 12]，量子化雑音を打ち消すようにループフィルタ接続する多段変調器に代表されるデルタシグマ変調器を構成するトポロジーの研究 [13, 14] や実回路における回路素子に関する研究 [15, 16] が多くなされている現状である。

そこで，本研究では，経験的，実験的シミュレーションを行うことなく簡単にデルタシグマ変調器のループフィルタの設計でき，かつ，１０次を超える高次ループフィルタの実現を目的とし，さらにはトポロジーを改善し入力振幅に対する安定性を高めることを目的とする。試行錯誤することなく設計するために，本論文ではロバスト制御理論をループフィルタの設計に適用し，制御理論に立脚した設計方法を提案する。次に，ループフィルタの高次化に関しては，ループフィルタの次数を現在一般的に使用されている５次でありそれ以上の次数の設計例は多く見られない。そこで，本

論文では１０次を超えるループフィルタの設計を試みる。これによって信号帯域周波数で今まで以上に SNR を確保することが可能となる。また，トポロジーを改善し入力振幅に対する安定性を高めることで，大きな入力振幅をデルタシグマ変調器に入力できるようになる。このことは実際のデルタシグマ変調器のアナログ回路で混入するノイズを考えると，大きな電圧値で入力信号を正規化でき，デルタシグマ変調器を用いた A-D 変換において SNR が高くなり有利である。さらに，デルタシグマ変調を用いた Digital-Digital 変換（D-D 変換），データ圧縮，ロスレス圧縮においても SNR が向上し有利になる。

これらの目的を達成するために以下に示す手法を本論文では提案する。

- 線形ロバスト制御理論の一つである μ 設計法をループフィルタの設計に用いる。線形利得と量子化雑音によって線形近似された量子化器をノミナルプラントとする。その量子化器への入力信号の統計値によって変化する線形利得の値をノミナルプラントからの変動とし，その変動に対してロバスト安定性を保証するループフィルタを設計する。さらに，μ 設計法では制御性能に関するロバスト性能も考慮し設計できるため，入力振幅に対する安定性と高い SNR を同時に保持することループフィルタを設計できると考える。
- 入力振幅に対する安定性を高め，可能な限り SNR を高く保つために，SNR が高いループフィルタと，入力振幅に対する安定性が高いループフィルタを線形利得の値に応じて切り替え動作させる方法を提案する。
- デルタシグマ変調器の入力信号にディザを付加し，また量子化器の直前でディザを付加した場合についての入力振幅に対する安定性の変化を確認する。
- 非線形ロバスト制御理論の一つであるスライディングモード制御理論を用いる。スライディングモード制御理論は，不安定な状態を線形な等価制御入力や非線形制御入力によって平衡点に拘束し安定性を保つ制御方法である。デルタシグマ変調器の１ビット量子化器をスライディングモード制御理論の非線形入力項とみなすことで，１ビット量子化器を線形近似することなくシステムの安定化が望める。本論文では既存のループフィルタを用いて入力振幅に対する安定性を改善することを試みる。

線形ロバスト制御理論である μ 設計法を用いることで，制御性能の重み関数の周波数特性を見ながらループフィルタの特性が設計できるため，視覚的にわかりやすい設計が可能となる。また，所望の周波数特性を持った制御性能の重み関数を使うことができるため，設計者が望むノイズシェイピング特性を持ったループフィルタも設計初心者でも簡単に設計することが可能である。非線形ロバスト制御理論であるスライディングモード制御理論を用いた設計手法では既存のループフィルタをそのまま用いた，スライディングモード制御理論によるデルタシグマ変調器の構成の提案である。この場合も設計初心者であっても簡単に設計できる手法である。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。Fig. 1.4 に本論文の構成についてのチャートを示す。

第２章の「デルタシグマ変調器」では，本論文においてデルタシグマ変調器を理解するために必

要な概念について解説する。

第３章の「ロバスト制御理論」では，提案する設計法で用いる制御理論に関して説明する。まず，線形ロバスト制御理論である μ 設計について述べる。制御系の解析をする上で有用な LFT 表現について触れ，その後，構造化特異値 μ を定義する。ロバスト性能が，その構造化特異値 μ を用いることにより解析できることを説明する。次に，非線形ロバスト制御理論であるスライディングモード制御理論について述べる。切り替え超平面の設計方法や，スライディングモードコントローラの設計方法についても簡単に述べる。

第４章の「μ 設計法による高次デルタシグマ変調器の設計」では，μ 設計に基づくデルタシグマ変調器の設計手法について述べる。7 次と，10 次を超える 11 次のループフィルタの設計手順とその検討結果について述べる。

第５章の「ループフィルタ切り替え方式によるデルタシグマ変調器の設計」では，線形利得を参照し，ループフィルタを切り替えるデルタシグマ変調器のシステムを提案する。先行研究では入力振幅に対する安定性改善のために，ループフィルタを複数用いて入力振幅を参照し，その振幅値によってループフィルタを切り替える手法が提案されている。その従来法である振幅によるループフィルタ切り替え法と提案手法である線形利得によるループフィルタ切り替え法を比較検討する。そして，線形利得を参照した場合でループフィルタの設計方法が違う場合の比較として，synthesizeNTF 関数によるループフィルタと μ 設計法によるループフィルタの場合を比較する。

第６章の「ディザを適用したデルタシグマ変調器の安定性」では，μ 設計法で設計したループフィルタを用いて，入力信号にディザを付加した場合と量子化器の直前でディザを付加した場合について，それぞれ，広帯域ディザと高域集中ディザを付加した場合について検討する。一般的な A-D 変換器において，ディザを付加し量子化雑音を無相関化する技術は知られている。デルタシグマ変調器の場合，ディザを付加することでアイドルトーンを抑制する技術が研究されている。しかしながら，ディザを用いた場合の入力振幅に対する安定性については検討されていない。そこで，本論文ではディザを付加した場合の安定性について着目した結果を述べる。

第７章の「スライディングモード制御理論を用いたデルタシグマ変調器の設計」では，非線形ロバスト制御理論の一つである，スライディングモード制御理論を用いてデルタシグマ変調器を設計する手法を述べる。はじめに，マッチング条件を満たす場合のスライディングモード制御系を適用し検討する。次に，既存のループフィルタとスライディングモード制御理論を組み合わせる手法について検討する。

第８章の「デルタシグマ変調器の応用例と可能性」では，矩形波のような高周波信号を含む信号を符号化した場合の，ナイキスト型データ変換器とデルタシグマ変調器での比較を行う。次に，デルタシグマ変調器を用いた D-D 変換器（ロスレス圧縮）の可能性を示し，ループフィルタの高次化と入力振幅に対する安定性向上の必要性を述べる。

第９章の「総括」では，本研究で得られた主な成果に関してまとめ，今後の展望について述べる。

第４章はループフィルタの設計について，第５・６章は第４章で設計されたループフィルタと提案するトポロジーとの組み合わせ，第７章はスライディングモード制御理論を用いたトポロジーについて述べた章である。Fig. 1.4 に本論文の構成図を示す。

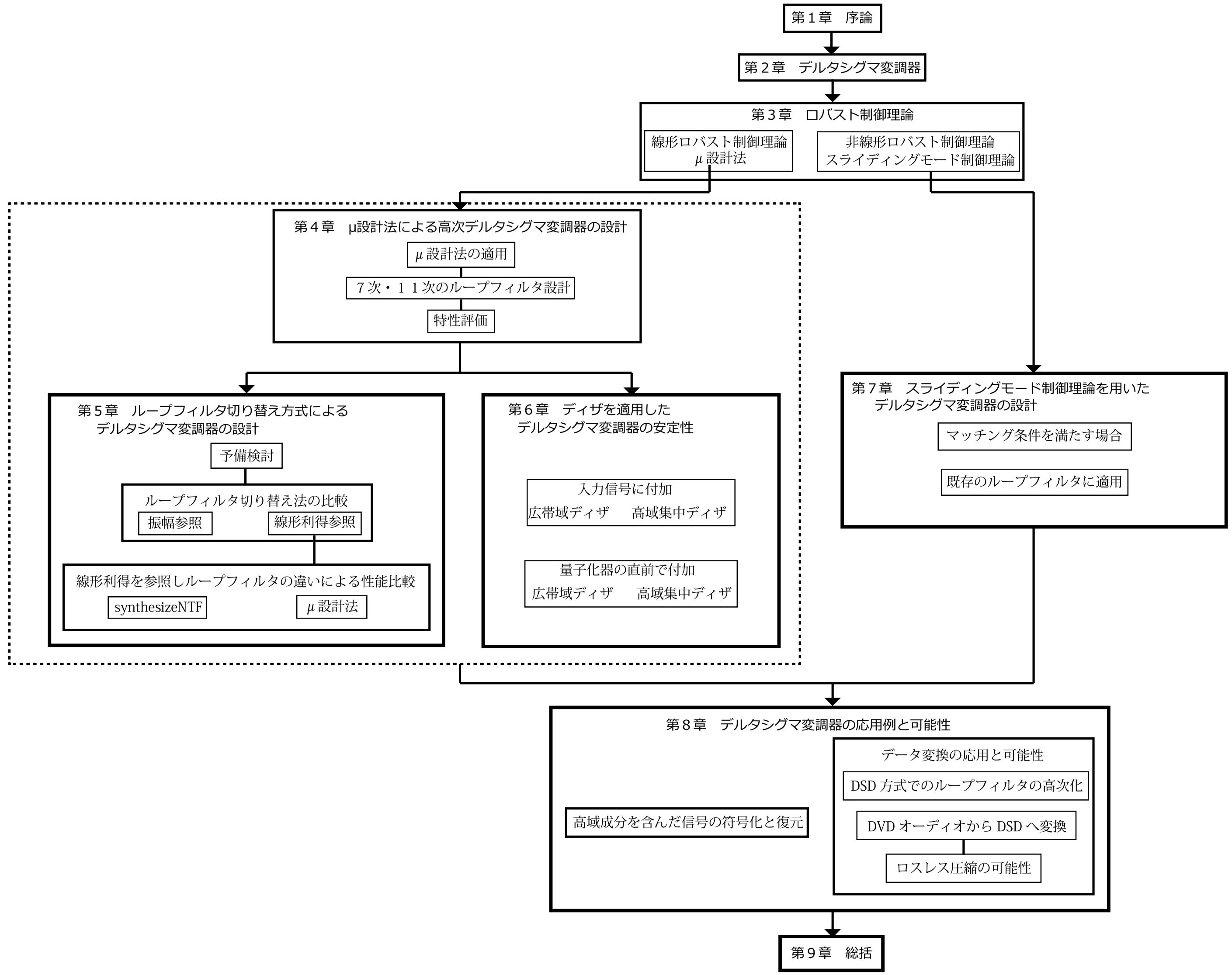


Fig. 1.4: 本論文の構成

第 2 章

デルタシグマ変調器

2.1　デルタシグマ変調器の基礎理論

デルタシグマ変調器はオーバーサンプリング型データ変換器の一つである。オーバーサンプリング型データ変換器はサンプリング周波数をナイキスト周波数に比べて高くすることにより分解能を向上させるものである。本章ではデルタシグマ変調器を理解するために必要となる基本的な事項について，参考文献 [17] [18] を用いて説明する。

2.1.1　オーバーサンプリング型データ変換器

データ変換器はナイキスト型とオーバーサンプリング型の２つに分類される。ナイキスト型では標本化された入力と出力が 1 対 1 に対応している。変換器は履歴をもたず，それ以前のデータとは無関係に標本化データが処理される。ナイキスト型データ変換器のサンプリング周波数 f_s はナイキスト条件が満たされる範囲内，すなわち入力周波数帯域幅 f_B の２倍まで低くする事ができ，これをナイキスト周波数と呼ぶ。しかし，第一章で述べたように，A-D 変換，D-A 変換の際にローパスフィルタが必要になるといったの実用上の理由から，実際のサンプリング周波数は，ナイキスト周波数よりやや高いのが普通である。変換器の実効 bit 数は ENOB(effective number of bits) と呼ばれ，デジタルオーディオをはじめとする多くの応用では，例えば 18bit，場合によっては 20bit の分解能や線形性が要求される。実際に実現可能な相対精度の上限はおよそ 0.02 %であり，このような高いナイキスト型変換器は積分型（または計数型）変換器だけである。

一方，オーバーサンプリング型データ変換器では 20ENOB 以上の分解能を実現できる。分解能を高くしようとすると変換速度は低下するが，それでもナイキスト型と比較すれば高速変換が可能である。ナイキスト周波数の８倍から５１２倍という高いサンプリングレートを用いて，過去の量子化器への入力値をすべて利用しながら出力信号を生成する。つまり，この変換器には記憶素子が内蔵されている。オーバーサンプリング型データ変換器では，ナイキスト型データ変換器と比較してアナログ回路への要求精度が緩和される。しかしながら，高速動作とデジタル回路が必要ではあるが，近年のデジタル回路技術の進展により，この問題点は年々解決してきている。その結果，従来から多くの分野で用いられていたナイキスト型アナログ-デジタル変換器（ADC）が次第にオー

バーサンプリング型 ADC に置き換わりつつある。

2.1.2 デルタ変調とデルタシグマ変調

ベースバンド信号とよばれる，低周波領域にのみスペクトル成分をもつ信号を処理するためのオーバーサンプリング型 ADC について説明する。このようなデータ変換器はいくつかの段から構成される。実際の A-D 変換を行う部分を変調器または変換ループと呼ぶ。その前後にはアナログフィルタおよびデジタルフィルタが用いられる。代表的なオーバーサンプリング変調器にデルタ変調器とデルタシグマ変調器がある。Fig. 2.1(a) に A-D 変換に用いられる基本的なデルタ変調器を示す。これはフィードバック系であり，低分解能の内部 ADC および内部 DAC とループフィルタから構成される。ここでは積分器がループフィルタである。ADC で信号が量子化されるので，このシステムは非線形である。しかも，積分器にはメモリ機能があるので，これは動的システムである。このため，このシステムを数学的に解析することは難しい。しかし，内部 ADC を線形化すると，すなわち線形利得を 1 とし量子化雑音 e を用いてモデル化することにより，その動作を定性的に理解することが可能となる。DAC が理想的に動作していること，また参照電圧 V_{ref} が 1V，サンプリングレート f_s が 1Hz であることを仮定すると，Fig. 2.1(b) に示す離散時間線形システムが得られる。このシステムで時刻 $t = n/f_s$ におけるデジタル出力信号は，入力信号を m，量子化

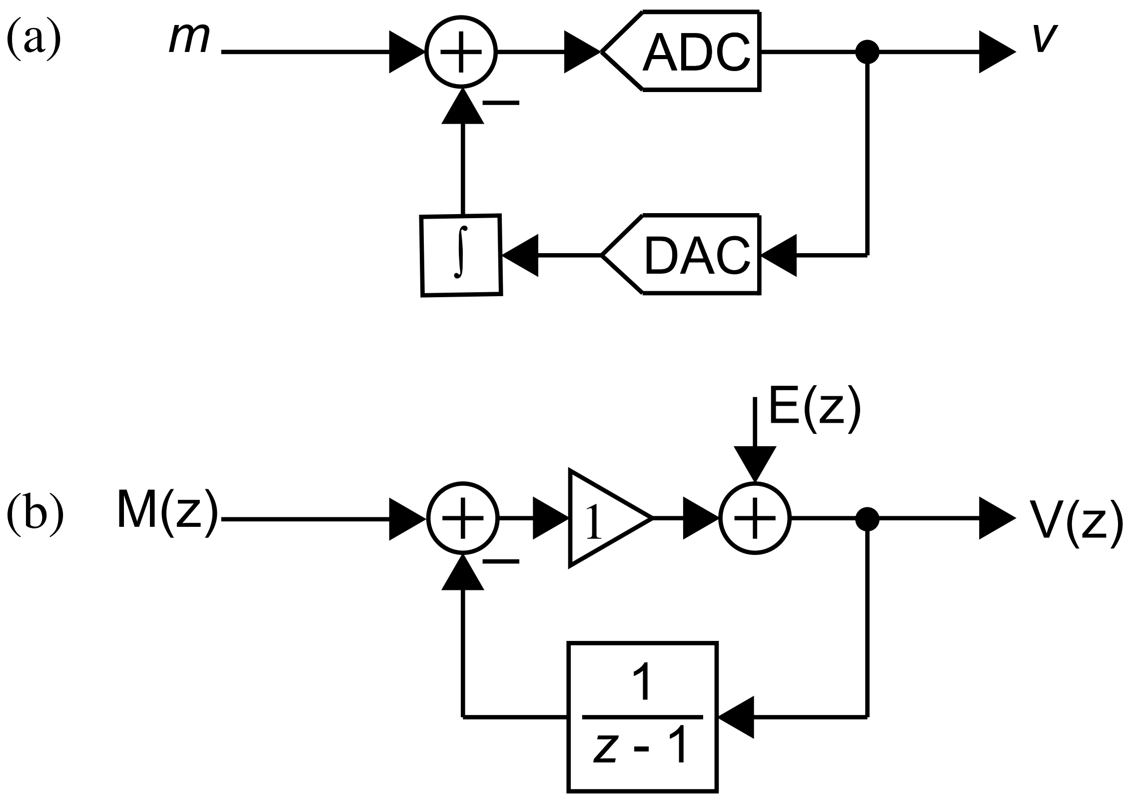


Fig. 2.1: (a)ADC を用いたデルタ変調器と (b) 線形モデルを用いて z 領域で表したデルタ変調器

雑音を e，出力信号を v とすると次式で与えられる。

$$v(n) = m(n) - m(n-1) + e(n) - e(n-1) \tag{2.1}$$

入力ノードにフィードバックされる値，すなわち入力に対する予測値と入力の標本値との差 (Δ) に基づいて出力が決まることから，このシステムはデルタ変調とよばれている。一般に，ループフィルタに高次の回路を用いれば $m(n)$ に対する予測精度を向上できる。デルタ変調器は予測型エンコーダ (predictive encoder) とよばれることもある。

デルタ変調器の有利な点は，信号がオーバーサンプリングされている場合，差 ($m(n)$-$m(n-1)$) の平均が $m(n)$ 自身より非常に小さいことである。その結果，大きな振幅信号を入力してもその差分により，変調器で演算される値が小さくなりオーバーフローに強いということである。しかし，いくつかの欠点もある。Fig. 2.1 では 1 次フィルタすなわち積分器で示されるループフィルタがフィードバック経路にあるため，その特性が理想的なものでないとシステムの線形性と精度が劣化する。さらに，復調器においては DAC と復調フィルタ（1 次変換器では積分器）が必要で，このフィルタは信号帯域では高い利得を有するため，変調器と復調器の間で信号に混入する雑音と一緒に，DAC の非線形ひずみも増幅してしまう。

デルタ変調器の欠点を解消したオーバーサンプリング変調器を Fig. 2.2(a) に示す。これもフィードバックループ内に低分解能の内部 ADC と内部 DAC を含むが，ループフィルタがフォワード経路にある。デルタ変調器と同様，内部 ADC を線形モデルで置き換えると，Fig. 2.2(b) に示すような線形化された離散時間システムとなり，次式を得る。

$$v(n) = m(n-1) + e(n) - e(n-1) \tag{2.2}$$

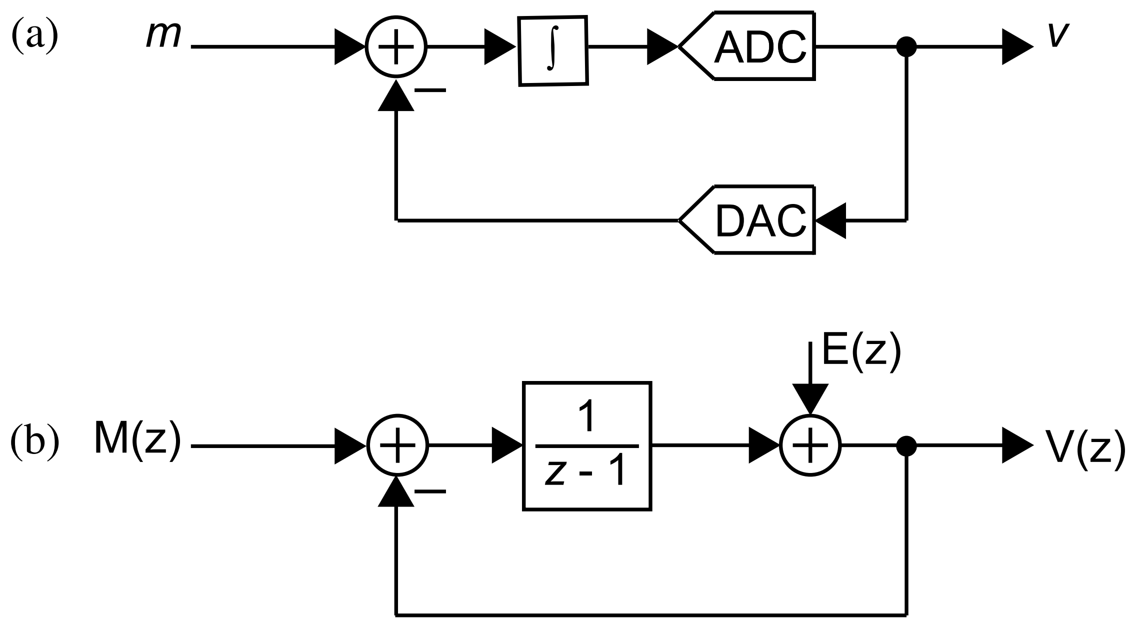


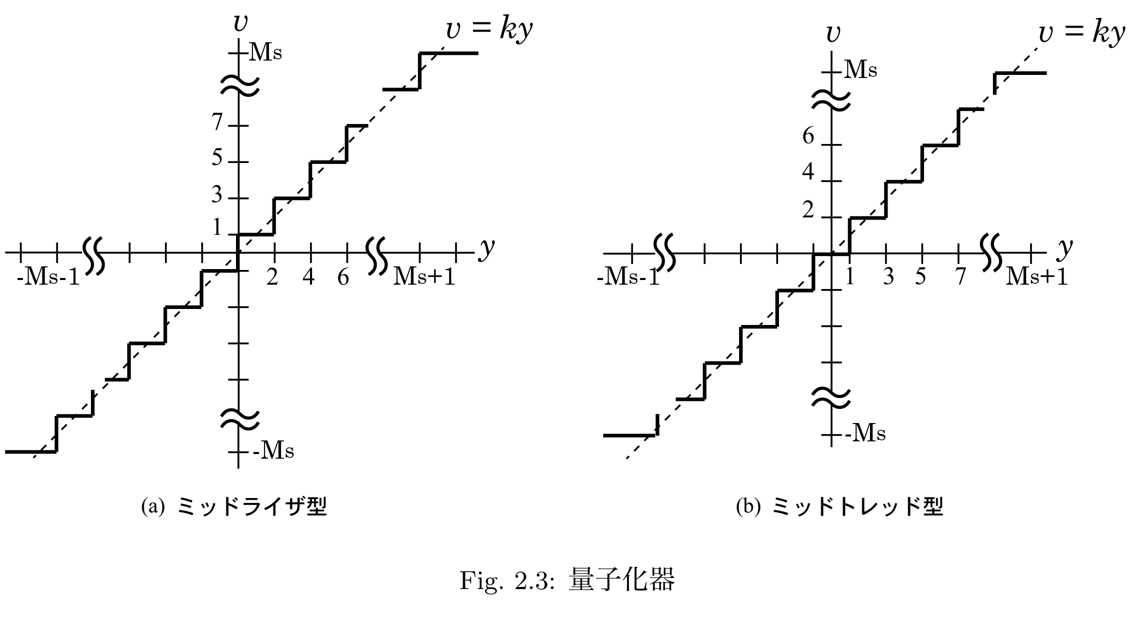
Fig. 2.2: (a)ADC を用いたデルタシグマ変調器と (b) 線形モデルを用いて z 領域で表したデルタシグマ変調器

デジタル出力は，遅延をともなうものの入力信号 m をそのままの形で含む。量子化雑音は差分化された形で含まれる。変調器で信号が変化しないことから，デルタ変調器を用いた場合と異なり，復調器における積分器が不要で，受信側で信号対域内雑音やひずみが増幅されることはない。さらに，誤差 e の差分を取ることにより，サンプリング周波数 f_s より低い周波数領域で量子化誤差が減衰する。一般に，信号帯域でのループフィルタの利得が大きければ，帯域内の量子化雑音も大きく減衰する。これは，ノイズシェイピング (noise shaping) とよばれている。

Fig. 2.2 のシステムは，積分器または積算ブロックにデルタ変調器を縦続接続したものと見なせる。このためシグマデルタ変調器とよばれるようになった。あるいは，入力を差分化した後にループフィルタで積算するのでデルタシグマ変調器ともよばれている。高次のフィルタや多 bit 量子化器などを用いたシステムに対しては，ノイズシェイピング変調器と呼ぶのが最も相応しいが，それらのシステムもデルタシグマ変調器と呼ぶことが多い。本論文でもその用法に従う。

2.1.3 量子化器と量子化雑音

第 1 章でも少し述べたが，連続時間アナログ信号をデジタル信号に変換するためには，２つの操作を行う必要がある。それは，アナログ信号を一定の周期 T でサンプリングすることと，その振幅を量子化して，アナログ信号のアナログ値の振幅を量子化ビット数で許容された有限の数値の中から，１つの値を対応づけることであり，通常，量子化は等間隔で行う。このため隣接した２つの量子化された値は，一定間隔 Δ だけ異なる。量子化を行う装置は「量子化器」あるいは理想 A-D 変換器と呼ばれる，これは静的な入出力特性（y-v 伝達曲線）によって完全に規定される。記憶機能をもたない非線形素子であると仮定する。そのような特性の例を Fig. 2.3 に示す。これらは正の入力とともに負の入力も処理できる「バイポーラ量子化器」と呼ばれている。これらのうち (a) は $y = 0$ で v がステップ的に上昇する，ミッドライザ型とよばれるものである。(a) とは対照的に (b) は $y = 0$ が中央の平坦部分（トレッド）にあり，このような量子化器はミッドトレッド型とよ



(a) ミッドライザ型　(b) ミッドトレッド型

Fig. 2.3: 量子化器

Table.2.1: Fig.2.3 に示したバイポーラ量子化器の特性

パラメータ	値
入力ステップサイズ (LSB サイズ)	2
出力ステップサイズ	2
ステップ数	Ms
レベル数	Ms+1
bit 数	$\log_2$(Ms+1)
非飽和入力範囲	-(Ms+1),Ms+1
フルスケール	2Ms
入力閾値	0,±2,...,±(Ms-1), Ms odd ±1,±3,...±(Ms-1), Ms even
出力レベル	±1,±3,...±(Ms-1), Ms odd 0,±2,...,±(Ms-1), Ms even

ばれる。ステップ幅は両方の場合とも $\Delta = 2$ である。この共通の Δ を用いると，両方の量子化器の量子レベルを整数値にすることができる。量子化レベルは，ミッドライズ型量子化器では奇数，ミッドトレッド型量子化器では偶数になる。

伝達曲線を直線 $v = ky$ で近似することは多くの場合望ましい。ここで，k は量子化器の実効的な利得である。近似した特性と実際の特性との偏差は量子化誤差，または量子化雑音とよばれる。Fig.2.3 には近似直線も示してある。ここでは，$k = 1$ が使用され，したがって最下位 bit サイズあるいは LSB サイズと知られている入力閾値間の差が 2 である。

y が $-(Ms+1)$ と $(Ms+1)$ の間にある場合，誤差 e は-1 と 1 の間にあることが Fig. 2.3 からわかる。上記の条件が満たされる y の範囲を非過負荷範囲，あるいは単に入力範囲と呼ぶ。また，最低と最高レベルの差を量子化器のフルスケール (FS) と呼ぶ。Fig. 2.3 に示した量子化器の特性を要約して Table.2.1 に示す。

理想的な量子化器は決定論的な入出力特性をもっていて，v と誤差 e は入力 y によって完全に決定される。しかし，y が量子化器の入力範囲内にあり，サンプル間で十分大きく変化するために量子化間隔内における位置が実質的にランダムであるような場合には，e の生成過程は $-\Delta/2$ と $\Delta/2$ の間で一様に分布した白色雑音過程であるとみなすことができる。一様分布の過程から，e の平均がゼロ，２乗平均値が $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$ であることが簡単に導き出せる [19]。この「雑音」は，スケーリングされた入力 y にそのまま加えられ，出力

$$v = ky + e \tag{2.3}$$

となる。式 2.3 は常に成立するが，一様分布つまり白色スペクトルのような特定の特性を e に仮定したときのみ伝達特性の近似となることに注意しなければならない。仮定が満たされない入力，すなわち近似が著しく謝った結果を与えるような入力としては例えば，一定の y や f_s と整数比関係にある周波数をもつ周期的な y（特に y がサンプル間で Δ の分数だけ変化するもの）が含まれる。

2.1.4 ２値量子化と線形モデルの利得

Fig. 2.3 に図示されるように，多 bit 量子化器に用いる線形モデルの利得 k は，隣接した閾値間の距離とステップ幅の比によって決定される。しかしながら，Fig. 2.4 に描かれるように，２値量子化器はたった 1 つの閾値しかもたないため，その利得は簡単に決定することはできない。線形近似直線を引くことを試みたとき，Fig. 2.4 に示された 2 本の近似はどちらも可能性としてあり得る。また，どちらの場合でも同じ最大誤差は $\Delta/2 = 1$ となる。最適な線形利得 k を求めるために，量子化器への入力 y の統計的性質を利用し，その値は誤差列 e の２乗平均値（あるいは，平均パワー）を最小化することで求められる。２乗平均値は e^2 の期待値（あるいは平均値）として次式のように定義される。

$$\sigma_e^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e(n)^2 \tag{2.4}$$

内積，またはスカラー積の導入により簡便な表記が可能となる。実数列 a および b に対し，内積は次のように定義できる。

$$\langle a, b \rangle = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} a(n)b(n) \right] = E[ab] \tag{2.5}$$

$e = v - ky$ なので，e の平均パワーは次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \langle e, e \rangle \\ &= \langle v - ky, v - ky \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2k\langle v, y \rangle + k^2 \langle y, y \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

線形利得 k が次式を満たす場合これは最小化される。

$$k = \frac{E[|y|]}{E[y^2]} \tag{2.7}$$

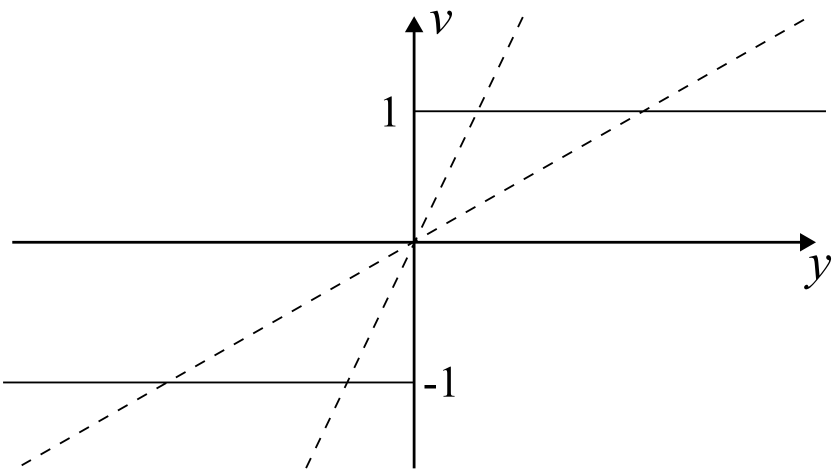


Fig. 2.4: ２値量子化器

式（2.7）の最後の部分は，$v(n)y(n) = sgn[y(n)]y(n) = |y(n)|$ から導かれる。

２値量子化器の線形利得 k の最適値は，量子化器の入力 y の統計的性質に依存する。この妥当性を確認してみる。k を式（2.7）に従い入力 y から求めた利得とする。$y' = 10y$ の場合，$E[|y'|] = 10E[|y|]$ となり $E[y'^2] = 100(E[y^2])$ となる。したがって $k' = k/10$ を得る。よって，その入力が１０倍増幅される場合，２値量子化器の実効的な利得は１０分の１に縮小される。y は１０倍増加するが，v は同じ値のままであるので，これは物理的に正しい。

２値量子化器を含むシステムを線形利得 k で近似する場合，線形利得 k の値は量子化器への入力により，時々刻々と変化していると考えることができる。そのため，繰り返し数値シミュレーションを行うことにより量子化器の利得 k の値を決める必要があり，誤った線形モデルを用いてデルタシグマ変調器を解析，設計を行う可能性がある。

2.1.5　１次デルタシグマ変調器

Fig. 2.5 にデルタシグマ変調器の z 領域線形モデルを示す。この図では量子化器は線形利得 k と量子化雑音 E によって線形モデル化している。Fig.2.5 より出力信号 $V(z)$ を求めることを考える。線形利得 $k = 1$ とすると $Y(z)$ は

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + M(z) - z^{-1}V(z) \tag{2.8}$$

となり，したがって，

$$\begin{aligned} V(z) &= Y(z) + E(z) = z^{-1}Y(z) + M(z) - z^{-1}V(z) + E(z) \\ &= M(z) + E(z) - z^{-1}\{V(z) - Y(z)\} \\ &= M(z) + E(z) - z^{-1}E(z) \\ &= M(z) + (1 - z^{-1})E(z) \end{aligned} \tag{2.9}$$

と求めることができる。m および v の直流値（つまりそれらの平均値）は，式 (2.9) で $z = 1$ とすることにより得ることができる。e の直流値が有限の場合，式 (2.9) から直接 $V(1) = M(1)$ が得られる。

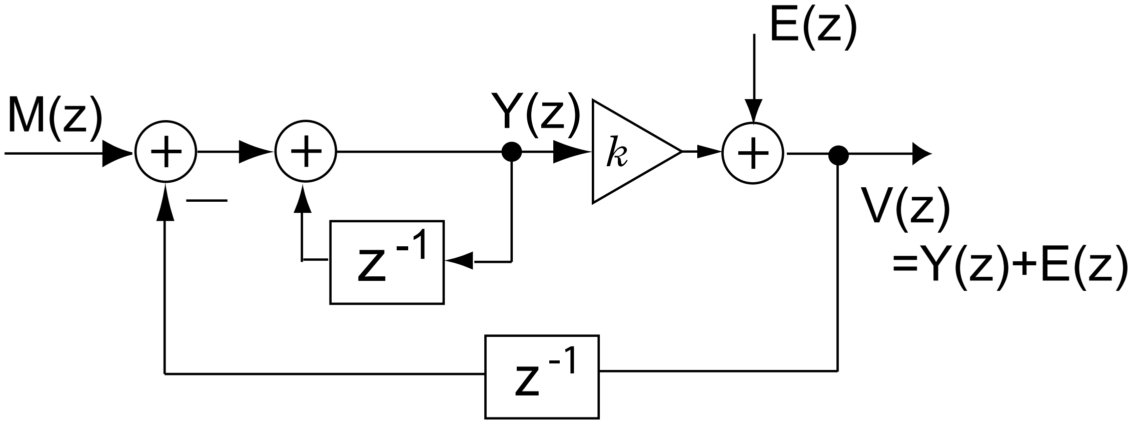


Fig. 2.5: 1 次デルタシグマ変調器の z 領域モデル

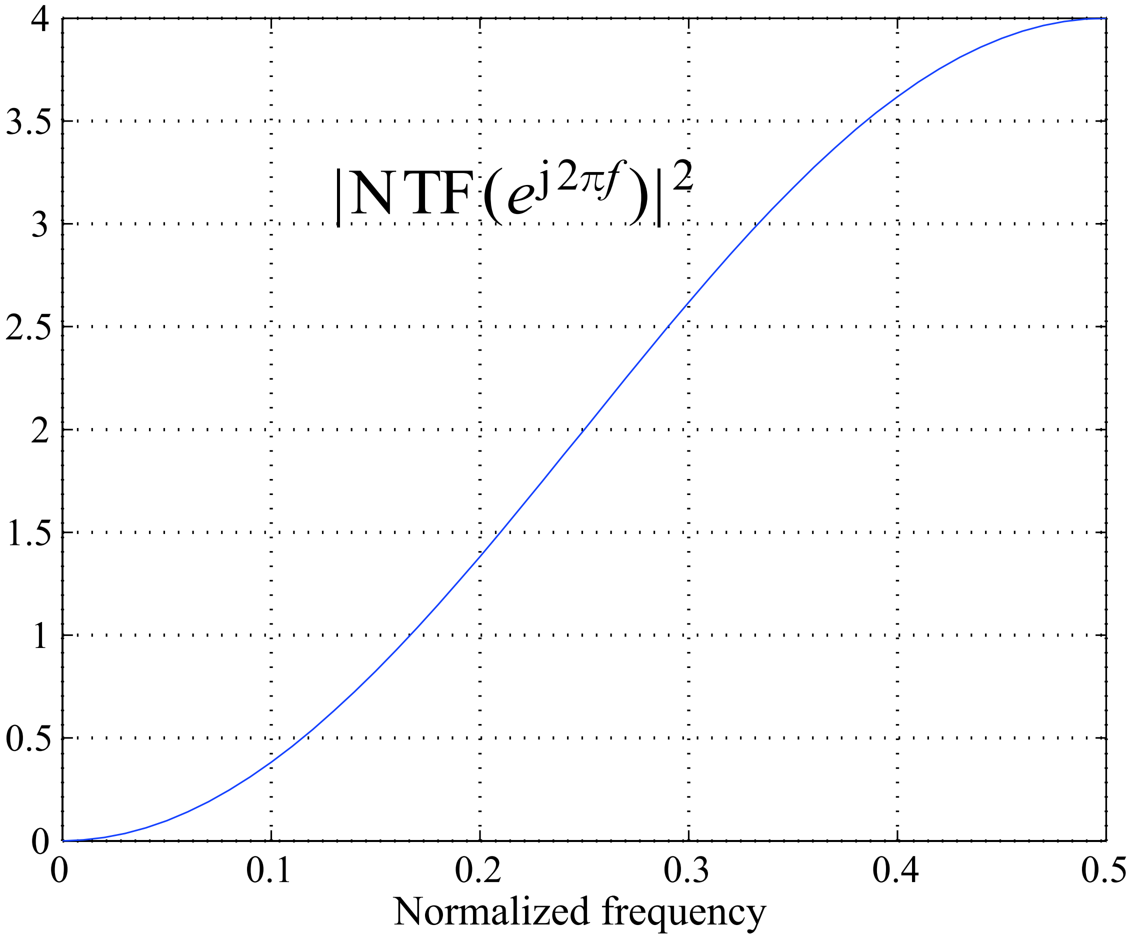


Fig. 2.6: 1 次デルタシグマ変調器のノイズシェイピング関数

式 (2.9) は一般形として

$$V(z) = STF(z)M(z) + NTF(z)E(z) \tag{2.10}$$

と書くことができ，Fig. 2.5 の場合は，式（2.9）と式（2.10）を比較すると信号伝達関数（STF）が 1 で，雑音伝達関数（NTF）が $1 - z^{-1}$ である。デルタシグマ変調器において重要なのは NTF の周波数特性であり，NTF の周波数特性によって量子化雑音は信号帯域外へシェイピングされる。周波数特性を見るために $z = e^{j2\pi f}$ とすることで，周波数領域における NTF の 2 乗の絶対値を求めることができる。これから次式を得る。

$$|NTF(e^{j2\pi f})|^2 = [2\sin(\pi f)]^2 \tag{2.11}$$

$f \ll 1$ を満たす周波数に対して $|NTF|^2 \approx (2\pi f)^2$ となる。Fig. 2.6 に NTF の周波数特性を図示する。この図より，Fig. 2.5 における NTF の周波数応答はハイパス特性を示していることが確認できる。つまり，入力信号が存在する低周波数領域での量子化雑音を低減し，信号周波数帯域外の高周波数領域で量子化雑音を増幅している。この様子をノイズシェイピングと呼ぶ。y の値が大きく，ランダムに変化するということが成立するとすれば，誤差 e は 2 乗平均値 $\sigma_e^2 = 1/3$ をもつ白

色雑音として扱うことが可能である（$\Delta = 2$ と仮定している）。したがって，e の片側スペクトル密度は $S_e(f) = 2\sigma_e^2 = 2/3$ である。そして，出力 v に含まれる帯域内雑音パワーは次の式で求められる。

$$\sigma_q^2 = \int_0^{1/(2\cdot OSR)} [2\pi f]^2 S_e(f) df = \frac{\pi^2}{9(OSR)^3} \tag{2.12}$$

ここで，OSR はオーバーサンプリング比（Over Sampling Ratio:OSR）であり，元の信号を OSR 倍にアップサンプリングすることを示している。入力信号がフルスケールの正弦波でピーク振幅が M であるとすると，STF が 1 であるので，出力信号パワーは $\sigma_u^2 = M^2/2$ である。したがって，信号帯域内の信号量子化雑音比（SQNR）は次のようになる。

$$SQNR = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_q^2} = \frac{9M^2(OSR)^3}{2\pi^2} \tag{2.13}$$

式 (2.13) は OSR を 2 倍にするごとに（つまり，入力周波数帯域幅 f_B を固定してサンプリング周波数 f_s を 1 オクターブ上げるごとに）SQNR が 9dB 増加することを示している。このため，$OSR = 256$ のような比較的高い OSR に対してでさえ，70dB 以下という比較的低い SQNR しか得られない。

2.1.6 2次デルタシグマ変調器

1 次デルタシグマ変調器をもとに 2 次デルタシグマ変調器を実現する最も簡単な方法は，1 次デルタシグマ変調器の量子化器を別の 1 次デルタシグマ変調器に置き換えることである。Fig. 2.7 にそのようにして得られた構成を示す。量子化器は線形利得 k と量子化雑音 E で線形モデル化している。1 次のデルタシグマ変調器と同様に線形利得 $k = 1$ として出力信号 $V(z)$ を求めると，Fig. 2.7 より，

$$\begin{aligned} V(z) &= E(z) + \frac{1}{1-z^{-1}}\left[-z^{-1}V(z) + \frac{1}{1-z^{-1}}\{-z^{-1}V(z) + M(z)\}\right] \\ &= \frac{(1-z^{-1})^2E(z) - \{(1-z^{-1})z^{-1} + z^{-1}\}V(z) + M(z)}{(1-z^{-1})^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

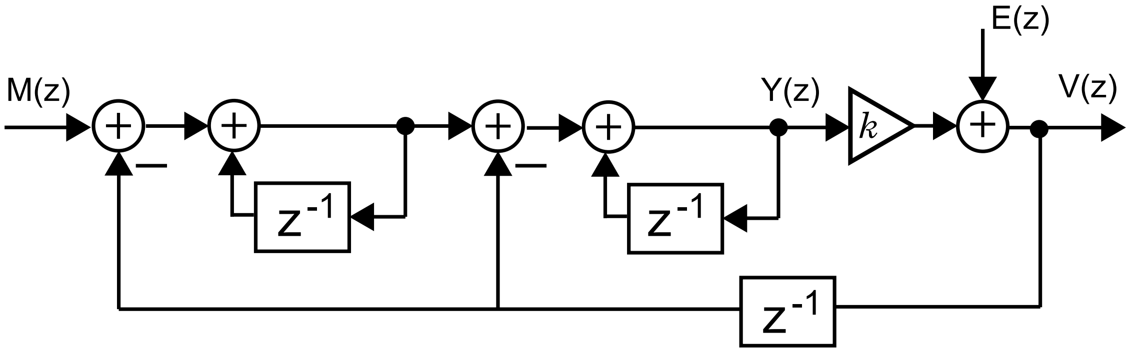


Fig. 2.7: 2次デルタシグマ変調器

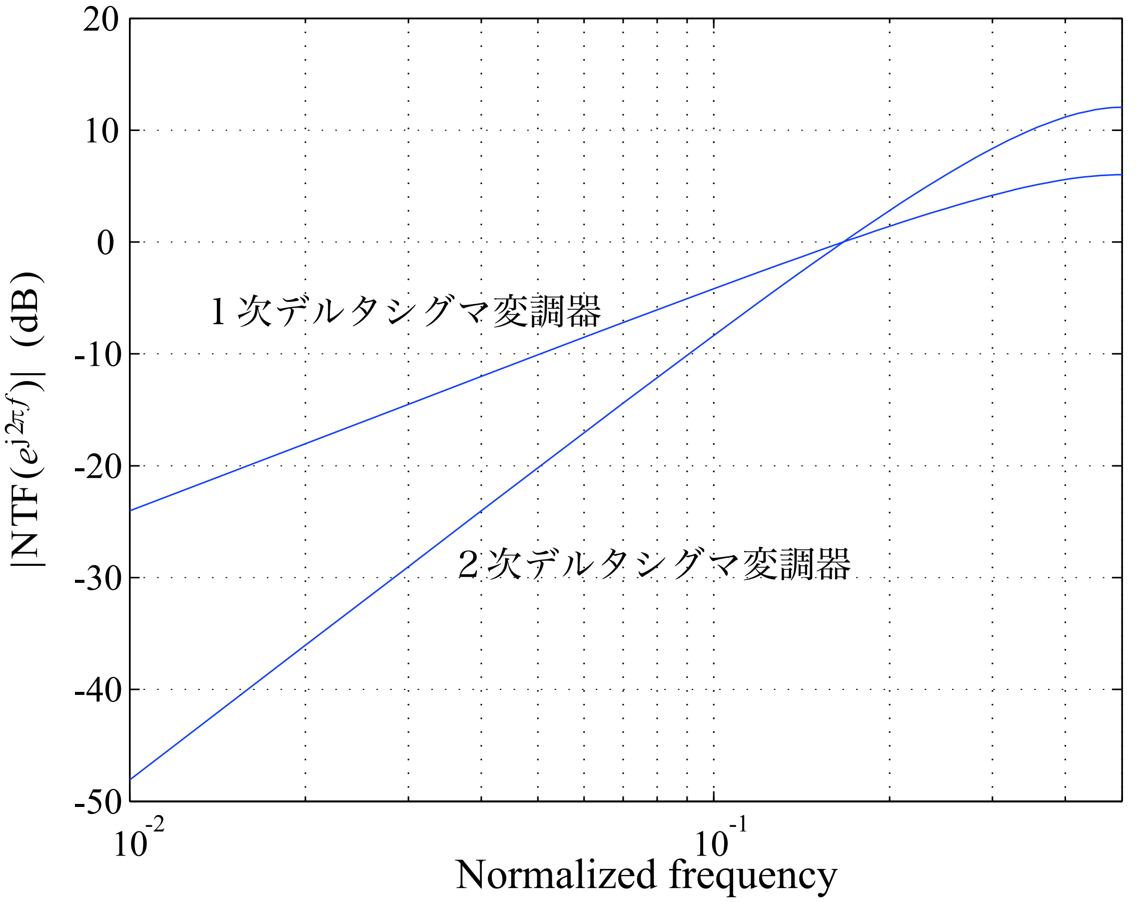


Fig. 2.8: 1 次デルタシグマ変調器と 2 次デルタシグマ変調器の NTF

が得られる。この式より

$$V(z) = M(z) + (1 - z^{-1})^2 E(z) \tag{2.15}$$

となる。したがって，信号伝達関数は 1 次デルタシグマ変調器と同様 |STF(z)|=1 となるが，雑音伝達関数は NTF(z)=$(1 - z^{-1})^2$ となる。この雑音伝達関数は 1 次デルタシグマ変調器の雑音伝達関数の 2 乗であるため，信号帯域である低周波数帯域での量子化雑音は 1 次の場合より低減されることが期待できる。周波数領域において，NTF の絶対値の 2 乗は次のように表せる。

$$|NTF(e^{j2\pi f})|^2 = (2\sin \pi f)^4 \approx (2\pi f)^4 \tag{2.16}$$

1 次デルタシグマ変調器と 2 次デルタシグマ変調器の NTF の絶対値を Fig. 2.8 に比較して示す。低周波数帯域で，1 次デルタシグマ変調器の NTF は 20dB/dec の傾きであるが，2 次デルタシグマ変調器の NTF は 40dB/dec の傾きである。直流に近い低周波帯域での大きな減衰量は信号帯域内の量子化雑音を減少させるという点で好ましい。しかし，高周波数帯域における 2 次デルタシグマ変調器の NTF の利得は 1 次デルタシグマ変調器より大きいため，出力における量子化雑音の総パワーは 2 次デルタシグマ変調器の方が 1 次デルタシグマ変調器よりも大きくなる。

1 次デルタシグマ変調器と同様の方法で出力 v に含まれる信号帯域内量子化雑音を算出すること

ができる。

$$\sigma_q^2 \approx \int_0^{1/(2\cdot OSR)} (2\pi f)^4 \cdot 2 \cdot \sigma_e^2 df = \frac{\pi^4 \sigma_e^2}{5(OSR)^5} \tag{2.17}$$

この値と振幅 M_A の正弦波のパワー ${M_A}^2/2$ を比較し，$\sigma_e^2 = 1/3$ を仮定すると，２次デルタシグマ変調器の SQNR を得ることができる。

$$SQNR = \frac{{M_A}^2/2}{\sigma_q^2} = \frac{15{M_A}^2(OSR)^5}{2\pi^4} \tag{2.18}$$

Fig. 2.9 に $M_A = 1$ における１次デルタシグマ変調器と２次デルタシグマ変調器それぞれの SQNR の理論値と OSR の関係を示す。１次デルタシグマ変調器の SQNR は OSR の３乗に比例するのに対し，２次デルタシグマ変調器の SQNR は OSR の５乗に比例する。したがって，OSR を２倍にすると SQNR は 32 倍（15dB）向上し，2.5bit だけ分解能が向上する。デルタシグマ変調器の次数を上げることで SQNR の向上が期待できる。

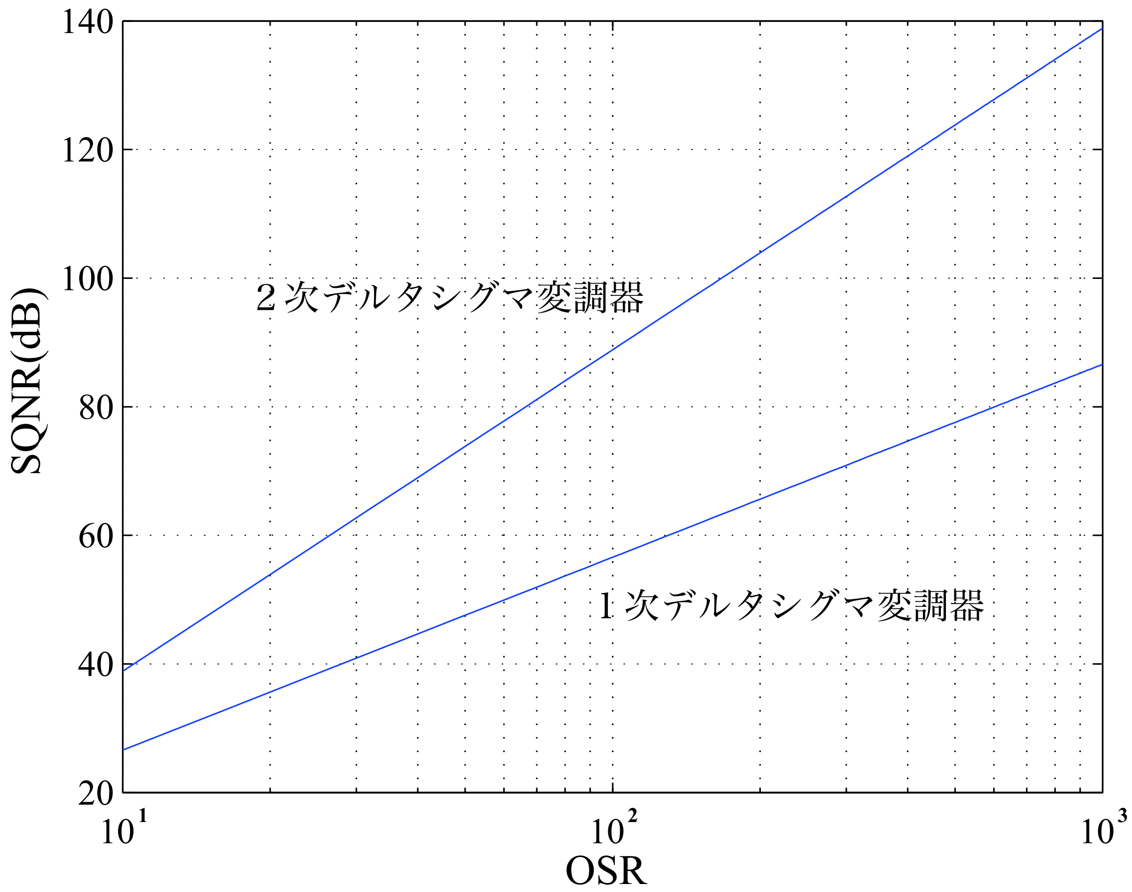


Fig. 2.9: １次デルタシグマ変調器と２次デルタシグマ変調器の SQNR と OSR の関係

2.1.7 高次デルタシグマ変調器

Fig. 2.10 は 1 つの量子化器を有するデルタシグマ変調器の一般的な構造を示している。同図において，この変調器は 2 つの部分に分かれる。1 つはメモリ機能のある素子を含む線形な部分（ループフィルタ）であり，もう 1 つはメモリ機能をもたない非線形な部分（量子化器）である。1 次と 2 次のデルタシグマ変調器と同様に Fig. 2.10 の量子化器を線形利得 k と量子化雑音 E でモデル化すると，Fig. 2.11 のようになる。このループフィルタは 2 入力システムであって，その出力 Y は，2 つの入力 M と V の線形結合によって次のように表される。

$$Y(z) = L_0(z)M(z) + L_1(z)V(z) \tag{2.19}$$

量子化器は，これまでと同様に，線形利得 $k = 1$ とする。

$$V(z) = Y(z) + E(z) \tag{2.20}$$

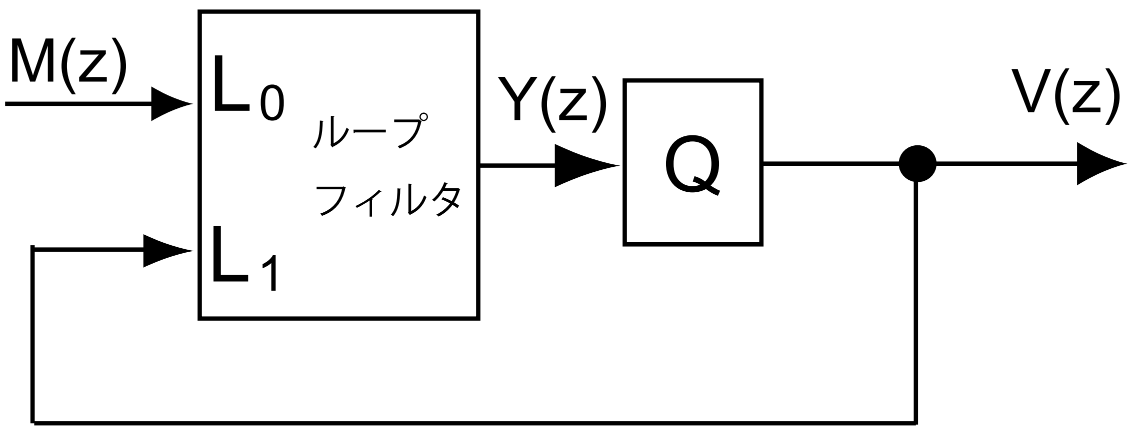


Fig. 2.10: 1 つの量子化器を有するデルタシグマ変調器の一般的な構造

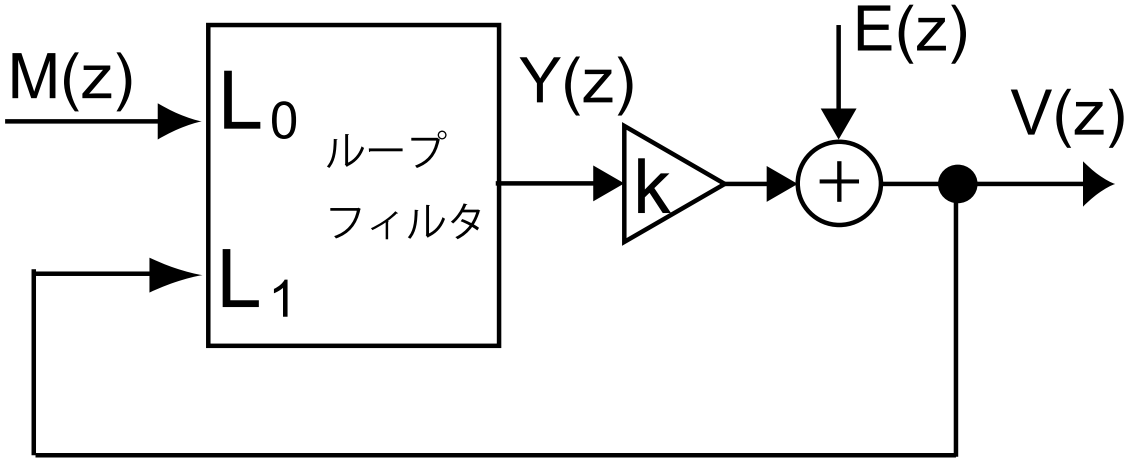


Fig. 2.11: 量子化器をモデル化したデルタシグマ変調器の一般的な構造

式（2.19）と式（2.20）を用いて，出力信号 V を 2 つの信号，すなわち変調器の入力信号 M と量子化雑音 E の線形結合として書くことができる。

$$V(z) = STF(z)M(z) + NTF(z)E(z) \tag{2.21}$$

ここで

$$NTF(z) = \frac{1}{1 - L_1(z)} \quad \text{および} \quad STF(z) = \frac{L_0}{1 - L_1(z)} \tag{2.22}$$

である。逆に，所望の NTF と STF が与えられたなら，それらを実現するために必要なループフィルタの伝達関数を計算することができる。すなわち，

$$L_0 = \frac{STF(z)}{NTF(z)} \quad \text{および} \quad L_1 = 1 - \frac{1}{NTF(z)} \tag{2.23}$$

となるループフィルタ L_0, L_1 を設計することで所望の NTF と STF を実現すれば良い。これらの関係はループフィルタの構造とは無関係に成り立つので，ループフィルタの入出力特性はすべて STF，NTF と量子化器の特性によって決まる。

0 から f_B の周波数範囲において NTF を減少させるためには，この範囲で L_1 が大きくなければならないことを示している。また，STF が 1 に近い値を保つためには同じ範囲で L_0 も大きくなければならないことを式 (2.22) は示唆している。このことは，L_1 と L_0 がともにこの周波数範囲に極を持っていなければならないことを意味する。実際，Fig. 2.10 の構造とその入出力関係式 (2.19)〜(2.23) から予測されるように，L_1 と L_0 の両方を実現するために同じ回路が用いられているので，これら 2 つの関数は通常同じ極をもつ（それらは NTF の零点でもある)。しかし，L_1 と L_0 は一般に異なる零点をもつ。

信号が変調器内で l クロック周期遅延するだけで，STF は $|STF(z)| = 1$ を満足し，一方，NTF は量子化雑音を N 回だけ微分することを要求するような最も単純な場合を考える。

$$STF(z) = z^{-l} \quad \text{かつ} \quad NTF(z) = (1 - z^{-1})^N \tag{2.24}$$

である。Fig. 2.12 に N=1 から N=5 に対応した NTF の周波数特性を示す。この図から，正規化周波数 $fs/6$ を境にして，次数が上がるほど信号周波数帯域である低周波数帯域での利得は下がっており，高周波数帯域では利得が上がっている。これはノイズシェイピング特性そのものであるので，次数を上げると信号周波数帯域内で SNR を高くすることができる。

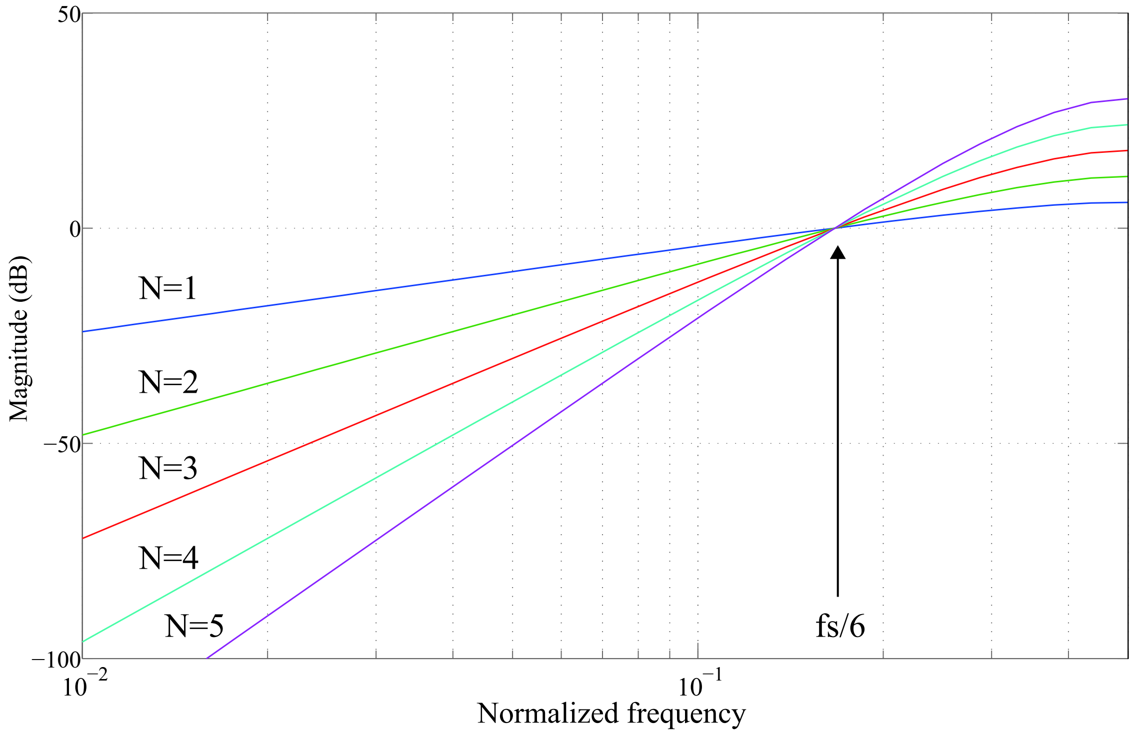


Fig. 2.12: N=1 から N=5 に対する NTF の様子

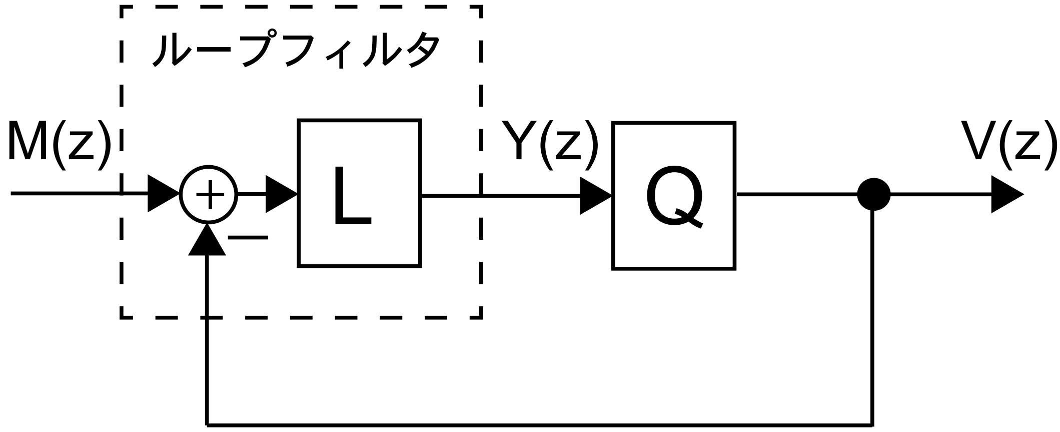


Fig. 2.13: 単一フィードバック構造

ループフィルタの入力が 1 つで，差 $m(n) - v(n)$ だけの場合は特殊な例として重要である（Fig. 2.13)。そのとき，$L_0 = L$ かつ $L_1 = -L$ であって，式 (2.22) は

$$NTF(z) = \frac{1}{1 + L(z)} \quad \text{かつ} \quad STF(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} \tag{2.25}$$

となる。ここで，L はループフィルタの共通部分の伝達関数である。この場合，L と量子化器が，この変調器のすべての重要な特性（安定性，信号および雑音伝達関数）を決定する。

理論上では，最も単純な N 次ループフィルタにおいて信号帯域内の雑音パワーは近似的に次式で与えられる。

$$q_{rms}^2 = \frac{\pi^{2N} e_{rms}^2}{(2N+1)(OSR)^{2N+1}} \tag{2.26}$$

OSR を 2 倍にすると N+0.5bit の分解能の増加が見込める。Fig. 2.14 に式 (2.26) に基づく信号帯域内雑音を OSR の関数としてプロットした。ここで，0dB は白色雑音の 2 乗平均 $e_{rms}^2 = \Delta^2/12$ の量子化雑音パワーに対応する。しかし，実際には高次ループフィルタにおいては安定性が問題となり，それを考慮にいれると得られる分解能の値は低下する。

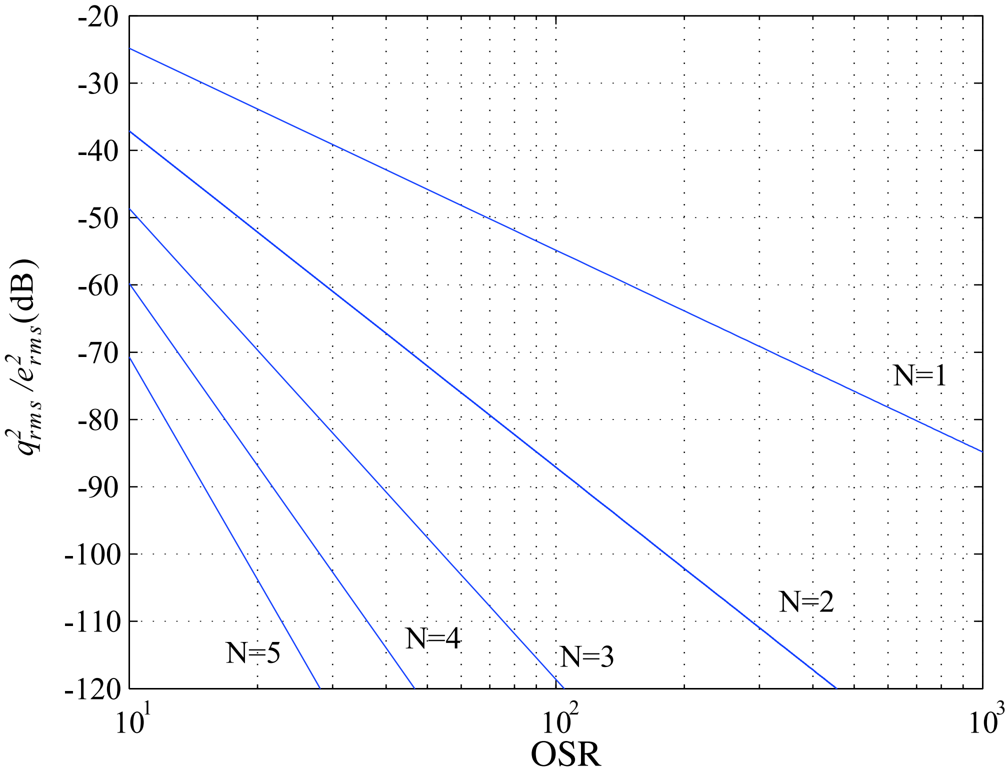


Fig. 2.14: N 次デルタシグマ変調器の信号帯域雑音パワーの理論値

2.1.8 多段変調器

別の考え方として，量子化雑音をフィルタリングするのではなく，打ち消す方法で変調器に対する多段構造を使う方法がある。代表的な多段変調器として，MASH 変調器 [23–25] がある。Fig. 2.15 に示すように，デルタシグマ変調器を２つ有している。初段の出力信号は１段目の信号伝達関数を STF_1，雑音伝達関数を NTF_1 とすると

$$V_1(z) = STF_1(z)M(z) + NTF_1(z)E_1(z) \tag{2.27}$$

となり，これは１段のみのデルタシグマ変調器の出力信号と同じである。この出力信号 $V_1(z)$ から量子化器への入力 $Y_1(z)$ を引くと，量子化雑音 $E_1(z)$ となる。その $E_1(z)$ を２段目のデルタシグマ変調器へ入力すると，出力信号は２段目の信号伝達関数を STF_2，雑音伝達関数を NTF_2 とすると，

$$V_1(z) = STF_2(z)E_1(z) + NTF_2(z)E_2(z) \tag{2.28}$$

となる。２つの変調器の後にある，デジタルフィルタ H_1，H_2 はシステム全体の出力 $V(z)$ ににおいて，１段目の量子化誤差 $E_1(z)$ が打ち消されるように設計されている。式 (2.27)，式 (2.28) より，

$$H_1(z)NTF_1(z) - H_2(z)STF_2(z) = 0 \tag{2.29}$$

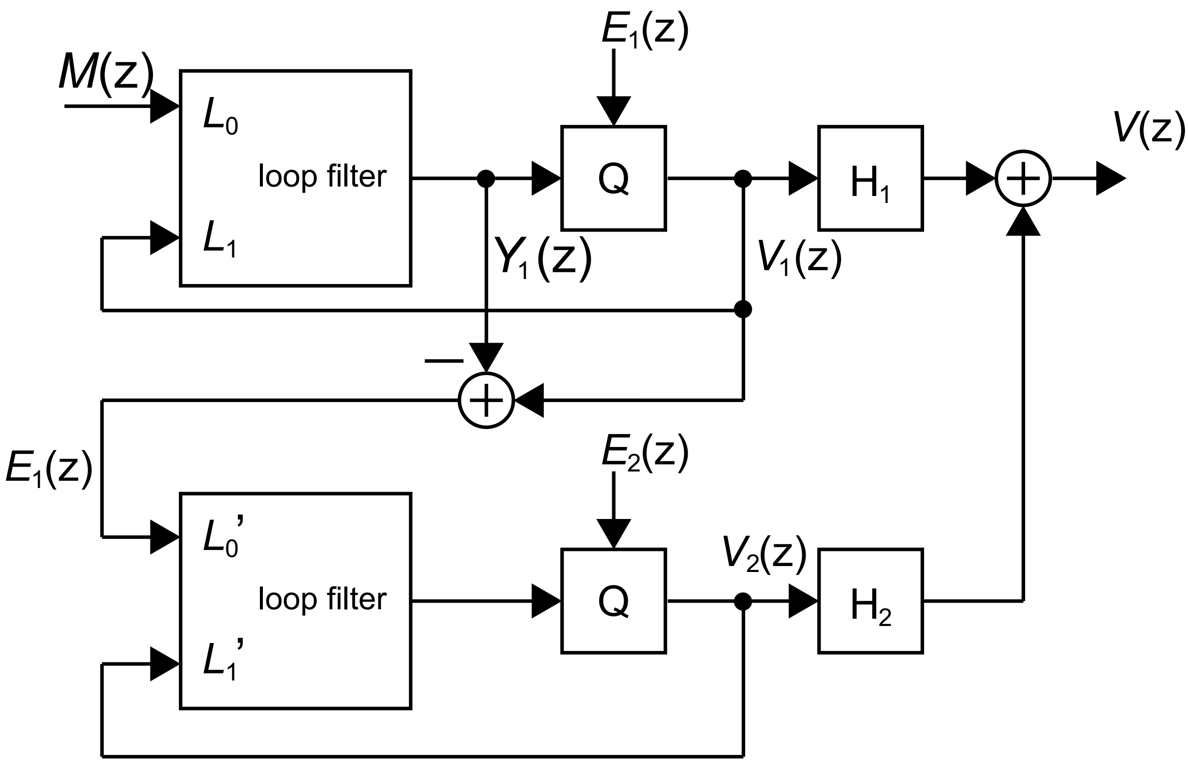


Fig. 2.15: MASH 変調器

が成り立つように $H_1(z)$，$H_2(z)$ を設計することとなる。この式 (2.29) が成立するための最も簡単かつ実用的な $H_1(z)$，$H_2(z)$ は，$H_1(z) = STF_2(z)$，$H_2(z) = NTF_2(z)$ である。$STF_2(z)$ は単なる遅延であることが多いから，$H_1(z)$ は簡単に決定できる。全体の出力 $V(z)$ は

$$V(z) = STF_1(z)STF_2(z)M(z) - NTF_1(z)NTF_2(z)E(z) \tag{2.30}$$

と求められる。典型的なケースでは，MASH の 2 つの段は両方とも 2 次のループフィルタを含んでいて，それらの伝達関数は次のようになる。

$$STF_1(z) = STF_2(z) = z^{-2}NTF_1(z) = NTF_2(z) = (1 - z^{-1})^2 \tag{2.31}$$

したがって，全体の出力は

$$V(z) = z^{-4}M(z) - (1 - z^{-1})^4 E_2(z) \tag{2.32}$$

となる。ノイズシェイピング特性は 4 次のループフィルタと同じであるが，安定性に関しては 2 次のループフィルタと同じである。MASH 変調器は，システムは大きくなるが高次のフィルタ特性を実現しながら，低次の安定性を得られる。また，MASH 変調器は 3 段以上の構造も可能であり，低い次数のループフィルタを使いながら，多段構造とすることで高い次数のループフィルタと同じノイズシェイピング効果が得られる。

2.2 デルタシグマ変調器の安定性解析

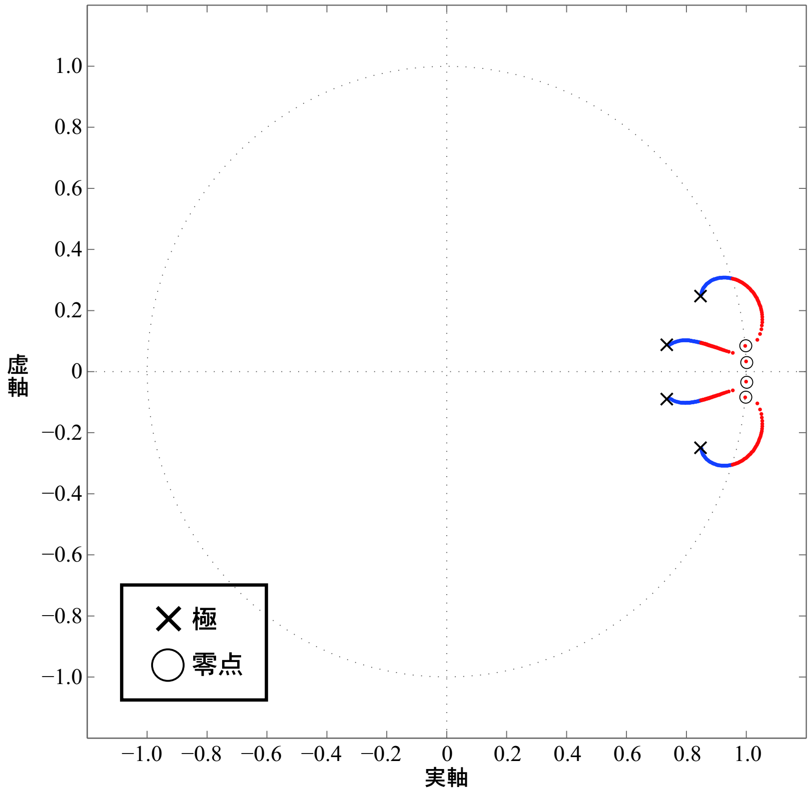
前節においてデルタシグマ型 A-D 変換器の基本的事項について見てきた。そこで変調器はループフィルタと量子化器から構成されることがわかった。ループフィルタがあるということは，フィードバック系であるということでもある。フィードバック系を設計するにあたって考慮しなければならないこととして安定性があげられる。本節ではデルタシグマ変調器の安定性を解析するために用いられるいくつかの手法について述べる。

2.2.1 根軌跡図による安定性解析

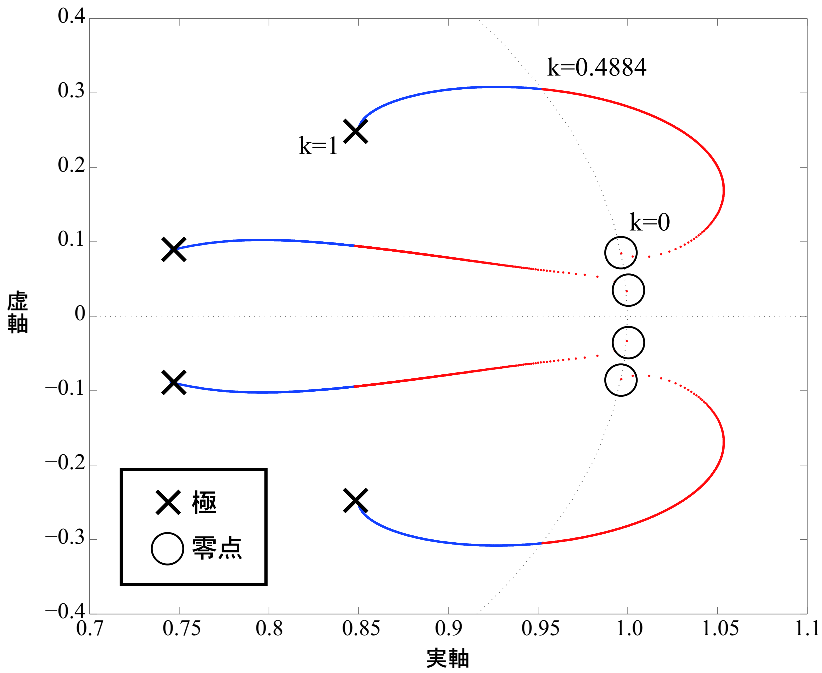
デルタシグマ変調器を線形モデルとして 2.1.7 項で量子化器の動作を量子化雑音の加算として表現するモデルを紹介したが，もう少し具体的な線形モデルとして 2.1.4 項で述べた線形利得 k を導入する方法がある。この k を導入する線形モデルでは，伝達関数 L_0 と L_1 はそれぞれ実効的に kL_0 と kL_1 に置き換えられる。したがって，新しい雑音伝達関数は

$$NTF_k(z) = \frac{1}{1 - kL_1(z)} = \frac{NTF_1(z)}{k + (1-k)NTF_1(z)} \tag{2.33}$$

となる。ここで，$NTF_1(z)$ は $k = 1$ に対する NTF である。この線形モデルに対する分母の根の $0 < k < 1$ に対する軌跡を描くことにより，このシステムの安定性を予測することができる [20]。量子化器への入力によって線形利得は変化するので，場合によっては k は 1 より大きくなるかもしれないが，オーバーロード領域では普通 k は 1 よりも小さい。$k = 0$ に対しては，これらの根は $NTF_1(z)$ の零点と一致し，$k = 1$ についてはその極と一致する。そして，デルタシグマ変調器が安定であるためにはすべての根が単位円内になければならない。一例として，Fig. 2.16 に 4 次デルタシグマ変調器の根軌跡を示す。図中，$\times$ は極を示し，$\bigcirc$ は零点である。Fig. 2.16(a) は単位円全体図であり，Fig. 2.16(b) は拡大図である。根軌跡図による解は，極 $(k = 1)$ から零点 $(k = 0)$ に向かって移動する。大きな線形利得 k に対してすべての根は単位円内にあるが，線形利得 k が減少していきある値よりも小さくなると一組の根が単位円外に移動する。青色の点はすべての解が単位円の内側にある状態であり，赤色の点は一組以上の解が外に出た状態である。Fig. 2.16 の場合，一組の解が単位円から出るときの線形利得 k の値は $k = 0.4884$ である。この安定性解析はあくまでも線形化モデルが安定であるかどうかを述べていることに注意すべきである。デルタシグマ変調器は非線形システムであり，量子化器によって行われる実際の信号処理は線形モデルでは表現できていない。



(a) ある4次の変調器の根軌跡図



(b) ある4次の変調器の根軌跡図（拡大図）

Fig. 2.16: ある 4 次デルタシグマ変調器の利得 k の変化に対する根軌跡

2.2.2 1次デルタシグマ変調器および2次デルタシグマ変調器の安定性

1次デルタシグマ変調器の非線形性を考慮に入れた安定性について考える。$|m| > 1$ の直流入力を与えた場合，DAC が常に -1 の信号をフィードバックすることにより，m と平衡を保とうとするが，それでも正味の入力となる 0.3 が各クロックごとに積分器に入力されるため，やがて y が非常に大きくなり回路が正常に機能しなくなる。反対に，$|m| \leq 1$ および y の初期値が $|y(0)| \leq 2$ を満たす場合，ループは安定状態にとどまり，$|y|$ の値は2以内に収まる。m が時間に対して変化する場合でもこれが安定であるための十分条件であることが以下の導出により容易に確認される。Fig. 2.5 より

$$y(n) = y(n-1) + m(n) - sgn(y(n-1)) \tag{2.34}$$

が得られ，$|y(0)| \leq 2$ の場合，$|y(0) - sgn(y(0))| \leq 1$ となる。したがって，$|m(1)| \leq 1$ であるので，$|y(1)| = |m(1) + y(0) - sgn(y(0))| \leq 2$ となる。これを続けると，$|m(n)| \leq 1$ を満たすすべての n に対し，$|y(2)|$，$|y(3)|$ などのすべてが有界であることを示すことができる。

$|y(0)| > 2$ かつ $|m(n)| \leq 1$ の場合，変調器の出力は，＋1（$y(0) > 2$ の場合）もしくは－1（$y(0) < -2$ の場合）の連続値からなり，$|y|$ はその値が2以下になるまで単調に減少する。この時点で，上で述べた条件が成立し，$|y|$ は2以下の領域にとどまることになる。したがって，1次デルタシグマ変調器は絶対値が1以下の任意の入力に対し安定で，任意の初期条件から安定状態へ回復することが可能であることが明らかになった。

次に2次デルタシグマ変調器の非線形性を考慮に入れた安定性について考える。Fig. 2.7 のように2次デルタシグマ変調器を構成したとき，直流入力時の差分方程式が

$$v(n) = sgn[x_2(n)] \tag{2.35}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} v(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} m \tag{2.36}$$

と表せることを Hein と Zakhor [21,22] が示した。直流入力が $|u| < 1$ を満足するとき，次の不等式が成立する。

$$|x_1| \leq |m| + 2 \tag{2.37}$$

$$|x_2| \leq \frac{(5-|m|)^2}{8(1-|m|)} \tag{2.38}$$

Fig. 2.17 にこれらの式で表される境界とシミュレーションで得られた値を示す。この図が示すように，式から求めた境界は $|m| \leq 0.7$ の範囲において，シミュレーション結果とかなり一致しているが，x_2 の境界は $|m| \to 1$ に近づくにつれ，シミュレーション結果よりも急速に増加している。x_2 は（遅延した）量子化器入力でもあるため，入力振幅がフルスケールに近づくと2次デルタシグマ変調器の量子化器の入力も増加することを Fig. 2.17 は示している。

式 (2.37) と式 (2.38) より，x_2 の範囲は $|m| \to 1$ となるにつれ無限に増加するが，絶対値が1以下の直流入力では，2次デルタシグマ変調器の内部変数は有界であることが保証されている。2次デルタシグマ変調器は入力信号の低周波成分に追従するため，直流入力信号と同様，すべての n

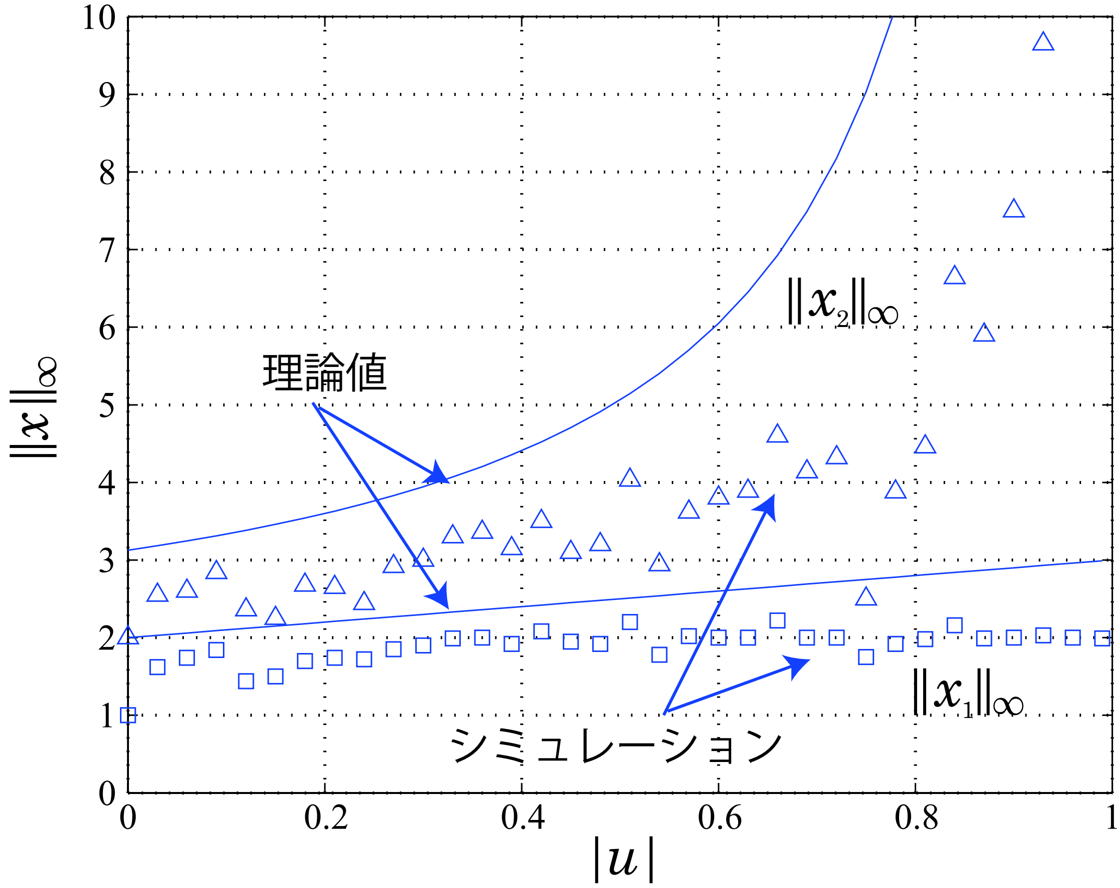


Fig. 2.17: 2次デルタシグマ変調器における状態の境界値

で $|m(n)| \leq 1$ を満たすような時間変動する任意の入力信号もこの範囲内で動作すると考えられる。しかし，2次デルタシグマ変調器は絶対値が 0.1 以下の任意の入力に対して安定であることが知られているが，安定動作を保証する入力振幅の上限値についてはわかっていない。

2.2.3 リーの基準

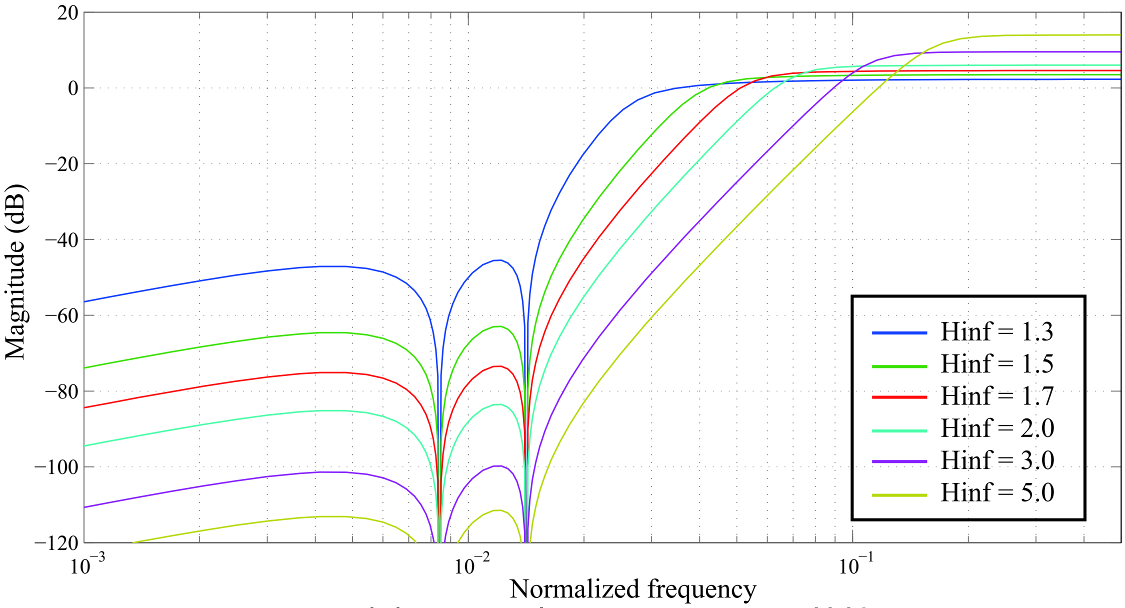
前項までに見てきたように，デルタシグマ変調器の安定性の議論は難しいが，最も多用されている近似的な判断基準がある。それは次の「リーの基準」(Lee criterion) である [8,9]。

$NTF = H(z)$ である2値のデルタシグマ変調器は，$\max_{\omega} |H(e^{j\omega})| < 1.5$ ならば安定である可能性が高い。

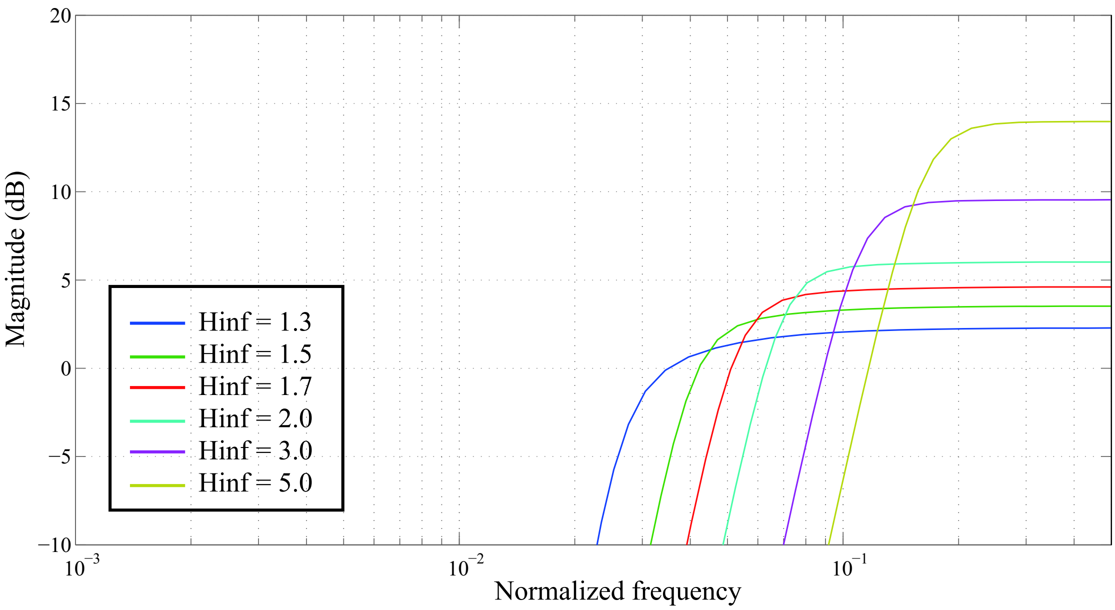
この判定基準は，この基準は入力信号の制限についても何も言っていないため，必要条件でもなく十分条件でもないことに注意しなければならない。それでも，簡明性のためこのリーの基準は設計上の指針として広く利用されている。

この $\max_{\omega} |H(e^{j\omega})|$ は全周波数範囲における NTF の最大利得であって，H の無限大ノルムとしても知られている。その数学的表記は $\|H\|_{\infty}$ である。Fig. 2.18 に synthesizeNTF 関数で設計した，Hinf の値を 1.3 から 5.0 まで変化させた，5次，オーバーサンプリング比 32 の NTF 特性の様子を示す。この場合，同じ次数，同じオーバーサンプリング比で Hinf の値のみを変化させているので，量子化雑音電力はすべての HInf の場合で同じである。Hinf の値を大きくすることで，正規化周波数 0.016 以下の信号周波数帯域での利得が下がっていることがわかる。このように，デルタシグマ変調器の信号周波数帯域での SNR を大きくするためには Hinf の値を大きく設定し，NTF を設計することは有効な手法である。しかし，Hinf の値を大きくして設計すると高周波数帯域の利得が上昇する。デルタシグマ変調器はフィードバック系であるので，高周波数帯域の最大利得が大きくなりすぎると過大入力となってシステムが不安定になりやすくなる。

このリーの基準のオリジナルの記述では安定動作のための限界が $\|H\|_{\infty} < 2.0$ として与えられていたが，高次の変調器に対する検討が進むにつれて，この経験則は限界値として 1.5 を使うように改訂された。中程度の次数の変調器（3次ないし4次）についてはもう少し大きな値が許されることもあるが，非常に高次の変調器（7次あるいはそれ以上）についてはより控えめな $\|H\|_{\infty} < 1.4$ が適切である。



(a) Hinf を変えたときの NTF 特性



(b) -10dB から20dBの拡大図

Fig. 2.18: Hinf の違いによる NTF 特性の違い

第 3 章

ロバスト制御理論

3.1　制御理論の概略

制御理論は古典制御理論，現代制御理論，ロバスト制御理論と発展してきた。古典制御理論は，伝達関数で表されたシステムの入出力特性に関して，周波数応答を評価しながら補償器のパラメータを決定していく制御方法である。また，現代制御理論は状態方程式を用い，時間領域でのシステムを表現し，何らかの評価関数を用いて最適化する制御方法である。さらに，ロバスト制御理論は，制御対象をモデル化したときに避けられないモデル化誤差を考慮し，そのような誤差があっても制御効果が低下しない制御器を設計することを目標とした設計手法であり，古典制御理論と現代制御理論の区分を持たない理論として発展してきた。本論文では代表的なロバスト制御理論を用いてデルタシグマ変調器を設計する手法を提案する。線形ロバスト制御理論の代表として $H\infty$ 制御理論があげられる。$H\infty$ 制御理論は，伝達関数の $H\infty$ ノルムを評価するが，モデル化誤差を外乱とみなし，モデル化誤差の影響を抑えるために制御出力から制御入力に適当なフィードバックを行い，$H\infty$ ノルムを評価しそれを小さくするような設計方法である [26] [27]。まず，本章ではその $H\infty$ 制御理論をベースにした μ 設計法について説明する [28]。そして，非線形ロバスト制御理論として有力な可変構造制御系理論であるスライディングモード制御理論について説明する [28] [29]。

3.2　μ 設計

3.2.1　LFT(Linear Fractional Transformation，線形分数変換)

μ 設計でよく使われる LFT 表現について述べる。LFT 表現は行列変換に用いられ，線形システムの表現や解析に関して有効であり，特に不確かさを考慮したシステムを記述するのに有効な表現形式である。準備として，Fig. 3.1 に示すような複数の入出力をもつ伝達関数 $M(s)$ に対し，入力および出力を以下のように定義しておく。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Fig. 3.2(a) に示すように示すように，y_1 と u_1 を Δ を介して接続し，M の上側に閉ループを構

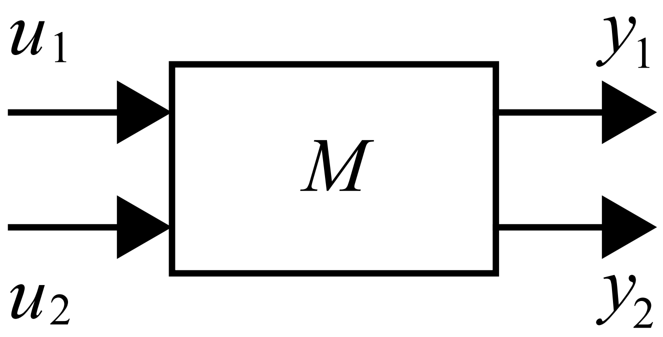


Fig. 3.1: 複数の入出力をもつ伝達関数 $M(s)$

成する。このとき，u_2 から y_2 までの伝達関数 $G_{y_2u_2}$ は，

$$G_{y_2u_2} := [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{21}] \tag{3.2}$$

となる。このとき，式 (3.2) 右辺を $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ と書き，M の Δ による上側線形分数変換 (upper LFT) と呼ぶ。

Fig. 3.2(b) に示すようように示すようように，y_2 と u_2 を伝達関数 N を介して接続し，M の下側に閉ループを構成する。このとき，u_1 から y_1 までの伝達関数 $G_{y_1u_1}$ は，

$$G_{y_1u_1} := [M_{11} + M_{12}N(I - M_{22}N)^{-1}M_{21}] \tag{3.3}$$

となる。このとき，式 (3.3) 右辺を $\mathcal{F}_l(M, N)$ と書き，M の N による下側線形分数変換 (lower LFT) と呼ぶ。

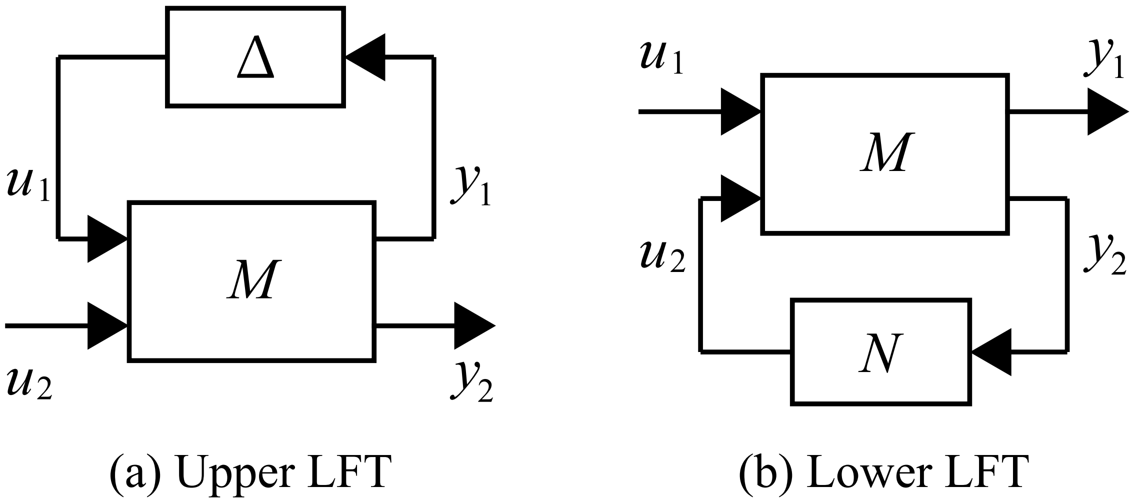


Fig. 3.2: 線形分数変換

3.2.2　構造化特異値 μ

LFT 表現を用い不確かさを考慮したモデルが得られると，つぎに，その不確かさに対して，制御系のロバスト性を解析する。フィードバック系の構造的な不確かさに対する制御系のロバスト性を解析するためには，構造化特異値 μ が使われる。ここで，構造化特異値 μ について定義する。Fig. 3.3 のような閉ループ系があるとする。ここで，行列 M，Δ は安定である。まず，構造的な不確かさを表現するために次のようなブロック構造を考える。

$$\Delta = \{\mathrm{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \cdots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \cdots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathcal{C}, \Delta_j \in \mathcal{C}^{m_j \times m_j}\} \tag{3.4}$$

ここで，Δ のサイズを n とすると

$$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n \tag{3.5}$$

が成立する。最初の S 個の $\delta_i I_{ri}$ は重複スカラブロック，残りの F 個の Δ_i はフルブロックと呼ばれる。

以上のもとで，構造化特異値 μ は次のように定義される。

定義 3.1
ブロック対角化行列の集合 $\Delta \in C^{n\times n}$ と任意に与えられた行列 $M \in C^{n\times n}$ に対して構造化特異値 $\mu_\Delta(M)$ は次式で定義される。

$$\mu_\Delta(M) := \frac{1}{\min\{\overline{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \boldsymbol{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\}} \tag{3.6}$$

ただし，$\det(I - M\Delta) = 0$　となる $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$ が存在しない場合，$\mu_\Delta(M) := 0$ とする。

ここで，$\overline{\sigma}(\cdot)$ は行列の最大特異値であり，また，det は行列式で determinant の略である。このように，構造化特異値 $\mu_\Delta(M)$ は，行列 M に対してだけではなく，ブロック構造 Δ にも依存し

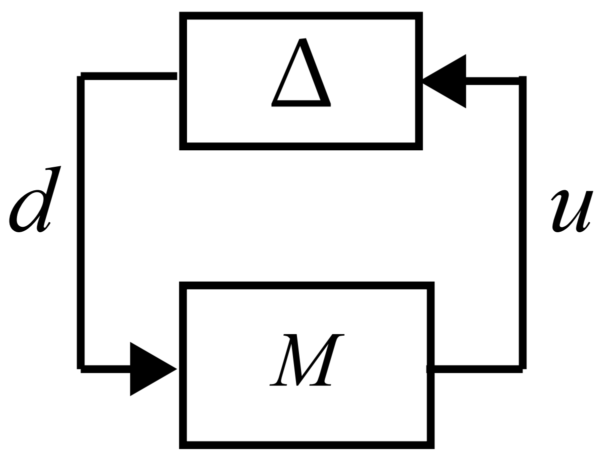


Fig. 3.3: M と Δ による閉ループ系

ている。構造化特異値 $\mu_\Delta(M)$ の直感的な解釈としては，つぎのように考えることができる。Fig. 3.3 のフィードバック系は，

$$u = Md, d = \Delta u \tag{3.7}$$

と表される。もし，$(I - M\Delta)$ が正則ならば，$u = d = 0$ が式（3.7）の唯一の解となる。しかしながら，$(I - M\Delta)$ が正則がでない場合，その解は無数に存在し，したがって $\|u\|$ や $\|d\|$ はいくらでも大きくなる。そこで，便宜上 0 を唯一解としてもつ場合を安定，そうでない場合を不安定と呼ぶことにする。すると，$\mu_\Delta(M)$ はこのフィードバック系を不安定とする最小の構造 Δ の大きさを示してることがわかる。

3.2.3 構造化特異値 μ を用いたロバスト性解析

ノミナルプラント P と加法的な不確かさ Δ からなる次のプラント集合を考える。

$$\tilde{P} = \{P + \Delta W : \|\Delta\|_\infty < 1\} \tag{3.8}$$

ここでスカラの周波数重み W はノミナルプラントに対する不確かさの相対的な大きさを表す。このようにプラントの集合を考えることによりロバスト外乱抑圧の概念を次のように定義する。

定義 3.2
外乱抑圧の制御性能を $\|W_s S\|_\infty < \gamma$ となるように要求する。ここで $S := (I + PK)^{-1}$ である。また，W_s は外乱抑圧の制御性能に関する周波数重みを表す。このとき，コントローラ K が，$\tilde{P}$ で定義されるプラントの集合すべてに対して外乱抑圧の制御性能を保持するとき，ロバスト性能 (robust performance) を達成する。

つぎに構造化特異値 μ を用いてロバスト性能を解析するための枠組みについて考える。この解析を行うために，一般化プラント G は，ノミナルプラント P に加えて，制御性能に関する重みや不確かさに関する重みなどのロバスト性の指標となる情報が記述されている。ここで，Fig. 3.4 より一般化プラント G は，３つの入力と３つの出力を持つことから，これに対応するように次式で表す。

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

つぎに，このプラントの閉ループ系を安定にするコントローラ K が設計されたとすると，観測出力 y から，制御入力 u へのフィードバック $u = Ky$ により Fig. 3.5 の閉ループ系が構成される。ここで，

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

ただし，

$$M_{ij} := G_{ij} + G_{i3}(I - KG_{33})^{-1}KG_{3j} \tag{3.11}$$

である。まず $\Delta = 0$ のときを考えると，入力 d から出力 e までの伝達関数 M_{22} は，ノミナル性

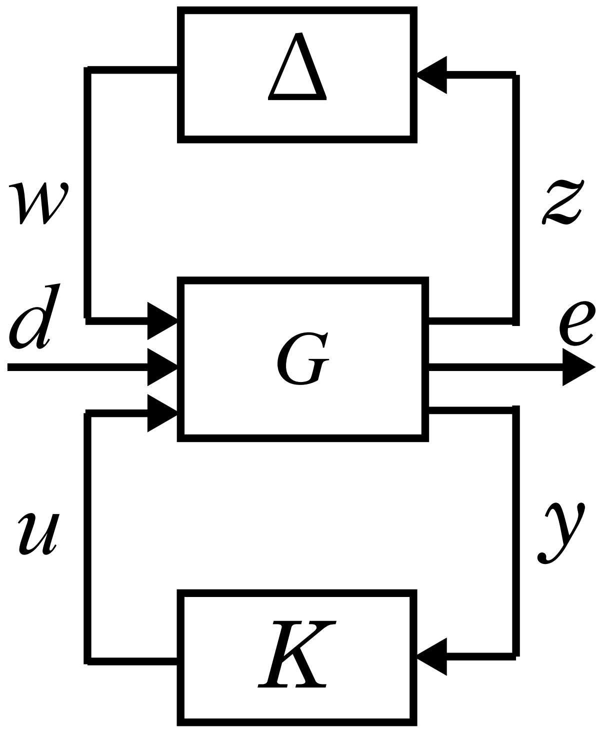


Fig. 3.4: 不確かな閉ループシステム

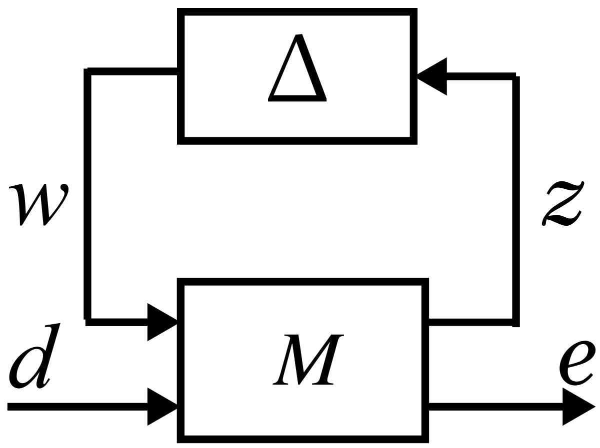


Fig. 3.5: ロバスト解析問題

能を表すことになる。一方，入力 w から出力 z までの伝達関数 M_{11} は，ロバスト安定性を表すことになる。いま，Fig. 3.5 において M は安定とすると，この制御系に対するロバスト性の解析に関して，つぎの結果が得られる。

定理 3.1

1. ノミナル性能の必要十分条件は，次式が成り立つことである。

$$\overline{\sigma}[M_{22}(j\omega)] < 1, \forall\omega \in R \tag{3.12}$$

2. ロバスト安定性の必要十分条件は，次式が成り立つことである。

$$\overline{\sigma}[M_{11}(j\omega)] < 1, \forall\omega \in R \tag{3.13}$$

3. ロバスト性能の必要十分条件は，次式が成り立つことである。

$$\mu_{\Delta}(M(j\omega)) < 1, \forall\omega \in R \tag{3.14}$$

ここで，ロバスト性能について考える。Fig. 3.4 の閉ループ系がロバスト性能を満たすということは，安定かつ $||\Delta||_{\infty} < 1$ を満たすすべての変動 Δ に対して

$$\overline{\sigma}[M_{22} + M_{21}(I - \Delta M_{11})^{-1}\Delta M_{12}] < 1, \forall\omega \in R \tag{3.15}$$

が成り立つことである。ここで，$\Delta = 0$ のときは，式 (3.12) のノミナル性能となる。Fig. 3.5 の閉ループ系に対して，e から v への仮想的な変動 Δ_{perf} でループを閉じた Fig. 3.6 の系を考える。すると，式 (3.15) のロバスト性能は次式のような構造的不確かさ

$$\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_{perf} \end{bmatrix} : ||\Delta||_{\infty} \leq 1, ||\Delta_{perf}||_{\infty} \leq 1 \tag{3.16}$$

をもつ系がロバスト安定であることと等価となる。この構造的不確かさをもつ系のロバスト安定性の必要十分条件はすべての $\omega \in R$ に対して，$det[I - diag(\Delta, \Delta_{perf})M(j\omega)] \neq 0$ となることである。なお，式 (3.14) の構造化特異値 μ はブロック構造 $diag(\Delta, \Delta_{perf})$ に対して定義されている。このときのロバスト性能の必要十分条件は構造的な不確かさに対するロバスト安定性の必要十分条件に帰着され，構造化特異値 μ により解析することができる。

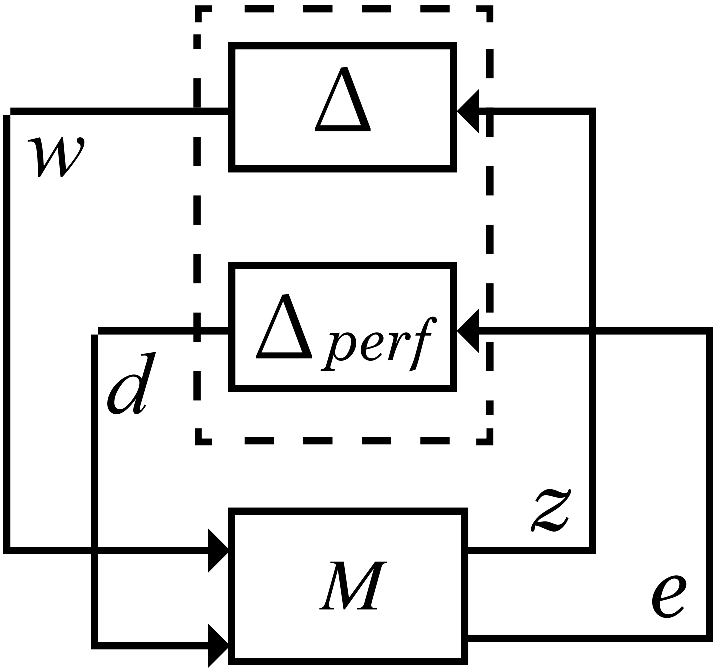


Fig. 3.6: ロバスト性能問題

3.3 スライディングモード制御理論

3.3.1 スライディングモード制御理論の考え方

非線形ロバスト制御理論であるスライディングモード制御理論は可変構造制御理論の 1 つであり，時変なスイッチング入力によりロバストな制御効果を得る制御手法である。具体的には状態空間表現 (3.17) によって表されるシステムについて，式 (3.18) のように制御入力を切り換える制御手法である。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} > 0 \text{ のとき} \\ \boldsymbol{k}_2 & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.18}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は状態変数ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は出力ベクトル，$\boldsymbol{u}$ は制御ベクトルであり，$\boldsymbol{A}$ はシステム行列，$\boldsymbol{B}$ は入力行列，$\boldsymbol{C}$ は出力行列である。このように状態空間表現は，物理システムを 1 階常微分方程式で表した数学モデルである。$\boldsymbol{S}$ は切り替え超平面と呼ばれ，スライディングモード制御理論において外乱を平衡点に拘束させるために重要な役割を持つ。このとき，$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$ は切り換え関数と呼ばれ，フィードバックゲインは σ の符号によって切り替えられる。

幾何学的な解釈の例として，次の 1 入力の 2 次システムを考える。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u \end{cases} \tag{3.19}$$

式 (3.19) で表される 2 次システムについて，制御入力を $u = u_1$ としたときにシステムの状態の位

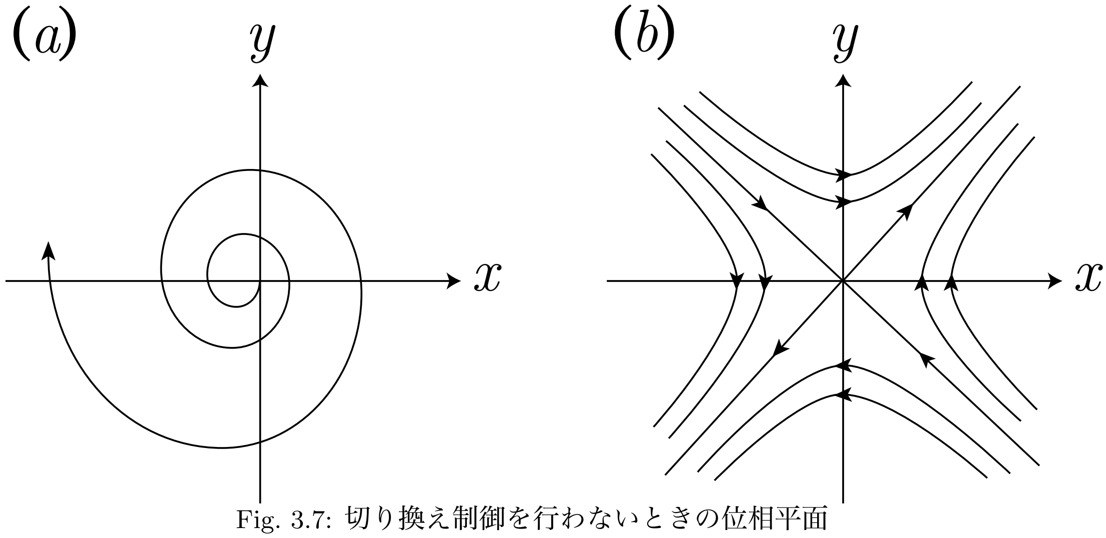


Fig. 3.7: 切り換え制御を行わないときの位相平面

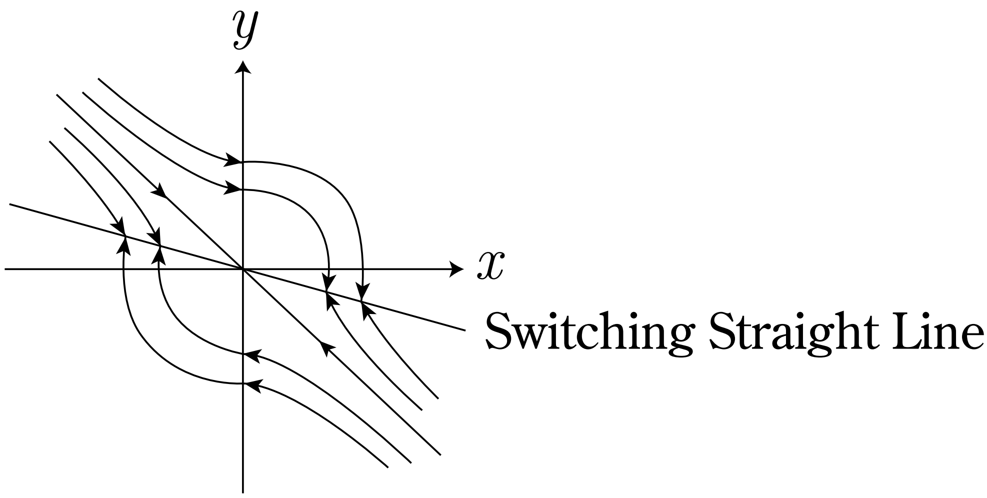


Fig. 3.8: 切り換え制御を行うときの位相平面

相平面軌跡が Fig. 3.7(a) のように表され，$u = u_2$ としたときに Fig. 3.7(b) のように表されるとする。これらの 2 つのシステムは独立には共に不安定なシステムであるが，このシステムに対して Fig. 3.8 のようにフィードバックゲインの切り替え直線を設定し，その直線で分割される領域によって制御入力を切り替えることで，状態はこの切り替え直線に拘束され，平衡点へ向かって滑っていくことになる。この滑り状態のことをスライディングモードと呼ぶ。スライディングモード状態が発生することで外乱の影響を超平面に閉じ込めることができ，制御対象のパラメータ変動などに対しロバストな制御系が構築することができる。また，リアプノフの定理によりシステムの漸近安定が保障される。なお，切り替え直線は位相空間の次数が大きくなるにつれ，切り替え平面，さらには幾何学的に図示が困難な切り替え超平面となる。スライディングモード制御系の設計は，主にこの切り換え超平面の設計とフィードバックゲインの決定を行うことになる。

3.3.2 切り換え超平面の設計

切り替え超平面の設計方法としては，極配置法を用いた設計法，最適制御理論による方法，システムの零点を用いた設計法，周波数整形による設計法など線形制御理論が適用できる。ここでは，システムの零点を用いた設計法について説明する。

線形時不変系を考える。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{3.20}$$

このときの拘束条件を

$$\sigma = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \tag{3.21}$$

とする。入力の切り換えが理想的な状態で行われ，かつ，制御対象が切り換え超平面内に拘束されて $\sigma = 0$ となるとき，線形状態のフィードバック制御入力として

$$u_{eq} = -(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{3.22}$$

が等価的に発生していると考えることができる，この u_{eq} を等価制御入力と呼ぶ。このとき，切り換え超平面での等価制御系は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\}\boldsymbol{x} \tag{3.23}$$

と表すことが出来る。この閉ループ系の固有値は伝達関数 $\boldsymbol{S}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ の $n - m$ 個の零点と，m 個の零点極が存在することになる。切り換え超平面を設計するときには，システムが安定となるように，$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ の零点を複素平面上左半面に設定する必要がある。そのような切り換え超平面の決定法の 1 つとして，最適制御のフィードバックゲイン $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{S}$ として選ぶ方法がある [30]。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \tag{3.24}$$

ただし，$\boldsymbol{P}$ は任意の $\boldsymbol{Q} > 0$ に対して，次のリッカチ方程式の解である。

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{3.25}$$

次に，安定余裕を指定するために，零点の実部が $-\epsilon$ 以下になるように $\boldsymbol{S}$ を設計する手法を説明する。そこで，任意の $\boldsymbol{Q} > 0$ を与えて，リカッチ方程式

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_\epsilon + \boldsymbol{A}_\epsilon^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0 \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \end{cases} \tag{3.26}$$

の解を使った $\boldsymbol{S}$ を求める。ただし，

$$\boldsymbol{A}_\epsilon = \boldsymbol{A} + \epsilon\boldsymbol{I} \quad \epsilon \geq 0 \tag{3.27}$$

である。

3.3.3 スライディングモードコントローラの設計

切り替え超平面の設計が終わったら，その超平面に状態を常に拘束させるための非線形入力である，スライディングモードコントローラの設計を行う。スライディングモードコントローラの設計法には固定階層制御法，自由階層制御法，最終スライディングモード制御法があるが，この中で，設計が容易で有効なのが最終スライディングモード制御法である。この制御法はシステムの状態が任意の初期値から出発して，スライディングモード領域 S_0 に至るまで一度もスライディングモードを生じないで，S_0 領域に入った後，一気にスライディングモードを生じるものである。この制御法の概念図を Fig. 3.9 に示す。図中の任意の点 x_0 から出発し，青色の切り換え超平面 σ_1，赤色の切り換え超平面 σ_2 で拘束されることなく，超平面の交差している黄色の σ_{12} に状態が収束している。

一般には，最終スライディングモード制御入力は線形状態フィードッバック項 u_l と非線形制御項 u_{nl} のそれぞれ独立した 2 つの項からなる。

$$u = u_l + u_{nl} = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} - k(x, t) \tag{3.28}$$

ここで，$\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}$ とすると，u_l は等価制御入力 u_{eq} になる。最終スライディングモードの実現条件を求めると，リアプノフ関数により決定される。$\sigma \to 0$ を実現するために，σ に関する

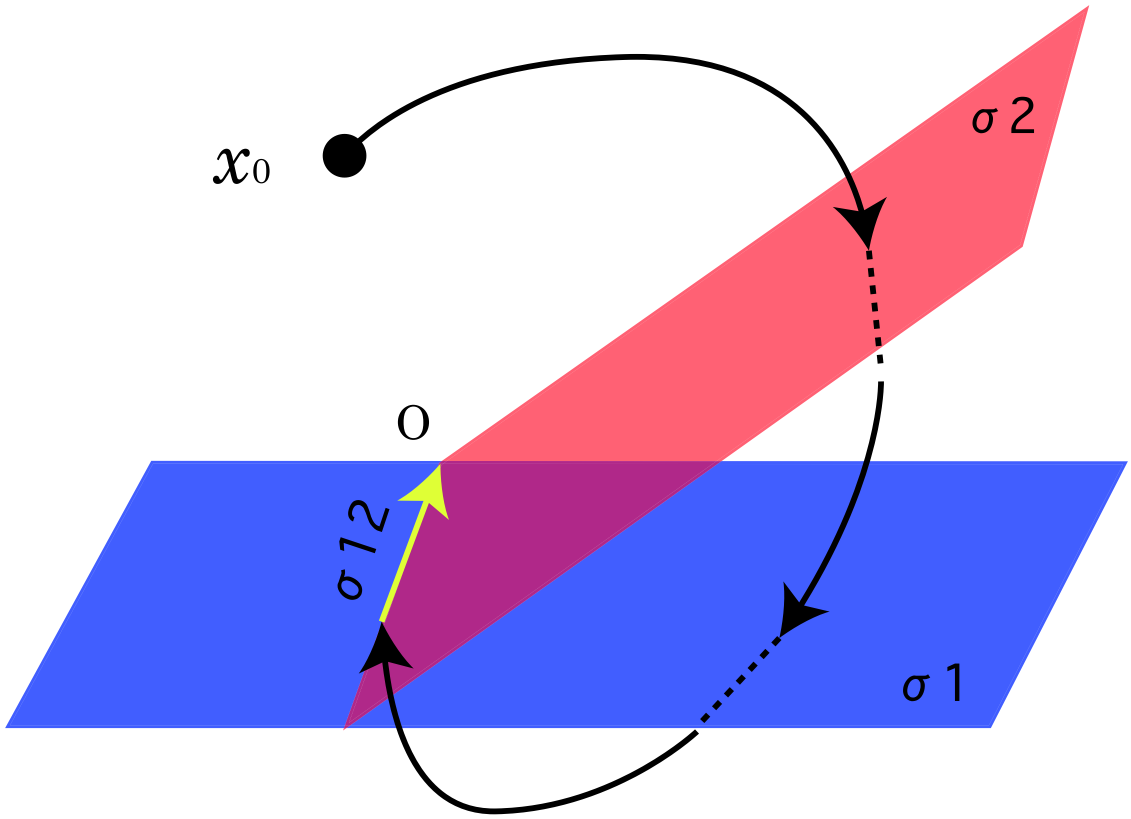


Fig. 3.9: 最終スライディングモード制御法の概念図

リアプノフ関数を

$$V = \frac{\sigma^T \sigma}{2} \tag{3.29}$$

とすると，

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \boldsymbol{SA}x + \sigma^T \boldsymbol{SB}u \tag{3.30}$$

となり，式 (3.28) を式 (3.30) に代入すると，スライディングモードの存在条件は

$$\dot{V} = -k(x,t)\boldsymbol{SB}\frac{\sigma^2}{\parallel \sigma \parallel} < 0 \tag{3.31}$$

となる。したがって，$\boldsymbol{SB} > 0$ のとき $k(x,t) > 0$，$\boldsymbol{SB} < 0$ のとき $k(x,t) < 0$，と $k(x,t)$ を選べば，安定なスライディングモード制御を実現できる。

第 4 章

μ 設計法による高次デルタシグマ変調器の設計

ここでは，デルタシグマ変調器を μ 設計法を用いて設計していく。まず，ループフィルタが構造的な制約を有することを示し，次に線形利得 k の変動を加法的誤差として表現することを提案する。次に仮想的摂動を導入したブロック図を示し，それらの状態空間モデルから一般化プラントを求める。最後にループフィルタを設計するための具体的な計算方法を示す。

4.1 デルタシグマ変調器の設計法

4.1.1 フィードバック制御系としてのデルタシグマ変調器

Fig. 4.1 にデルタシグマ変調器の一般的な構造を示す。Fig. 4.1 において，メモリ機能のある線形なループフィルタと，メモリ機能を持たない非線形な量子化器 Q に分かれている。Fig. 4.1 を線形システムとして解析する場合，Fig. 4.2 に示すように，量子化器 Q を線形利得 k と，それに加わる量子化雑音 E によってモデル化することが一般的である。 Fig. 4.2 より，$k = 1$ の場合に

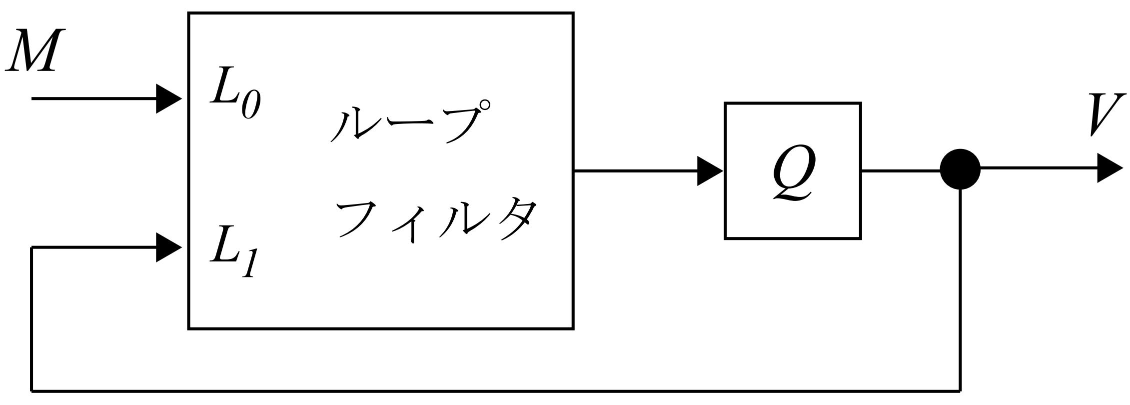


Fig. 4.1: 一般的なデルタシグマ変調器の構造

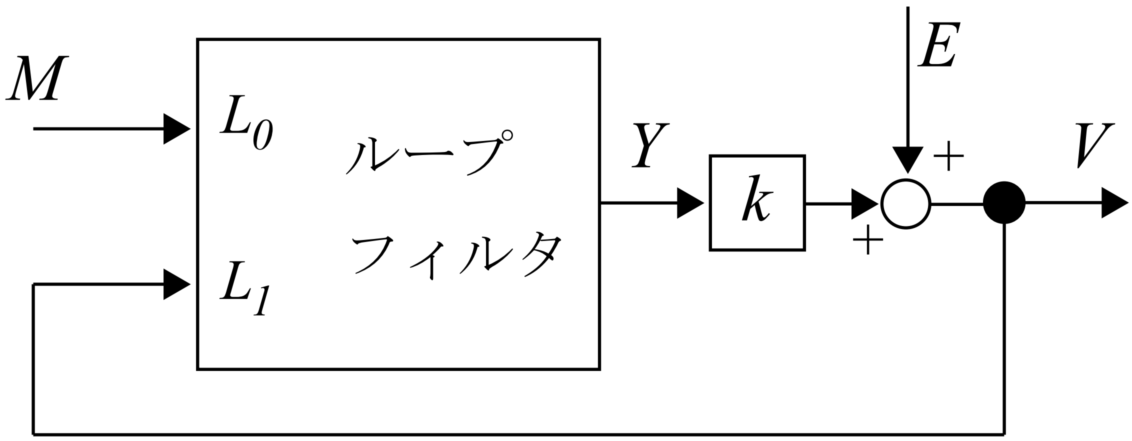


Fig. 4.2: 量子化器を線形モデル化したブロック線図

は，出力 V を変調器の入力 M と量子化雑音 E を用いて書くと，

$$V(z)=\frac{L_0(z)}{1-L_1(z)}M(z)+\frac{1}{1-L_1(z)}E(z) \tag{4.1}$$

と表される。入力信号 M に係る係数は信号伝達関数（STF），量子化雑音 E に係る係数は雑音伝達関数（NTF）と呼ばれ，

$$STF(z)=\frac{L_0(z)}{1-L_1(z)},\quad NTF(z)=\frac{1}{1-L_1(z)} \tag{4.2}$$

である。デルタシグマ変調器では所望の STF と NTF を与えることにより，ループフィルタ L_0,L_1 を計算することになる。

本研究では主に音響信号を扱うデルタシグマ変調器の設計を考えているために，入力される信号は必要な帯域に制約されていると考えると，STF は信号周波数帯域のみ通過させるような特性であることが望ましい。しかし，NTF の設計を簡単にするためにここでは式（4.2）の STF を

$$STF(z)=1 \tag{4.3}$$

とする。これは入力信号をすべて通過させるという十分条件である。式（4.2），式（4.3）より

$$\frac{L_0(z)}{1-L_1(z)}=1 \tag{4.4}$$

であるから

$$L_0(z)=1-L_1(z) \tag{4.5}$$

となる。これはループフィルタ L_1 を設計し，ループフィルタ L_0 は $L_0(z)=1-L_1(z)$ を満たすようにすれば良いことを示している。

また，ループフィルタ L_1 で記述することができる NTF は，次のような形式で書くことができる。

$$NTF(z)=\sum_{k=0}^{N}\frac{a_k z^{-k}}{b_k z^{-k}} \tag{4.6}$$

この変形によりループフィルタ L_1 の設計問題は係数 a_k と b_k を設計する問題に置き換えることができる。ここで，デルタシグマ変調器のループフィルタを設計するときに重要な実現可能性条件がある。それは，

$$ntf(0) = NTF(\infty) = \frac{a_0}{b_0} = 1 \tag{4.7}$$

を満たす必要があるということである。ここで ntf は NTF のインパルス応答を表す。この条件は物理的に実現不可能な遅延なしのループが変調器に存在することを避けるために，ループフィルタの入力 $v(n)$ と出力 $y(n)$ の間に少なくとも 1 つの遅延がなければならないということを示したものである。これはループフィルタ L_1 の選択にとって厳しい制約となる。ループフィルタ L_1 を係数 a_k と b_k を用いて表すと

$$\begin{aligned} L_1(z) &= 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k z^{-k}}{b_k z^{-k}}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。式（4.7）と式（4.8）より，

$$L_1(z) = \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}{a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.9}$$

のように変形され，さらにこの式の分子多項式と分母多項式にそれぞれ z^N を掛けることで，

$$L_1(z) = \frac{\sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) z^{N-k}}{a_0 z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}} \tag{4.10}$$

が得られる。これは，分子多項式の次数が分母多項式の次数よりも少ない厳密にプロパーと呼ばれる構造となっていることを示している。以上より，設計するループフィルタ（制御器）L_1 は実現可能性条件を満たすために厳密にプロパーな構造に限定されるという制約を有することがわかった。

4.1.2 デルタシグマ変調器の不確かさ

Fig. 4.1，Fig. 4.2 のデルタシグマ変調器においてループフィルタ L_1 を制御器とすると，制御対象（プラント）は量子化器 Q となる。この量子化器を線形モデルとして表すために導入された線形利得 k をノミナルプラント P として採用する。そのノミナルプラントとしての線形利得 k は，量子化器の入力 y の統計的性質に依存して変化する。この変動を Fig. 4.3 のような加法的誤差として表すことにする。このようにノミナルプラントを線形利得 k，その変動を加法的誤差として表現することにより，プラント集合は以下のように表される。

$$\tilde{P} = k + \Delta W, \qquad \|\Delta\|_\infty \leq 1 \tag{4.11}$$

このプラント集合を制御対象とし，μ 設計法を適用してループフィルタ L_1 を設計していく。

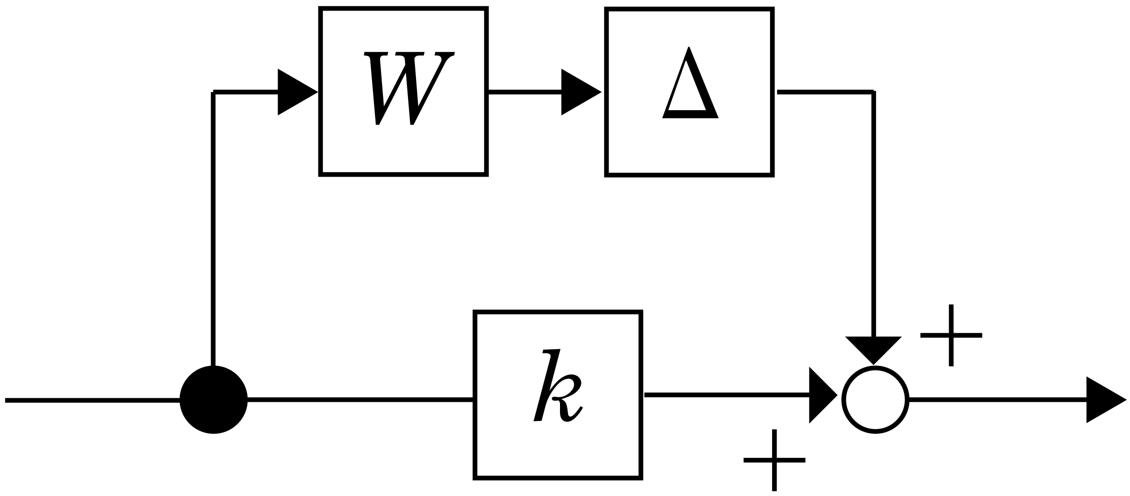


Fig. 4.3: 線形利得 k と加法的な不確かさ

4.1.3 μ設計法の適用

ここから具体的な設計手法を述べる。Fig. 4.4 は，デルタシグマ変調器の量子化器を線形モデル化した線形利得 k をノミナルプラントとしたときに，加法的誤差と外乱抑圧問題を μ 設計に基づく設計法で取り扱うためのブロック線図である。W_s は外乱抑制問題における重み関数であり，L_1 は設計するループフィルタである。ここでノミナルプラント k の状態空間モデルは

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{A_p} x + \boldsymbol{B_p} u \\ y_1 = \boldsymbol{C_p} x + \boldsymbol{D_p} u \end{cases} \tag{4.12}$$

のように表され，$\boldsymbol{A_p} = \boldsymbol{B_p} = \boldsymbol{C_p} = 0, \boldsymbol{D_p} = k$ である。
また，W_m は制御対象の加法的誤差 Δ の上限値を表す重み関数で，その状態空間モデルは

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \boldsymbol{A_{wm}} r_1 + \boldsymbol{B_{wm}} u \\ w = \boldsymbol{C_{wm}} r_1 + \boldsymbol{D_{wm}} u \end{cases} \tag{4.13}$$

のように表される。W_m はスカラ値であるため，$\boldsymbol{A_{wm}} = \boldsymbol{B_{wm}} = \boldsymbol{C_{wm}} = 0, \boldsymbol{D_{wm}} = W_m$，となる。
さらに，W_s は外乱抑圧問題における重み関数であり，同様に状態空間モデルは

$$\begin{cases} \dot{r}_2 = \boldsymbol{A_{ws}} r_2 + \boldsymbol{B_{ws}} y_2 \\ d = \boldsymbol{C_{ws}} r_2 + \boldsymbol{D_{ws}} y_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

と表すことができる。$\boldsymbol{A_{ws}}$，$\boldsymbol{B_{ws}}$，$\boldsymbol{C_{ws}}$，$\boldsymbol{D_{ws}}$ の具体的な値は適用する重み関数を状態方程式で表した値になる。Δ_{perf} は安定で仮想的摂動

$$\|\Delta_{perf}\|_\infty < 1 \tag{4.15}$$

を満たす値である。外乱抑圧のロバスト性能問題は Δ_{perf} を付加したフィードバック系のロバスト安定化問題と等価になる。外乱抑圧の重みを考慮することで制御性能のロバスト性を考慮に入れ

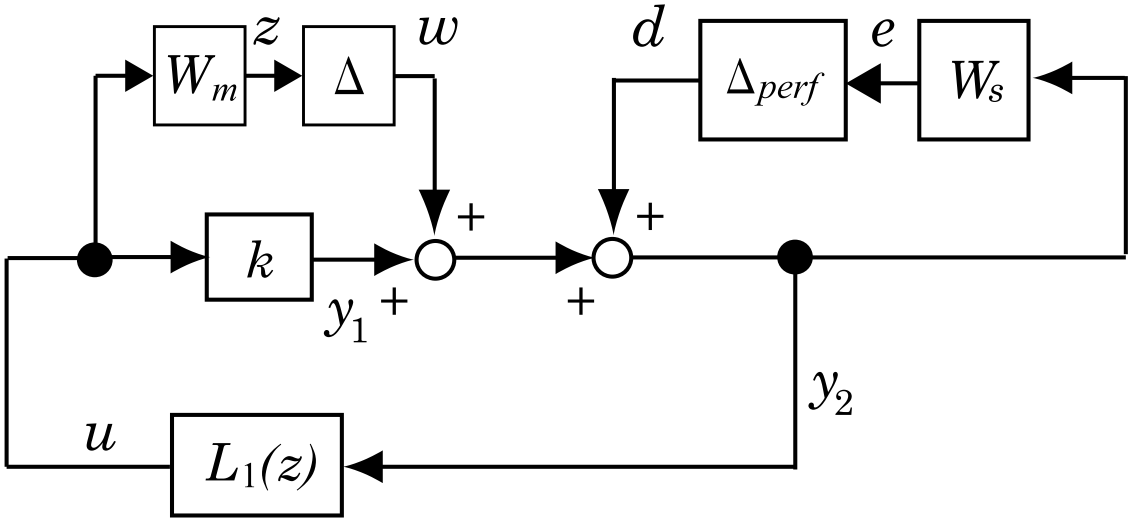


Fig. 4.4: 2 つの不確かさを含むシステム

たループフィルタの設計が可能となる。この場合の一般化プラント G は

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{c|cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} \\ \hline \boldsymbol{C_1} & \boldsymbol{D_{11}} & \boldsymbol{D_{12}} \\ \boldsymbol{C_2} & \boldsymbol{D_{21}} & \boldsymbol{D_{22}} \end{array}\right] \tag{4.16}$$

ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{wm}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_{ws}} & \boldsymbol{B_{ws}C_p} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_p} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B_{ws}} & \boldsymbol{B_{ws}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_{wm}} \\ \boldsymbol{B_{ws}D_p} \\ \boldsymbol{B_p} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_{wm}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_{ws}} & \boldsymbol{D_{ws}C_p} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_p} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D_{11}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D_{ws}} & \boldsymbol{D_{ws}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{D_{12}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D_{wm}} \\ \boldsymbol{D_{ws}D_p} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D_{21}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \boldsymbol{D_{22}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D_p} \end{bmatrix}$$

となる。

ところで，物理的に不可能な遅延無しのループがデルタシグマ変調器内に存在することを避けるため，ループフィルタ $L_1(z)$ の入出力間には少なくとも 1 サンプルの遅延が存在しなければならないことから，$L_1(z)$ は厳密でプロパーな構造に限定される。このことから，$L_1(z)$ を求める問題は定数フィードバックゲイン問題 [31] に変換できる。ここで Fig. 4.4 のループフィルタ $L_1(z)$ を定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ となるように一般化プラント $\boldsymbol{G}$ を変形すると，変形後の一般化プラント $\boldsymbol{G_s}$ は次式となる。

$$\boldsymbol{G_s} = \left[\begin{array}{cc|cccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{C_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D_{11}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D_{12}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C_2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D_{21}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D_{22}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \tag{4.17}$$

この変換を行うことで，

$$\boldsymbol{L_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{L_1}} & \boldsymbol{B_{L_1}} \\ \boldsymbol{C_{L_1}} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

のように状態空間表現されたループフィルタ $\boldsymbol{L_1}$ は

$$\boldsymbol{K} = block - diag(\boldsymbol{A_{L_1}}, \boldsymbol{B_{L_1}}, \boldsymbol{C_{L_1}}) \tag{4.19}$$

と定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ に変換でき，一般化プラント $\boldsymbol{G_s}$ への変換を含め，これらは単に代数変換にすぎない。

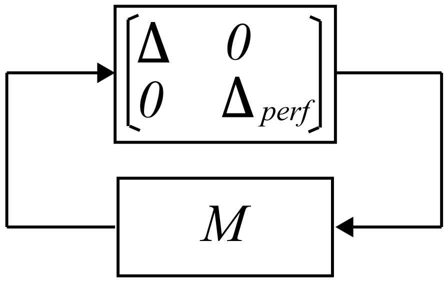


Fig. 4.5: 構造化変動システム

また，このフィードバック系は Fig. 4.5 のようにブロック対角化行列の構造を有する構造化摂動と，一般化プラント $\boldsymbol{G_s}$ と定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ で表される行列 $\boldsymbol{M} = \mathcal{F}_l(G_s, \boldsymbol{K})$ で定義される。$\boldsymbol{M} = \mathcal{F}_l(G_s, \boldsymbol{K})$ は G_s の $\boldsymbol{K}$ による下側線形分数変換である。このときフィードバック系のロバスト安定化問題は μ 設計に帰着する。すなわち，ロバスト性能の必要十分条件が行列 $\boldsymbol{M}$ を用いて次式で表される。

$$\mu_\Delta\{M(j\omega)\} < 1, \forall\omega \in R \tag{4.20}$$

Fig. 4.4 の二つの不確かさを含むシステムを，以上に述べた設計対象であるループフィルタ L_1 を定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ へ変換，一般化プラント G_s への変換，構造化変動システム $\boldsymbol{M}$ に対応した制御系ブロック線図を Fig. 4.6 に示す。

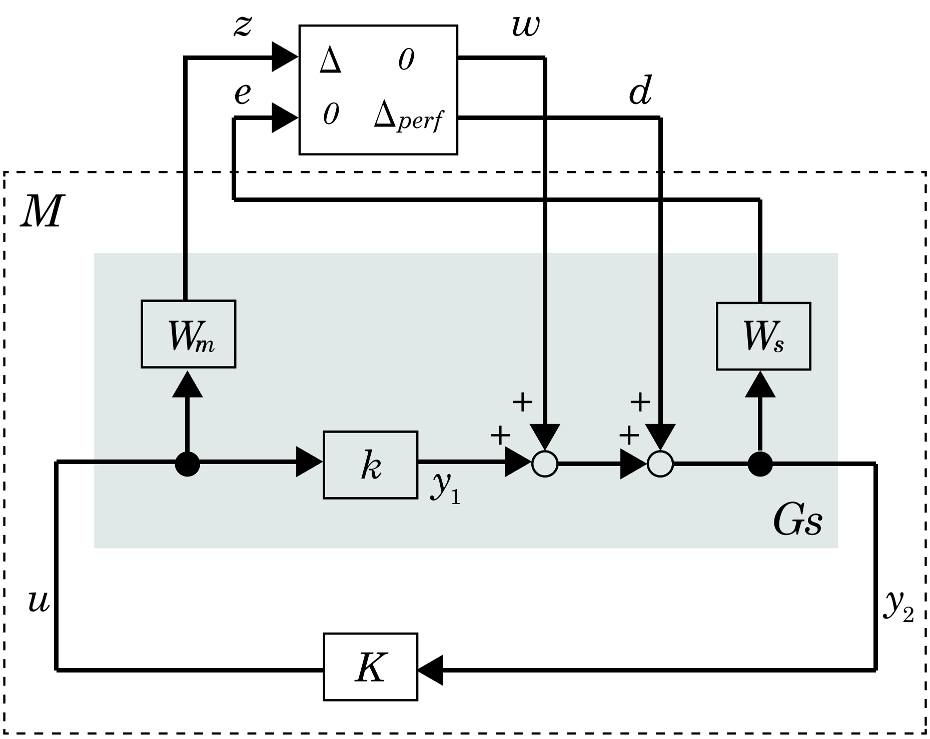


Fig. 4.6: 制御系ブロック線図

デルタシグマ変調器の外乱抑圧のロバスト性能の条件が，構造化摂動を解析するのに必要な構造化特異値 μ と呼ばれる値を用いた条件に変換された。この条件から，定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$(厳密にプロパーなループフィルタ $L_1(z)$) を求めればよい。しかし，μ 設計問題を直接解くのは極めて困難であり，スケーリング行列 $\boldsymbol{D}$ を用いた，D-K イタレーションと呼ばれるアルゴリズムを用いて近似解を求める手法が一般的である。スケーリング行列 $\boldsymbol{D}$ は以下のような条件をみたす集合である。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} := \{D|D = diag(D_1,\cdots,D_s,d_1 I_{m1},\cdots,d_{F-1}I_{m_{F-1}},I_{m_F})\}\\ : D_i \in \boldsymbol{C}^{r_i\times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \boldsymbol{R}, d_j > 0\end{aligned} \tag{4.21}$$

D-K イタレーションの手順を以下に示す。

1. スケーリング行列 $D = I$ とする。
2. スケーリング行列 D を固定し，$\|\mathcal{F}_l(\hat{G}_s, \boldsymbol{K})\|_\infty$ を最小にする定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ を HIFOO [32] によって求める。ここで，$\hat{G}_s$ は Fig. 4.7 のスケーリング行列 D により拡大された次式で表される一般化プラントである。

$$\hat{G}_s = \begin{bmatrix} D & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & I \end{bmatrix} G_s \begin{bmatrix} D^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & I \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

3. 求めた定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ を
固定し，全周波数帯域の各点において
$\sigma_{max}(D_\omega \mathcal{F}_l(G_s, \boldsymbol{K})D_\omega^{-1})$ をスケーリング行列 D に関して最小化する。
4. 3）で求めた最適なスケーリング行列 D を前回の D と比較し，近ければ終了する。そうでなければ D を低次の安定最小位相のスカラ伝達関数でマッチングし 2）に戻る。

以上のようにノミナルプラント k，重み関数 W_s と W_m を状態空間で表現し，ループフィルタ $L_1(z)$ を定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ を求める問題に帰着させ，D-K イタレーションを用いて定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ を近似的に求めることでループフィルタ $L_1(z)$ を求めることができ，デルタシグマ変調器のループフィルタ $L_1(z)$ の設計に μ 設計法を適用することができる。

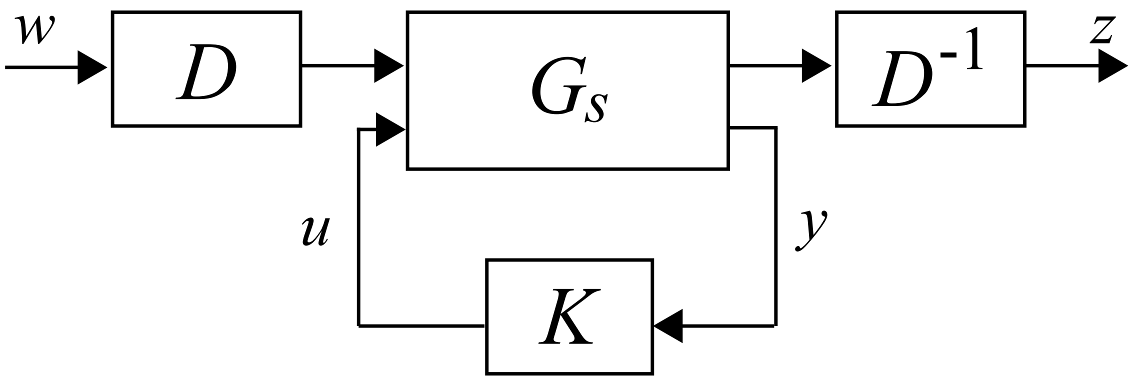


Fig. 4.7: スケーリング行列 D と一般化プラント

4.2 設計例とシミュレーションによる特性評価

4.2.1 7 次，11 次デルタシグマ変調器の設計例

現在，主に使用されているデルタシグマ変調器のループフィルタの次数は 5 次程度であるため，5 次よりも大きな次数でのシミュレーション結果の例として，設計例として，提案手法に基づく方法でオーバーサンプリング比（OSR）32 の 7 次のデルタシグマ変調器を設計する。

μ 設計法において使用する加法的誤差の上限を近似する重み関数 W_m を設定する。ノミナルプラント $k=1$ からの加法的誤差の上限として

$$W_m = 0.5 \tag{4.23}$$

とする。ノミナルプラントは量子化器を量子化器への入力信号の統計値を線形利得 k で近似している。デルタシグマ変調器が動作していると線形利得 k の値は変化し，その変化量を加法的誤差として表現する。$W_m = 0.5$ としたのは加法的誤差を大きく見積もりすぎるとシステムの安定性は増すが制御性能，つまりノイズシェイピング特性が保守的になりやすい。そのため，ノミナルプラント $k=1$ からの誤差を ± 0.5 と設定した。

次に，量子化雑音から出力への影響を抑圧するための外乱抑制問題における重み関数 W_s を設計する必要がある。所望の NTF の周波数特性は信号周波数帯域内ではできる限りゲインを小さく，高域においてゲインが大きくなるような特性である。そのような特性の NTF を実現するためには重み関数 W_s を信号周波数帯域ではできるかぎり大きく，高域において小さくするとよい。W_s を実現するには，synthesizeNTF 関数 [10] の NTF の逆フィルタを用いることとした。synthesizeNTF 関数とはデルタシグマ変調器の解析や考察によるループフィルタ設計技術を反映し，デルタシグマ変調器の設計初心者でも簡単に，ある程度の性能を確保したループフィルタを設計できる MATLAB のツールボックスであり，広く利用されている。さて，synthesizeNTF 関数によって設計される NTF を synthesizeNTF とすると，

$$synthesizeNTF(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{(z - z_k)}{(z - p_k)} \tag{4.24}$$

と表され，p_k と z_k は synthesizeNTF の極と零点を表している。零点 z_k は信号周波数帯域における雑音パワー最小化のために，単位円上に分散配置されているため，そのまま式（4.24）を逆フィルタにすると極が単位円上に位置することとなり，安定な重み関数とはならない。そこで次式（4.25）のような操作を施した重み関数 W_s を用いる。

$$W_s = \prod_{k=1}^{N} \frac{(z - p_k)}{(z - \alpha z_k)} \tag{4.25}$$

式（4.25）の分母における α を 1 よりも小さい値にすることで安定な重み関数となる。しかし，この α を 1 よりも小さくしすぎると信号周波数帯域におけるゲインが小さくなり，結果として NTF の信号周波数帯域におけるディップの深さが減少することが考えられる。よって，信号周波数帯

Table.4.1: 重み関数パラメータ

order	7	α	0.9999999
osr	32	g	0.15
Hinf	1.5		

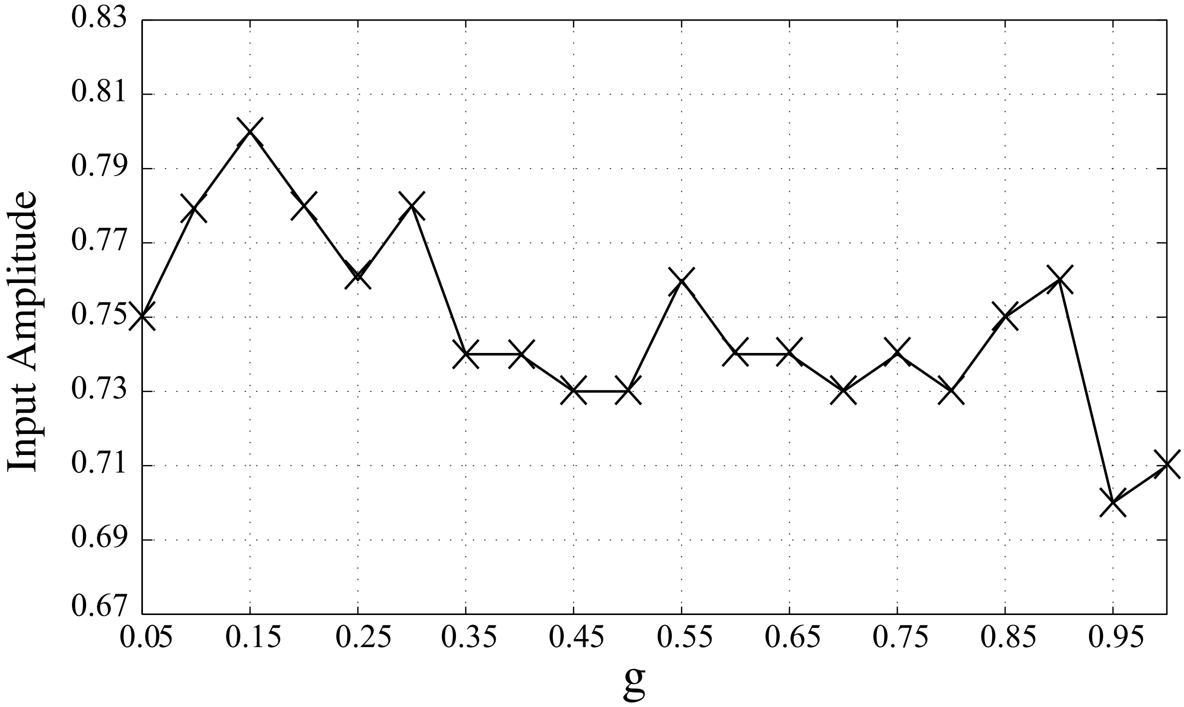


Fig. 4.8: g に対する入力振幅安定性

域におけるディップを深くするために，解が求まる範囲でなるべく大きな α を用いる必要がある。Table.4.1 に重み関数 W_s のパラメータを示す。order，osr，Hinf は synthesizeNTF 関数を使って NTF を設計する際に必要なパラメータである。order は NTF の次数で 7 次のデルタシグマ変調器を設計しているので 7 に設定し，osr はオーバーサンプリング比で設計するデルタシグマ変調器に合わせ 32 に設定した。Hinf はリーの基準で一般的に使用される基準値である 1.5 に設定した。ここまでの設定パラメータは次節で性能比較をする synthesizeNTF 関数のパラメータでもあり，このパラメータにより設計される synthesizeNTF 関数の NTF の逆フィルタを重み関数 W_s として採用するのが適当だと考えた。また，この重み関数を 7 次のループフィルタ設計のための重み関数であるため重み関数 W_{s7} とする。g は重み関数 W_{s7} に掛けるゲインであるが，g を 1 より大きな値に設定するとループフィルタの設計時間が増大する傾向にあり，また計算により導かれたループフィルタも不安定になりやすい傾向が確認された。Fig. 4.8 は g を 0.05 から 1.0 まで変化させたときのシステムが不安定になる正弦波の入力振幅の最大値を表したグラフである。おおむね入力振幅が 0.75 前後までシステムが安定ではあるが，今回の設計では入力振幅安定性が高いと考えられる 0.15 を採用し設計を進めることにする。これらのパラメータを用いて設計された重み関数

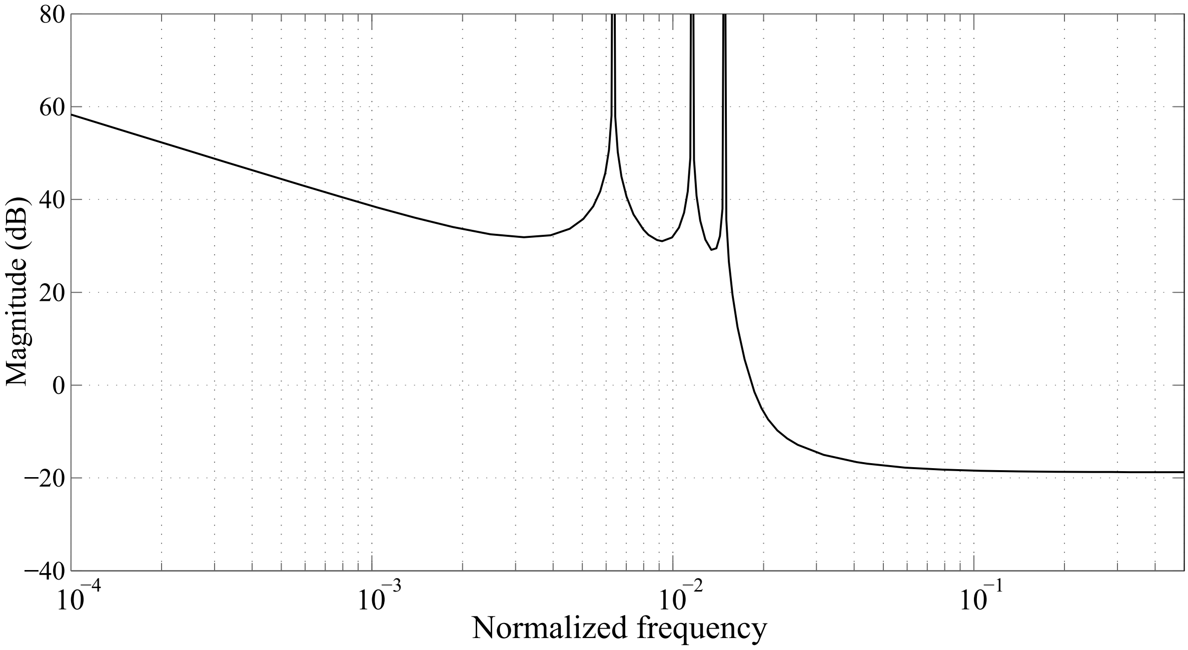


Fig. 4.9: 重み関数 Ws_7 の振幅周波数特性

Ws_7 の振幅周波数特性を Fig. 4.9 に示す。

以上の重み関数 W_m，Ws_7 を用いて，提案手法により設計された 7 次の NTF を式（4.26）に示し，その NTF の特性を Fig. 4.10 に示す。

$$NTF_7(z)=\frac{(z-1)(z^2-1.998z+1)(z^2-1.995z+1)(z^2-1.991z+1)}{(z-0.8666)(z^2-1.899z+0.913)(z^2-1.966z+0.9884)(z^2-1.43z+0.5903)} \tag{4.26}$$

提案手法によって設計されたループフィルタ L_1 を，Fig. 4.11 に示すような CRFB トポロジーで実現する場合の係数を Table.4.2 に示す。

Table.4.2: 7 次の CRFB トポロジーの係数

a_1	-6.9910×10^{-6}	b_1	-6.9910×10^{-6}	c_1	1	g_1	0.0016
a_2	1.9908×10^{-4}	b_2	1.9908×10^{-4}	c_2	1	g_2	0.0053
a_3	0.0025	b_3	0.0025	c_3	1	g_3	0.0087
a_4	-0.0104	b_4	-0.0104	c_4	1		
a_5	0.1074	b_5	0.1074	c_5	1		
a_6	0.2965	b_6	0.2965	c_6	1		
a_7	0.4639	b_7	0.4639	c_7	1		
		b_8	1.0000				

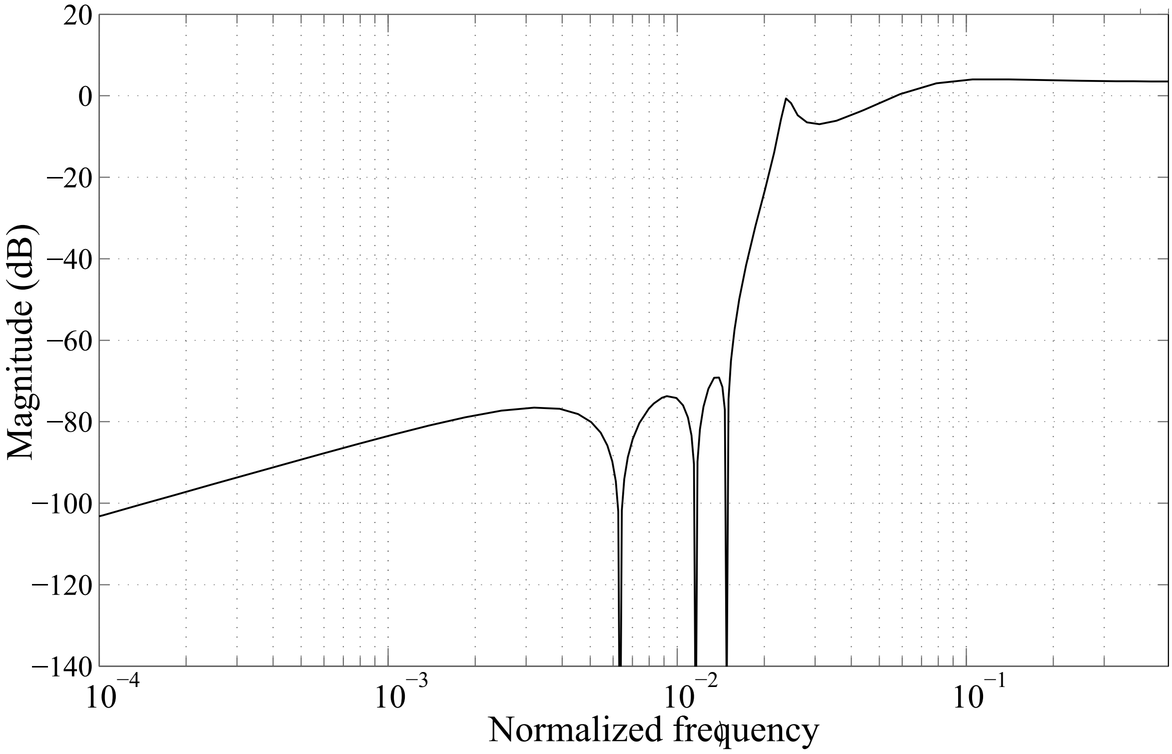


Fig. 4.10: μ 設計法で設計した 7 次ループフィルタの NTF 特性

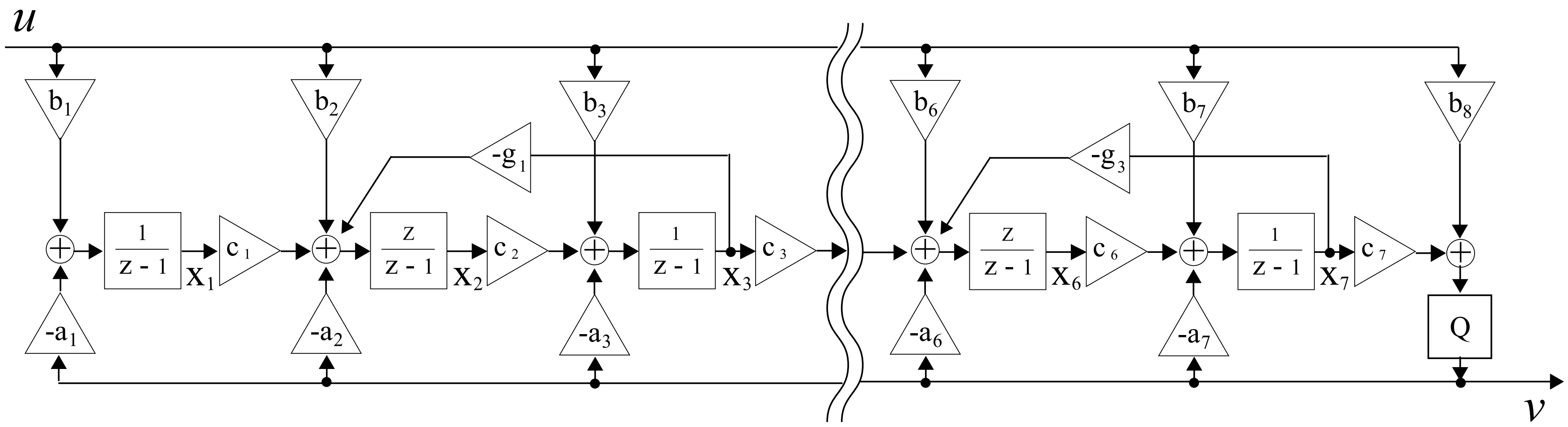


Fig. 4.11: 7 次の CRFB トポロジー

10 次以上の高次デルタシグマ変調器のループフィルタ設計例として 11 次の場合を示す。提案手法での 11 次の NTF を設計するためのパラメータを示す。重み関数 W_m は 7 次と同じく 0.5 に設定した。重み関数 W_s のパラメータは Table.4.1 から order=11，α=0.99999999999999，g=0.9 に変更した。これらのパラメータを用いて設計された重み関数 Ws_{11} の振幅周波数特性を Fig. 4.12 に示す。以上の重み関数によって設計した 11 次の NTF の式を式 (4.27) に示し，その NTF の特性を Fig. 4.13 に示す。

$$NTF_{11}(z)=\frac{(z-1)(z^2-2z+1)(z^2-1.997z+0.9998)(z^2-1.993z+0.9987)}{(z-0.9358)(z^2-1.899z+0.9039)z^2-1.607z+0.6494)(z^2-1.938z+0.9495)} \times\frac{(z^2-1.994z+1.002)(z^2-1.99z+0.9996)}{(z^2-1.955z+0.9761)(z^2-1.752z+0.67886)} \tag{4.27}$$

このループフィルタを CRFB トポロジーで実現する場合の係数を Table.4.3 に示す。

Table.4.3: 11 次の CRFB トポロジーの係数

a_1	6.3763×10^{-10}	b_1	6.3763×10^{-10}	c_1	1	g_1	0.0065
a_2	-1.8617$\times 10^{-8}$	b_2	-1.8617$\times 10^{-8}$	c_2	1	g_2	0.0098
a_3	8.6005×10^{-7}	b_3	8.6005×10^{-7}	c_3	1	g_3	0.0027
a_4	-6.5721$\times 10^{-6}$	b_4	-6.5721$\times 10^{-6}$	c_4	1	g_4	4.2469×10^{-4}
a_5	-1.7626$\times 10^{-5}$	b_5	-1.7626$\times 10^{-5}$	c_5	1	g_5	0.0059
a_6	4.4098×10^{-4}	b_6	4.4098×10^{-4}	c_6	1		
a_7	7.6810×10^{-4}	b_7	7.6810×10^{-4}	c_7	1		
a_8	0.0123	b_8	0.0123	c_8	1		
a_9	0.0678	b_9	0.0678	c_9	1		
a_{10}	0.2894	b_{10}	0.2894	c_{10}	1		
a_{11}	0.5974	b_{11}	0.5974	c_{11}	1		
		b_{12}	1.0000				

以上のように設計した 7 次と１１次のループフィルタを用いたデルタシグマ変調器について計算機シミュレーションによる検討をおこなう。

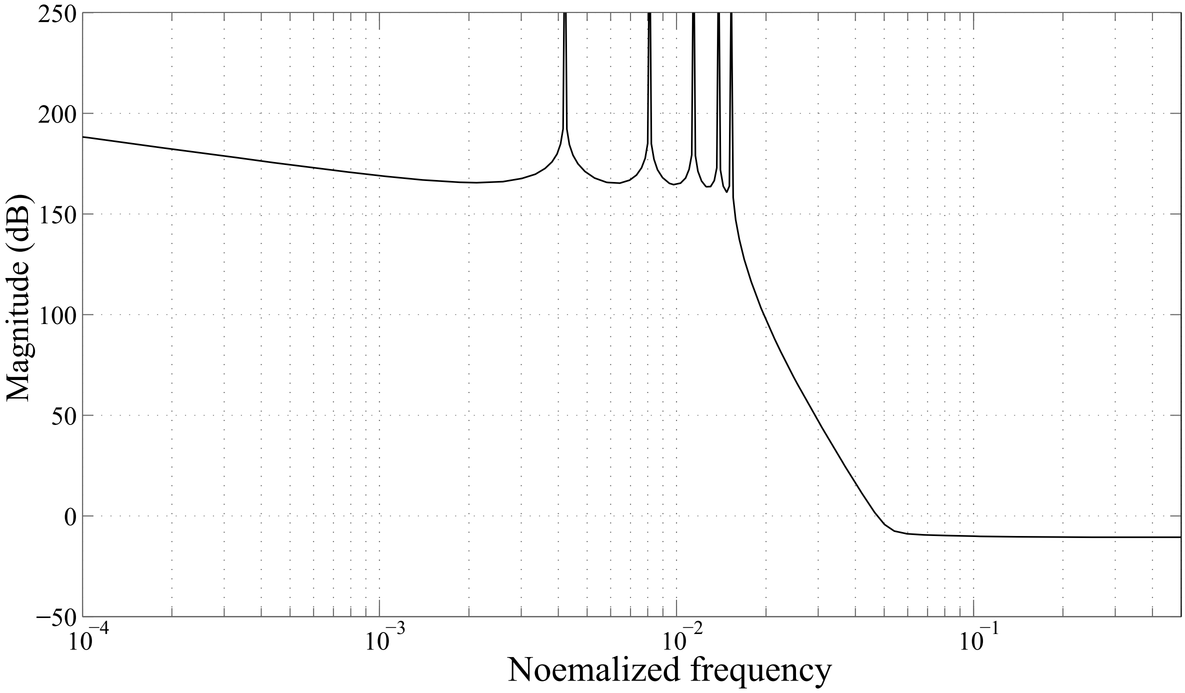


Fig. 4.12: 重み関数 Ws_{11} の振幅周波数特性

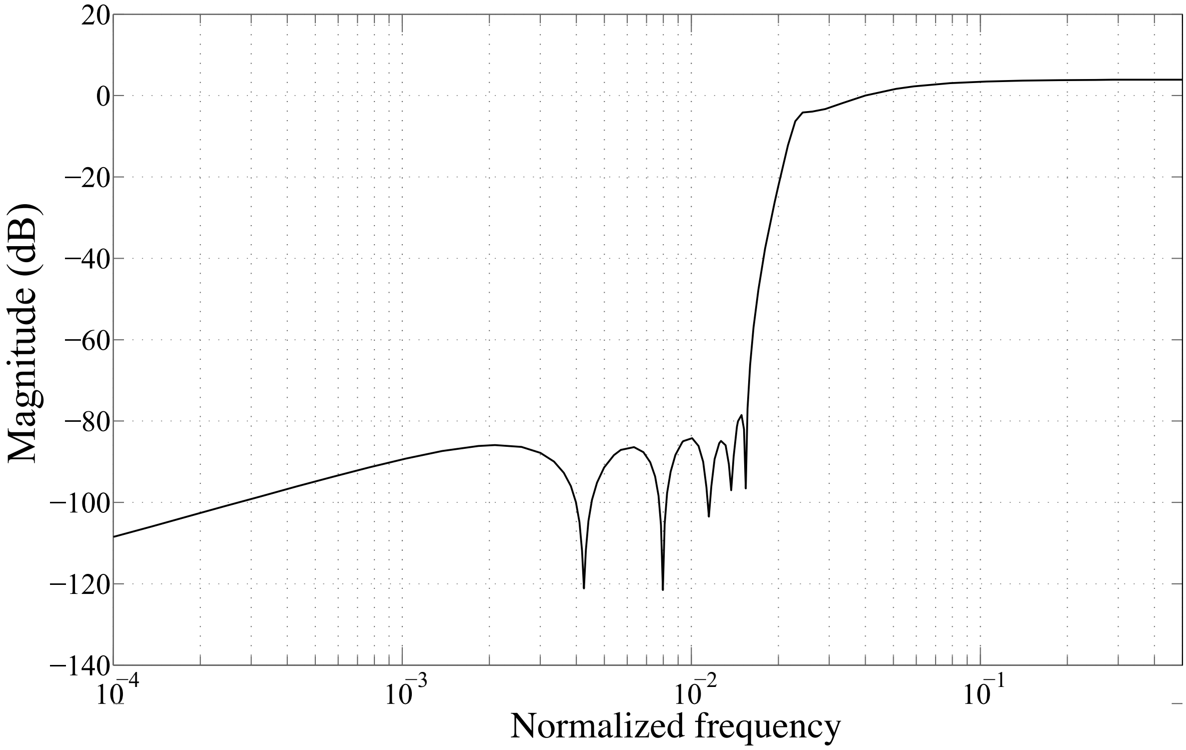


Fig. 4.13: μ 設計法で設計した 11 次ループフィルタの NTF 特性

4.2.2 シミュレーションによる特性評価

これより，設計例で示した 7 次の場合の提案手法によって設計されたループフィルタと，従来法として synthesizeNTF 関数によって設計されたデルタシグマ変調器との比較を行う。また，10 次を超える場合の性能を比較するために 11 次の場合の提案手法と従来法との比較を行う。Table. 4.4 に従来法と提案手法の設計方法をまとめた。

Table.4.4: 7 次の場合の従来法と提案手法の NTF 設計方法のまとめ

	従来法	提案手法
STF	1	1
NTF	synthesizeNTF 関数	μ 設計法（ループフィルタ L_1 を設計し変換）
NTF 設計パラメータ	order 7, osr 32, Hinf 1.5	ノミナルプラント $k=1$,$W_m=0.5$, W_s(synthesizeNTF 関数で設計される NTF の逆関数)

従来法である synthesizeNTF 関数による NTF の設計手法も $STF = 1$ として設計されており，Hinf の値はリーの基準を参考にし 1.5 としている。

まず，7 次のデルタシグマ変調器について出力信号のパワースペクトル密度 (Power Spectral Density:PSD) から比較検討を始める。Fig. 4.14 にフルスケールの半分（-6dB 相当）の振幅，11/2048 の正規化周波数を持つ正弦波をデルタシグマ変調器へ入力し，出力信号を 2048 ポイントで高速フーリエ変換 (FFT) したときの PSD について，synthesizeNTF 関数と提案手法の場合を重ねてプロットした図を示す。PSD のグラフに表示されているノイズフロアは見かけ上の値であることに注意しなければならない。FFT をするときに 2048 ポイントの Hann 窓を用いたが，その場合の雑音帯域幅 (Noise Bandwidth:NBW) は NBW=1.5/2048=7.3 $\times 10^{-4}$ となり，信号帯域幅 (Bandwidth:BW) は BW $= 0.5/\mathrm{OSR} = 0.5/32 = 1.6$ $\times 10^{-2}$ となる。実際のノイズフロア値を見積もるためには，$10\log_{10}$(BW/NBW) の値を dB 表示されたノイズフロア値に加えれば良い。この場合，13dB を加えることで見積もることができる。以下，PSD のグラフの検討の際には同様に考える。Fig. 4.14 の黒線は synthesizeNTF 関数でループフィルタを設計した場合の PSD で，赤線が提案手法でループフィルタを設計した場合の PSD の様子である。synthesizeNTF 関数で設計した NTF と同様なノイズシェイピング特性を提案手法でも実現出来ていることが確認できる。また，ノイズシェイピング特性は入力振幅に依存することが知られている。そこで-12dB から-100dB までの入力振幅，11/2048 の正規化周波数を持つ正弦波を入力したときの PSD を synthesizeNTF 関数による設計手法と提案手法でそれぞれ比較した。その様子を Fig. 4.15，Fig. 4.16，Fig. 4.17 に示す。どの場合でも入力振幅により微小なノイズシェイピング特性の変化はあるものの，同等の高域上がりのノイズシェイピング特性をもつことが確認された。

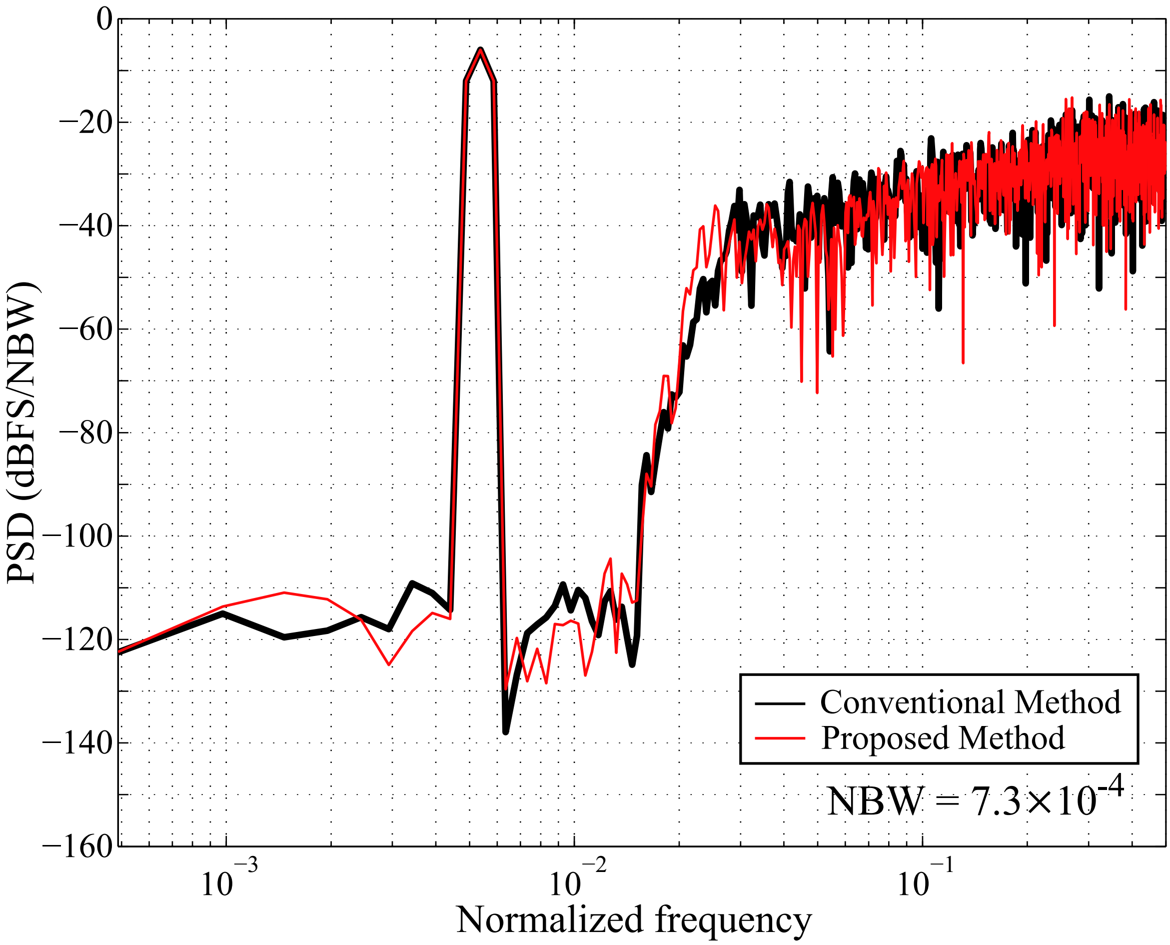
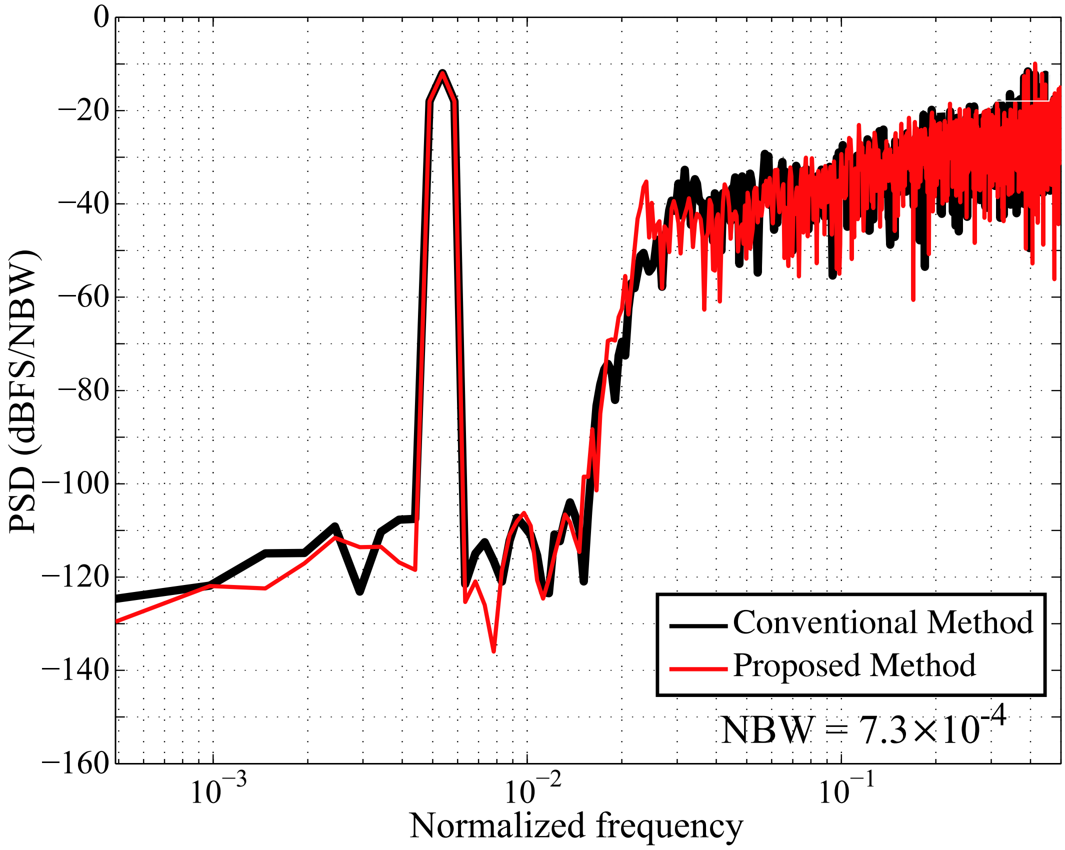
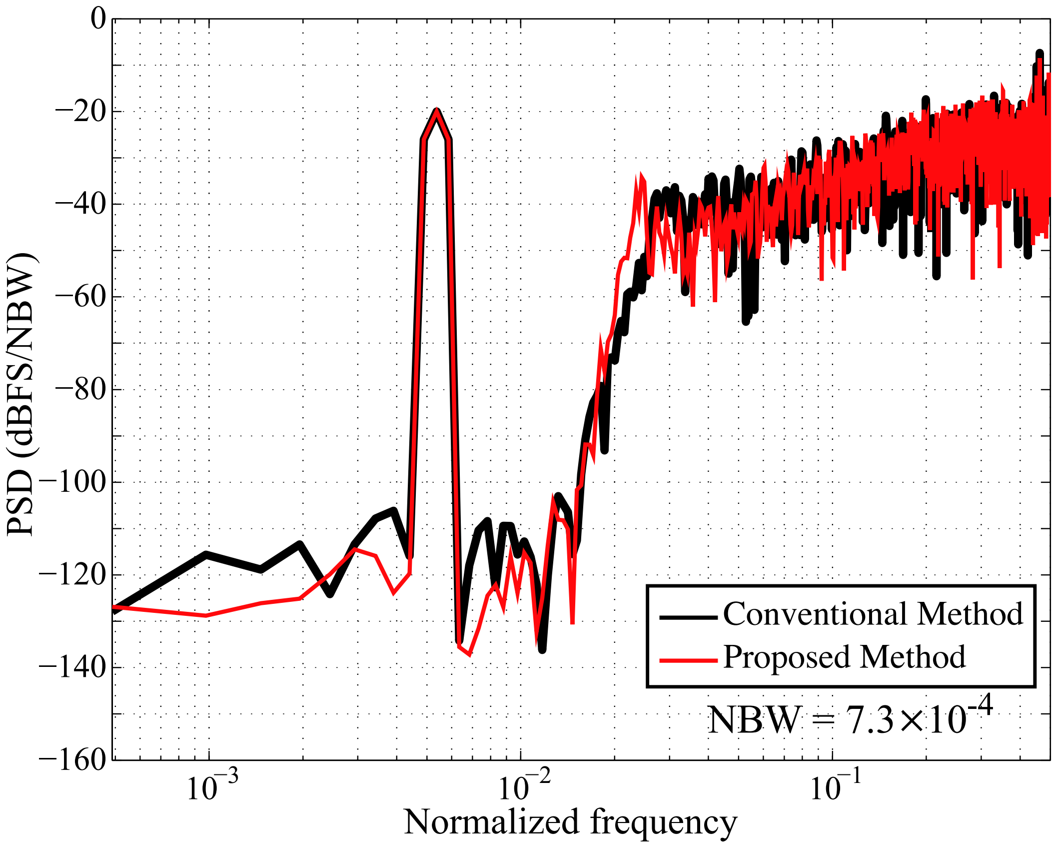


Fig. 4.14: 7 次デルタシグマ変調器の PSD

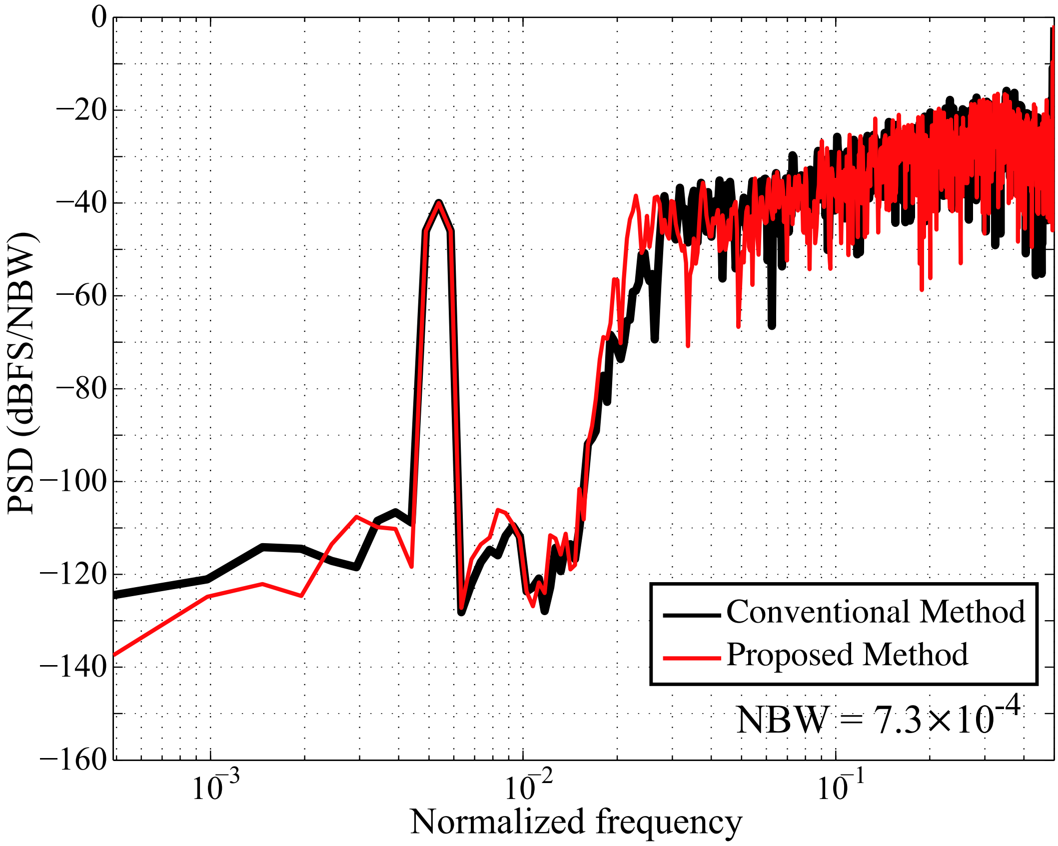


(a) 入力振幅 -12dB

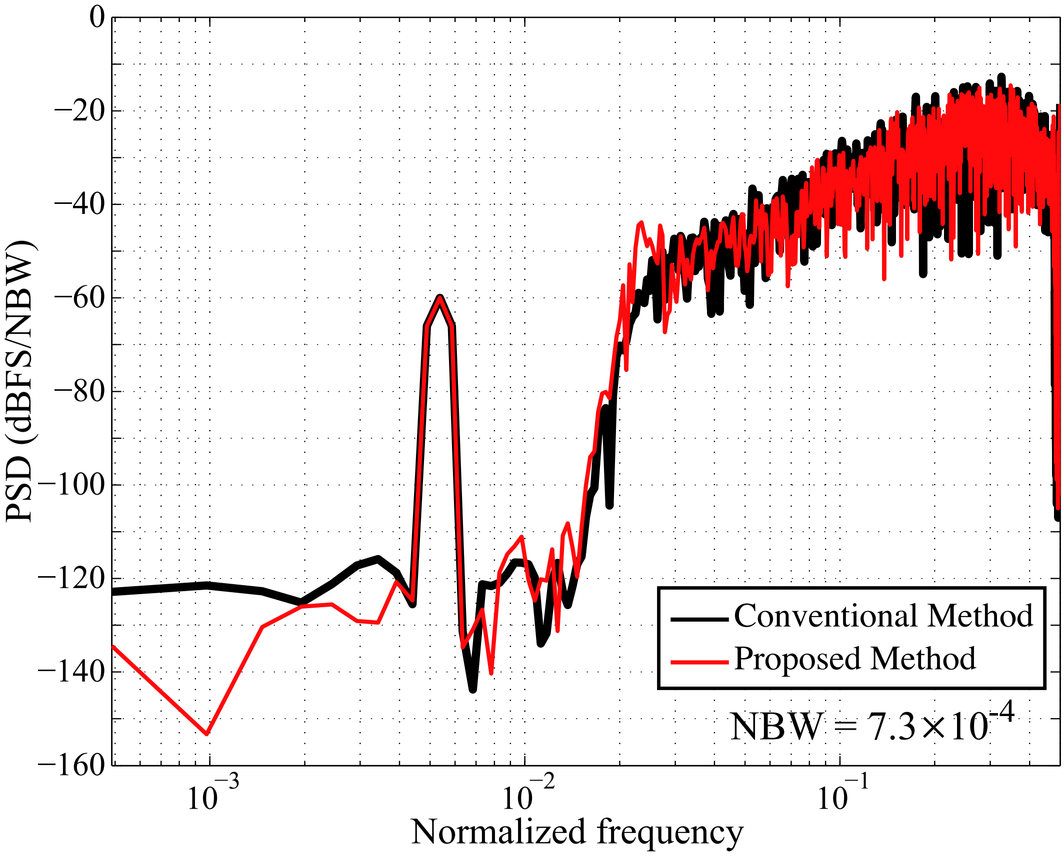


(b) 入力振幅 -20dB

Fig. 4.15: -12dB, -20dB 入力時の PSD

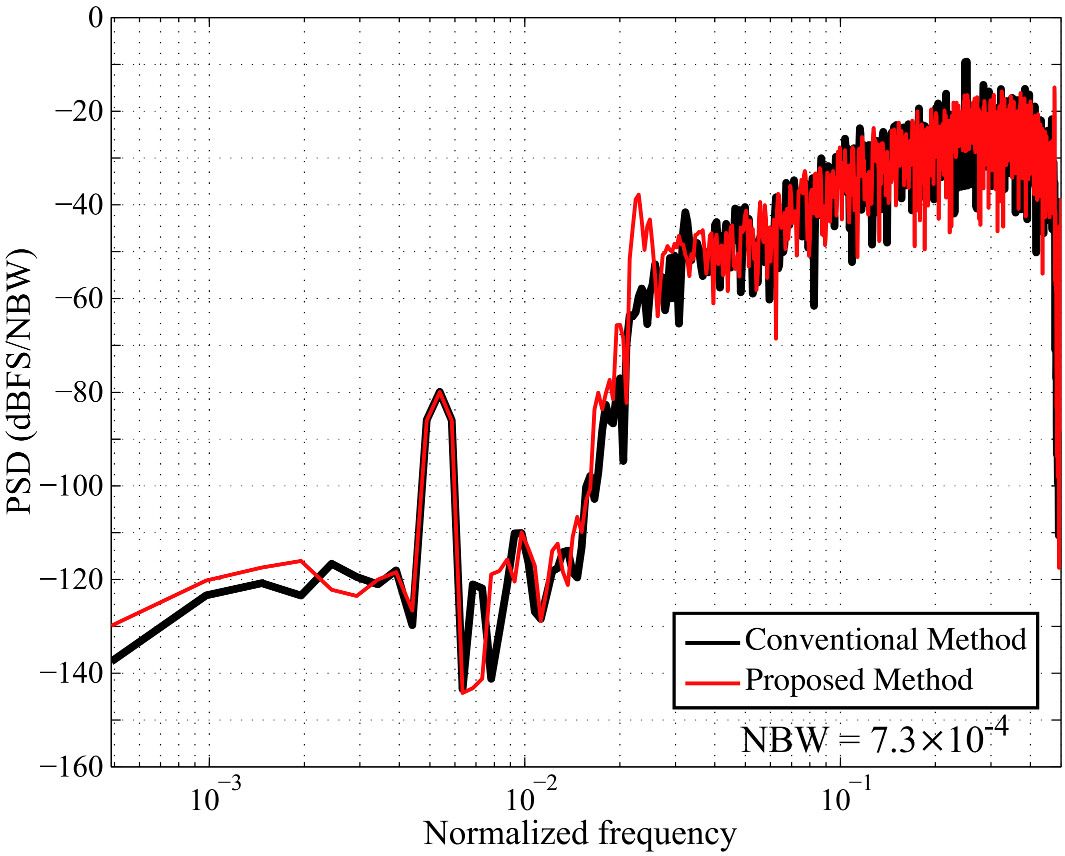


(c) 入力振幅 -40dB

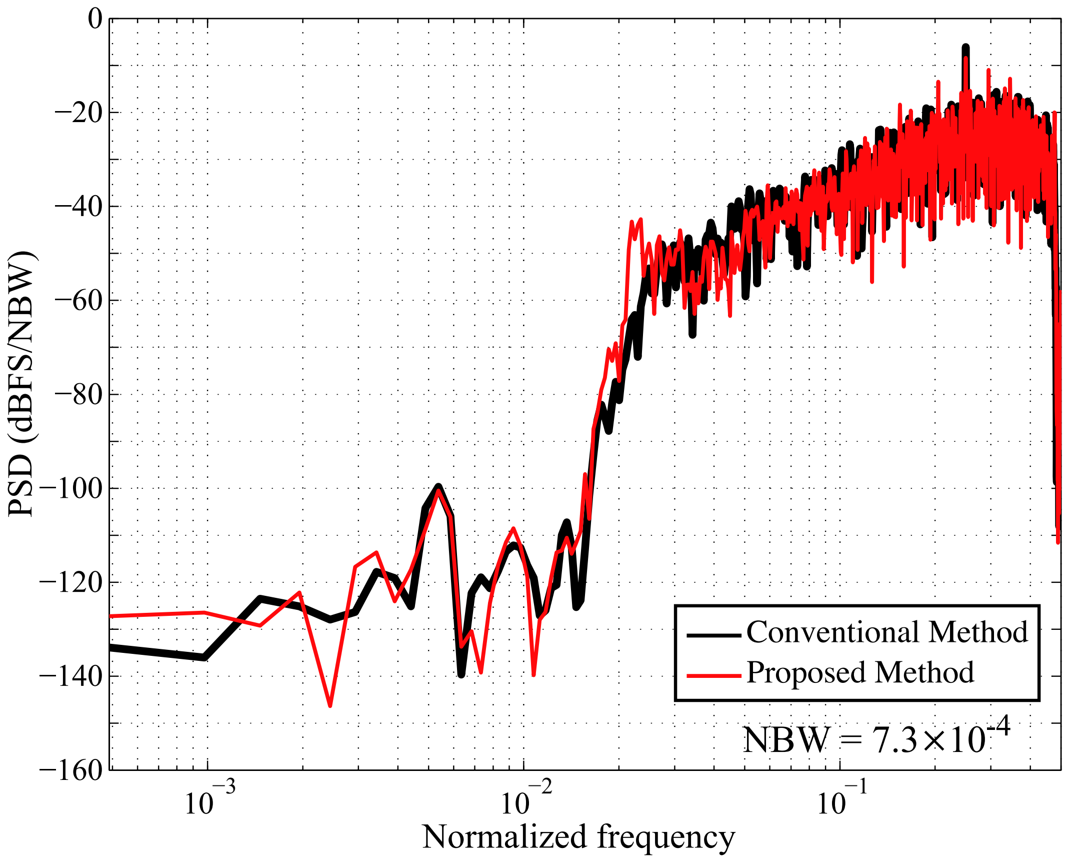


(d) 入力振幅 -60dB

Fig. 4.16: -40dB，-60dB 入力時の PSD



(e) 入力振幅 -80dB



(f) 入力振幅 -100dB

Fig. 4.17: -80dB，-100dB 入力時の PSD

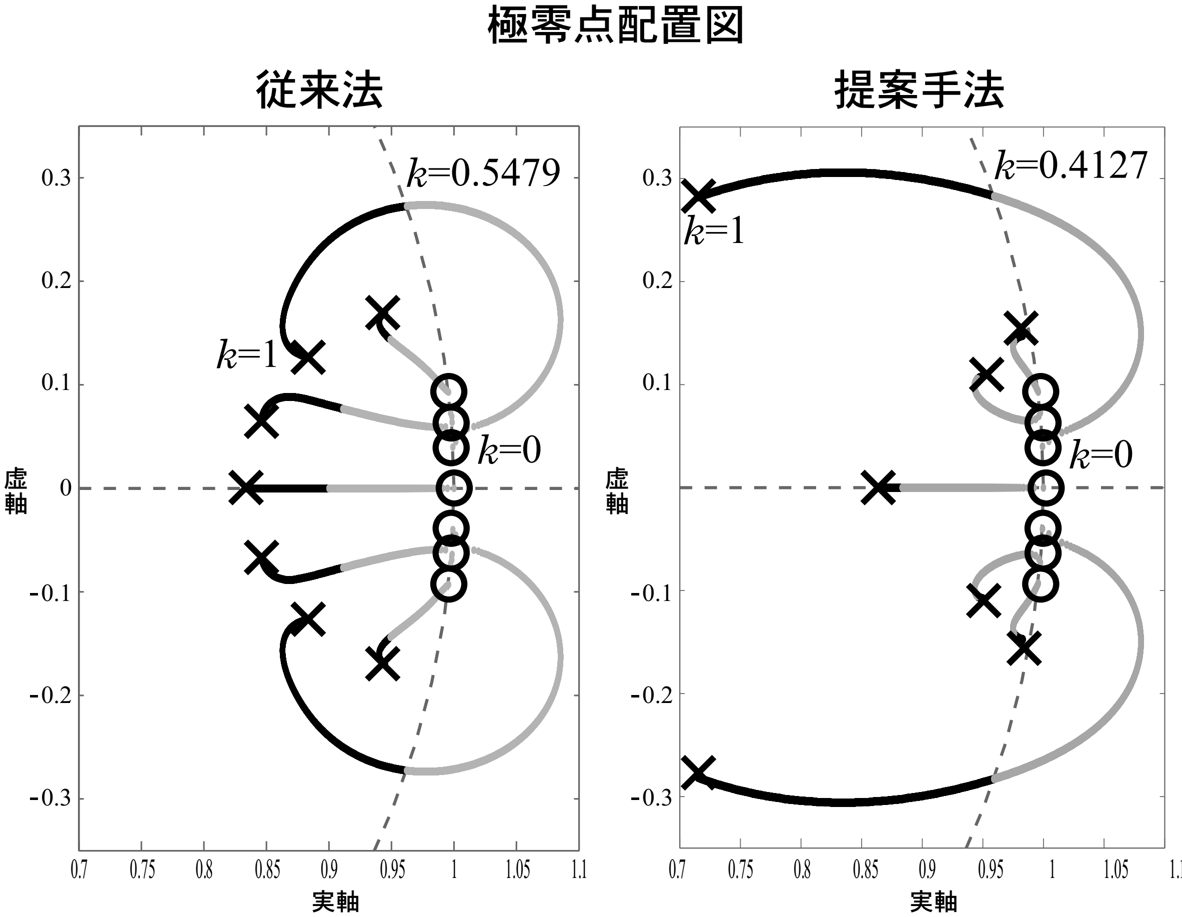
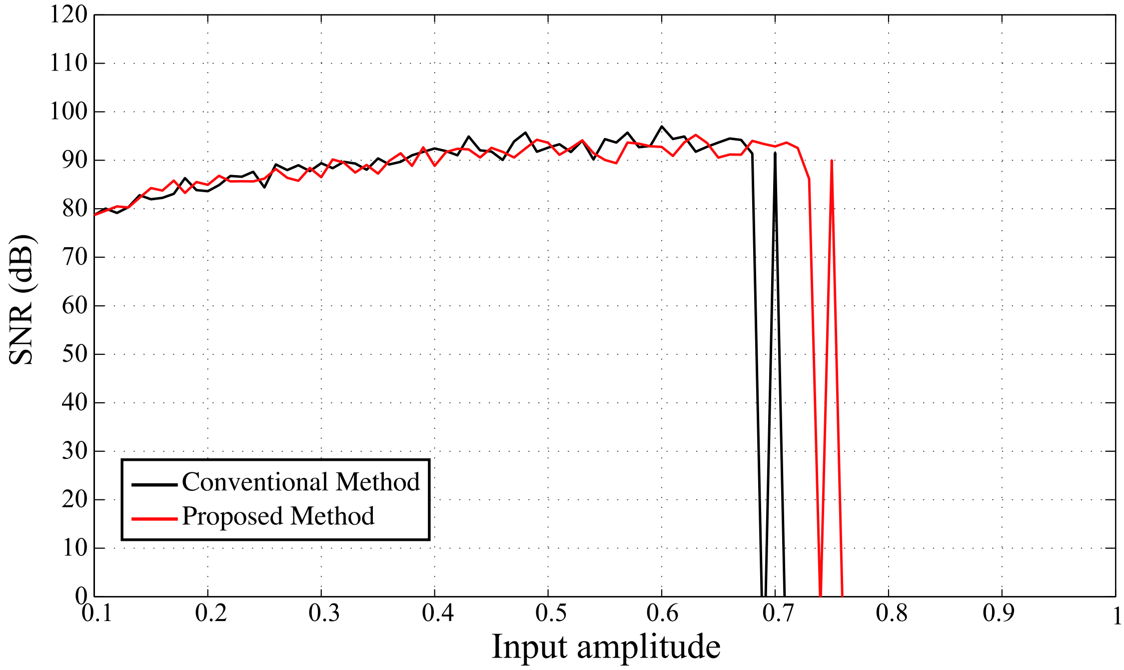


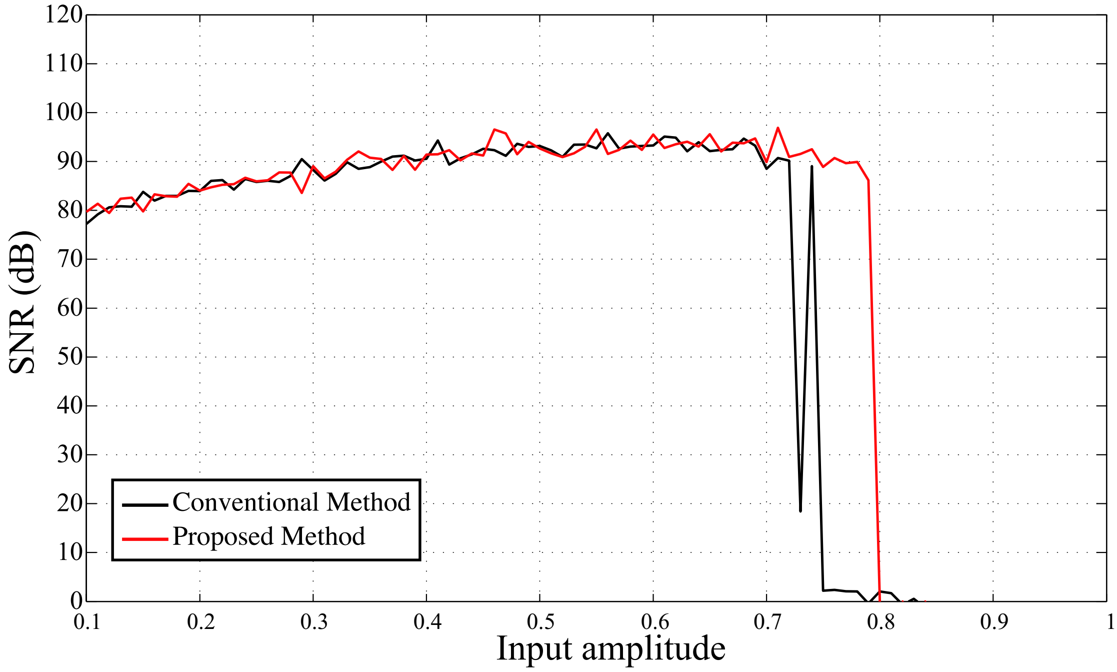
Fig. 4.18: 7 次の根軌跡図

次に，線形利得 k を 1 から 0 の範囲で 0.0001 ずつ減少させたときの提案手法の式 (4.26) の NTF に対する根軌跡と，synthesizeNTF 関数によって設計された NTF に対する根軌跡について，Fig. 4.18 に示す。図中の丸印は NTF の零点，×印は極を表している。線形利得 $k = 1$ に対しては根は極と一致し，線形利得 $k = 0$ に対しては根は NTF の零点と一致する。線形利得 k を 1 から 0 まで減少させると，NTF の極から零点へ向かうような根軌跡を描く。線形利得 k の値を小さくしていき，一組の根が単位円内から出たときに軌跡跡の色を黒色から灰色に変化させている。ここで重要なのは，すべての根が単位円内にあるときデルタシグマ変調器は安定であるということである。synthesizeNTF 関数によって設計された NTF では $k = 0.5479$ のときに一組の根が単位円から出ており，提案手法による NTF では $k = 0.4127$ のときに単位円から出ている。このことは小さい線形利得 k の値，つまり振幅入力が大きくなっても提案手法はより安定なループフィルタが設計できていることを示している。

次に，提案手法，synthesizeNTF 関数によって設計されたデルタシグマ変調器に対して，横軸を入力振幅，縦軸を SNR 値として重ねてプロットした結果を Fig. 4.19 に示す。(a) は入力信号を 5/2048 の正規化周波数を持つ正弦波で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた場合，(b) は 15/2048 の正規化周波数を持つ正弦波で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた場合を示している。黒線は synthesizeNTF 関数による結果で，赤線は提案手法による結果である。SNR が 0 を下回るとデルタシグマ変調器は発散し不安定な状態になっていることを示し，SNR が高い値を保ったまま，左から右へ線が伸びるほど，SNR を維持したまま入力振幅に対する安定性が高く，そのような結果が得られるとデルタシグマ変調器の理想的な動作を示していることになる。(a) より，黒線では入力振幅が 0.68 まで安定であるが，赤線は 0.73 まで安定であることがわかる。(b) より，黒線では入力振幅が 0.72 まで安定であるが，赤線は 0.79 まで安定であることがわかり，(a)，(b) 両方のグラフから，提案手法により設計されたほうが synthesizeNTF 関数と同等の SNR を維持しながらより大きな入力振幅に対して安定な動作をすることが確認できる。また，低い周波数の信号のほうが長時間にわたり大振幅が入力されることになり，入力振幅に対する安定性が悪くなることが知られているが，その傾向も Fig. 4.19 の (a) と (b) を比べることで確認できる。低い周波数のほうが安定性は悪くなるが，提案手法のほうが synthesizeNTF 関数によって設計されたループフィルタよりも入力振幅に対する安定性が高いことが確認できる。



(a) 正規化周波数5/2048



(b) 正規化周波数 15/2048

Fig. 4.19: 7次の場合の入力振幅に対する SNR

ここからは，同様の検討を１１次のループフィルタの場合について，まずはじめに，PSD について の検討を行う。7 次の場合と同様に，Fig. 4.20 にフルスケールの半分（-6dB 相当）の振幅，11/2048 の正規化周波数を持つ正弦波をデルタシグマ変調器へ入力し，出力信号を 2048 ポイントで FFT したときの PSD について，synthesizeNTF 関数と提案手法の場合を重ねてプロットした図を示す。Fig. 4.20 の黒線は synthesizeNTF 関数でループフィルタを設計した場合の PSD で，赤線が提案手法でループフィルタを設計した場合の PSD の様子である。7 次の場合と比べて，ノイズフロアが 15dB 程度下がっており，このグラフからでも SNR の改善が確認できる。ノイズシェイピング特性は 7 次の場合よりも 11 次は，信号帯域幅とノイズシェイピングされた高域部分を結ぶスロープ部分は次数が大きくなると急峻になるが，synthesizeNTF 関数で設計した NTF と同様に提案手法でもそのような特性になっていることが確認できる。

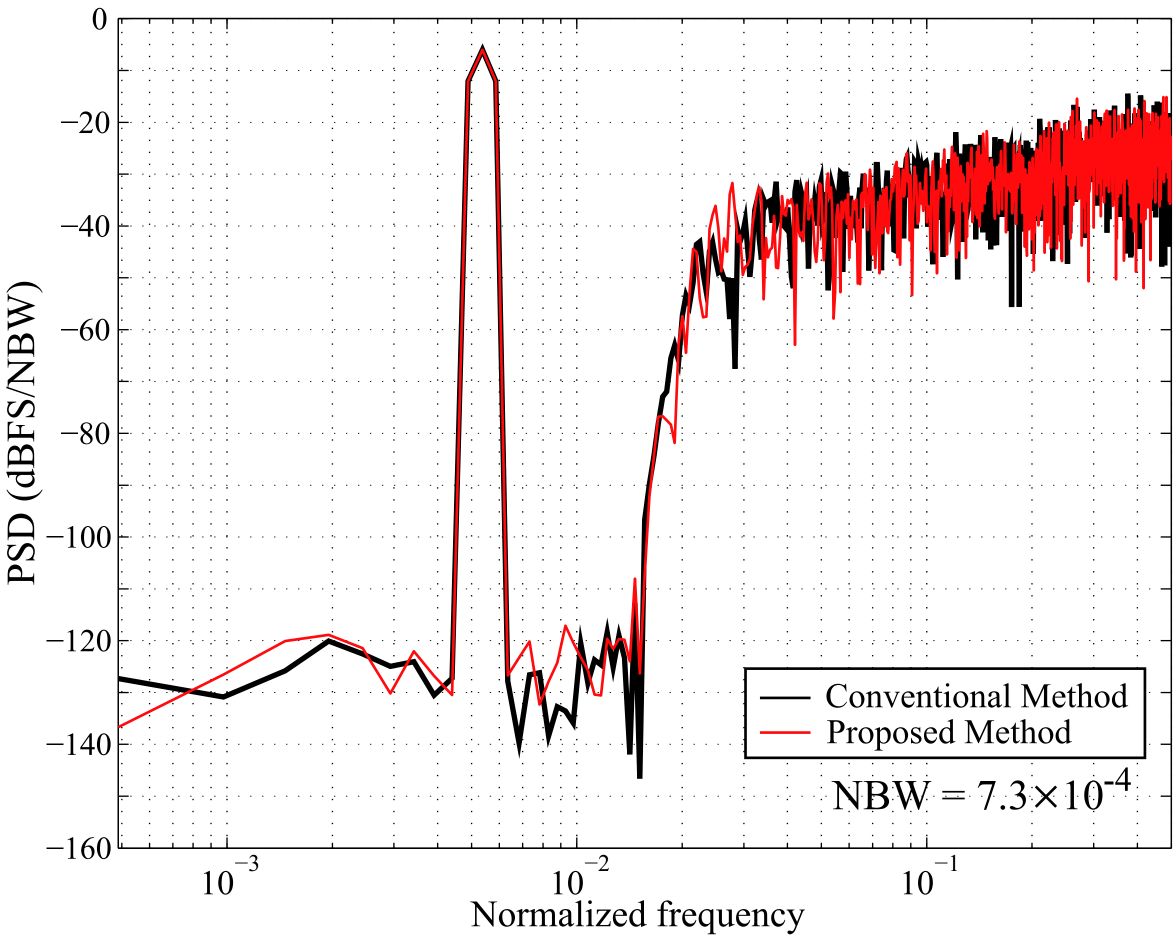


Fig. 4.20: 11 次デルタシグマ変調器の出力振幅特性

次に，線形利得 k を 1 から 0 の範囲で 0.0001 ずつ減少させたときの，synthesizeNTF 関数によって設計されたループフィルタを用いたときの根軌跡と，提案手法によって設計されたループフィルタを用いたときの根軌跡について，Fig. 4.21 にに示す。図の見方は 7 次の根軌跡図の場合と同じである。synthesizeNTF 関数によって設計されたループフィルタでは $k = 0.5381$ のときに一組の根が単位円から出ており，提案手法によるループフィルタでは $k = 0.5343$ のときに一組の根が単位円から出ている。7 次の場合と比べて，許容できる線形利得の改善量は小さいが，提案手法はより安定なループフィルタが設計できていることを示している。

次に，synthesizeNTF 関数と提案手法によって設計されたデルタシグマ変調器に対して，横軸を入力振幅，縦軸を SNR 値として重ねてプロットした結果を Fig. 4.22 に示す。入力信号の条件は 7 次の場合と同じで，(a) は入力信号を 5/2048 の正規化周波数を持つ正弦波で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた場合，(b) は 15/2048 の正規化周波数を持つ正弦波で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた場合である。また，図の見方も同じである。１１次のループフィルタは，７次の場合よりも SNR が 10dB 程度高くなっているが，入力振幅に対する安定性は 7 次よりもやや劣る。(a) より，黒線では入力振幅が 0.62 まで安定であるが，赤線は 0.63 まで安定であることがわかる。(b) より，黒線では入力振幅が 0.66 まで安定であるが，赤線は 0.70 まで安定であることがわかる。(a)，(b) 両方のグラフから，提案手法により設計されたほうが synthesizeNTF 関数と同等の SNR を維持しながらより大きな入力振幅に対して安定な動作をすることが１０次を超えるようなループフィルタでも確認できる。

以上のシミュレーション結果から，提案手法によるループフィルタの設計方法が，一般的にループフィルタの設計に使用されている synthesizeNTF 関数と比べ SNR を保ったまま入力振幅に対する安定性が高いことを示すことができた。また，１０次を超えるような次数の場合でも安定性を高めることができ提案手法の有効性を確認できた。

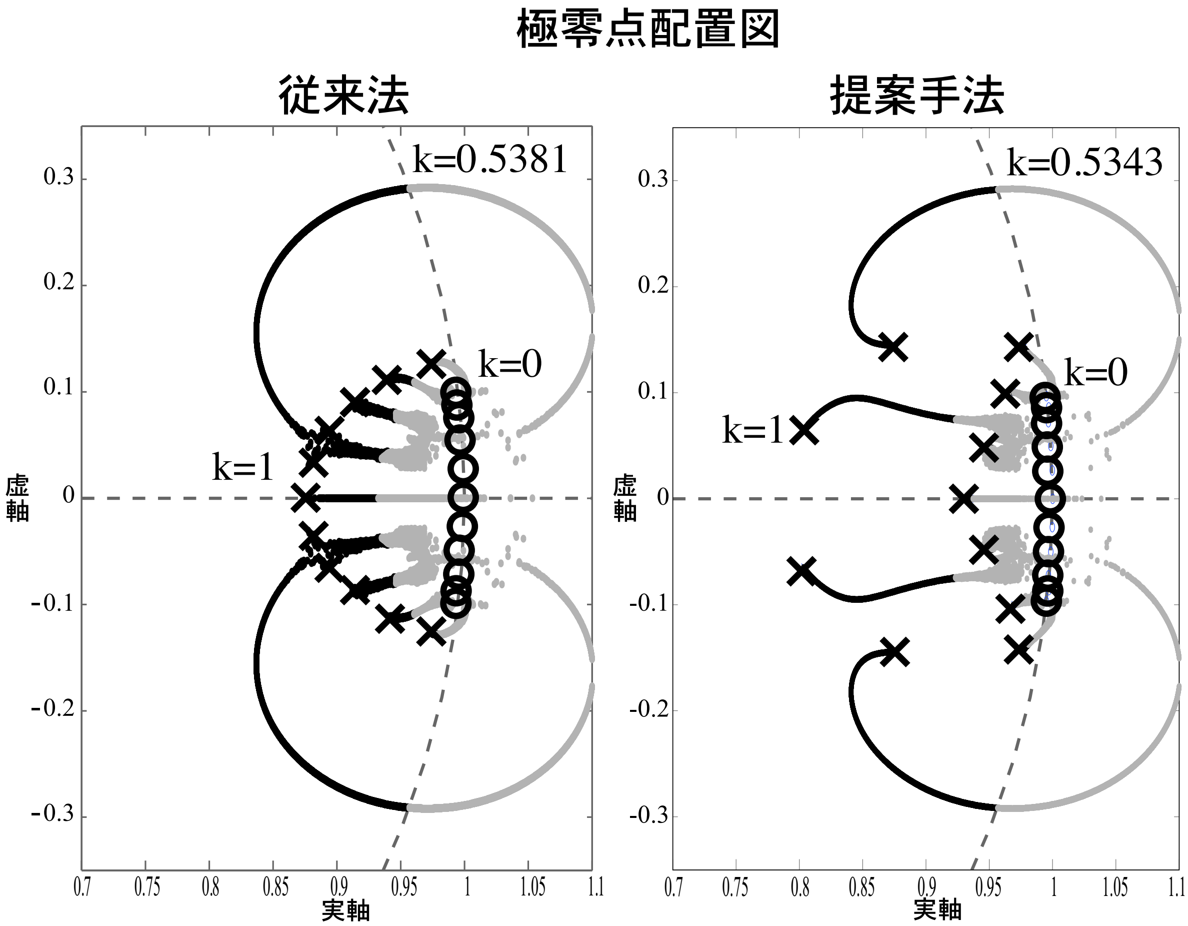
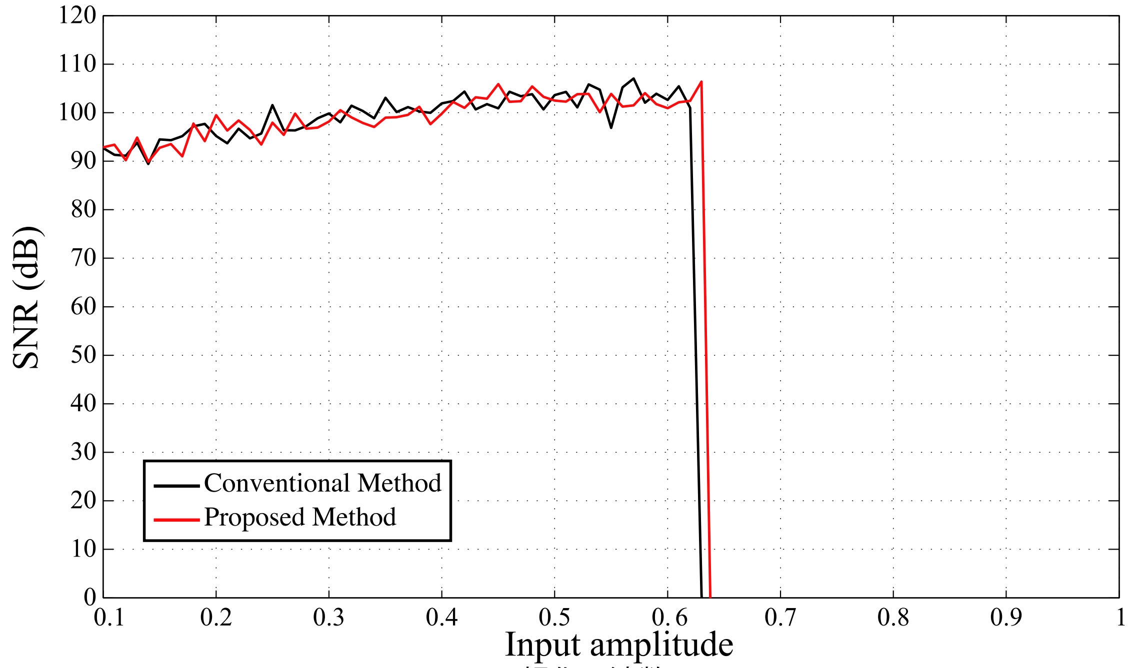
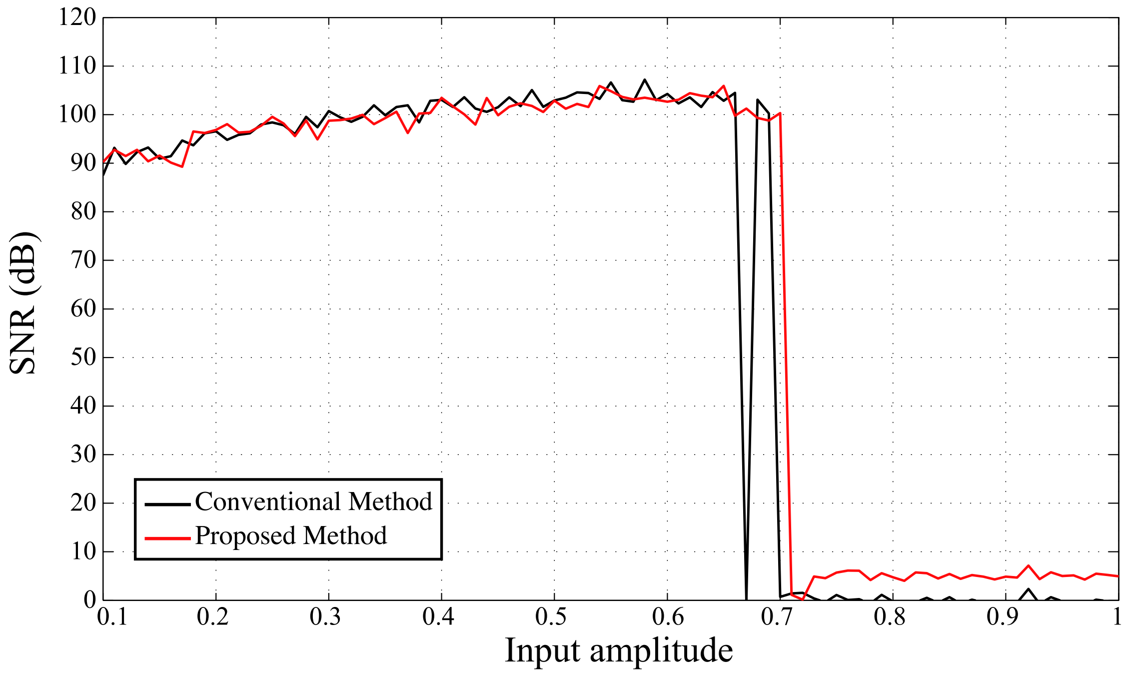


Fig. 4.21: 11 次の根軌跡図



(a) 正規化周波数5/2048



(b) 正規化周波数 15/2048

Fig. 4.22: 11 次の入力振幅の大きさと SNR の関係

4.3 まとめ

本章では，外乱抑制のロバスト性能を保証することが可能な μ 設計に基づく設計法で，デルタシグマ変調器のループフィルタを設計する手法を提案した。その設計手順は，

１・デルタシグマ変調器の量子化器を線形利得 k と量子化雑音 E で近似する。
２・設計を簡単にするために STF=1 とし，ループフィルタ L_1 を設計する問題に変換する。
３・線形利得 k をノミナルプラントとし，加法的誤差 W_m を設定する。
４・制御性能を保証するために外乱抑圧問題における重み関数 W_s を設定する。
５・ループフィルタ L_1 を設計する問題を定数フィードバックゲイン行列 $\boldsymbol{K}$ を求める問題に変換する。
６・構造化変動システムによりループフィルタ L_1 の設計問題は μ 設計として帰着する。
７・D-K イタレーションにより $\boldsymbol{K}$ の近似解を求めることで，ループフィルタ L_1 を設計する。

である。以上の手順で設計した７次と１１次のループフィルタに関してシミュレーションによる特性評価を行った。従来法である synthesizeNTF 関数と同等のノイズシェイピングが実現でき，また，線形利得 k の値を変化させたとき NTF の根が単位円外に移行する値を小さくすることが確認できた。その結果，SNR 値が高いまま従来法の synthesizeNTF 関数よりも大きな振幅の入力信号に対して安定性を高められることが確認された。

第 5 章

ループフィルタ切り替え方式によるデルタシグマ変調器の設計

本章では，高い SNR を持つループフィルタと安定性が高いループフィルタをデルタシグマ変調器の状態によって切り替えることを考える。入力振幅の大きさをループフィルタを切り替える指標に使用している Cho，Choi らの先行研究 [33, 34] を参考にし，本章では線形利得をループフィルタの切り替え指標に使用することを提案する。まず，ループフィルタの設計に synthesizeNTF 関数を用い，線形利得を指標にした切り替え方法が，入力振幅を指標にした切り替え方法よりも高い信号対雑音比 (SNR) で駆動する割合が大きいことを確認する。その後，ループフィルタの設計に μ 設計を用いて，synthesizeNTF 関数で設計した場合と線形利得切り換えでの駆動時間と安定性の比較を行う。

5.1 予備実験による検証

まず，予備実験として入力振幅による不安定さと線形利得の降下による不安定さの比較検討を行う。Fig. 5.1 に量子化器を線形利得 k と量子化雑音 E によって近似した一般的なデルタシグマ変調器の構造を示す。線形利得 k は量子化器への入力信号 Y の統計値によってデルタシグマ変調器の動作中，常に変化する。大きな入力信号が連続して入力されることで線形利得 k の値は小さくなり，$k = 0$ となればシステムは発散し不安定な状態となる。予備実験では，この線形利得の変化に注目し線形利得 $k = 0$ となり，デルタシグマ変調器が不安定になる様子について検討する。

予備実験に使用したループフィルタは synthesizeNTF 関数を利用して設計し，パラメーターは次数を 5 次，osr を 32，リーの基準値を参考にし Hinf を 1.5 とした。Table. 5.1 に設定したパラメータをまとめて示す。

はじめに，SNR について検討を行う。SNR はある周波数の正弦波を入力信号とし，その信号レベルと信号周波数帯域でのノイズフロアの差により計算する。Fig. 5.2(a) に入力振幅に対する SNR の変化の様子を示す。入力信号は正規化周波数 11/2048 の正弦波である。入力振幅 0.75 付近で SNR が 0 以下となりシステムが不安定になっている様子がわかる。Fig. 5.2(b) は，黒線で入力振幅 0.75 の正弦波入力信号を，青線で線形利得の変化の様子を示しており，青線が 0 の値に

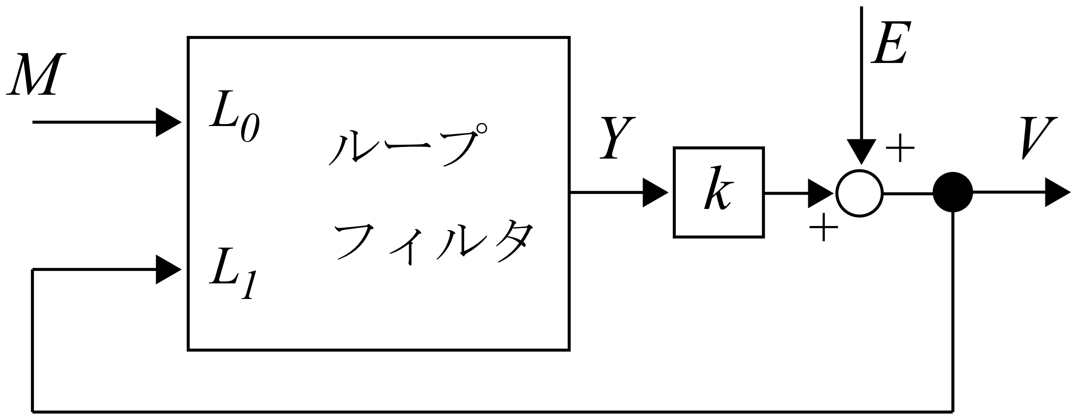


Fig. 5.1: 量子化器を線形モデル化したブロック線図

Table.5.1: 予備実験で用いた synthesizeNTF 関数のパラメータ

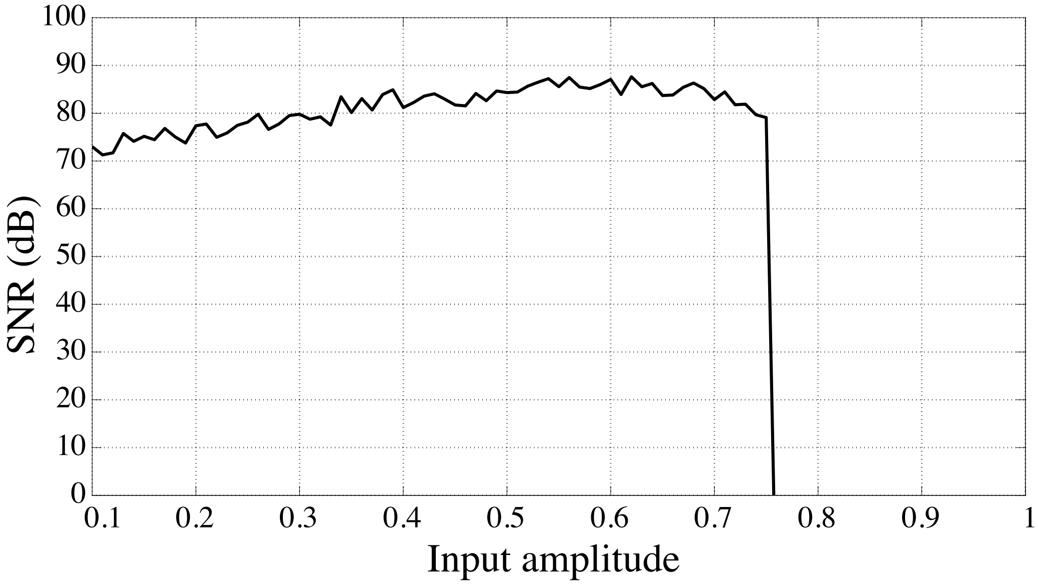
order	5
osr	32
Hinf	1.5

なったときにシステムが不安定になることを示している。この図から，2150 ポイント付近で青線が 0 になっており，振幅 0.75 の正弦波信号を入力してもすぐにシステムが不安定にならないことが確認できる。また，デルタシグマ変調器は低周波入力信号の方が発散しやすい傾向がある。低周波信号についても線形利得と不安定さの関係を確認するために，入力信号正規化周波数 5/2048 の正弦波でも同様の実験を行った。Fig. 5.3(a) に入力振幅に対する SNR の変化の様子を示す。入力信号は正規化周波数 5/2048 の正弦波である。入力振幅 0.67 付近で SNR が 0 以下となりシステムが不安定になっている様子がわかる。Fig. 5.3(b) は，黒線で入力振幅 0.67 の正弦波入力信号を，青線で線形利得の変化の様子を示しており，青線が 0 の値になったときにシステムが不安定になることを示している。この図から，950 ポイント付近で青線が 0 になっており，低周波信号でも振幅 0.67 の正弦波信号を入力してもすぐにシステムが不安定にならないことが確認できる。

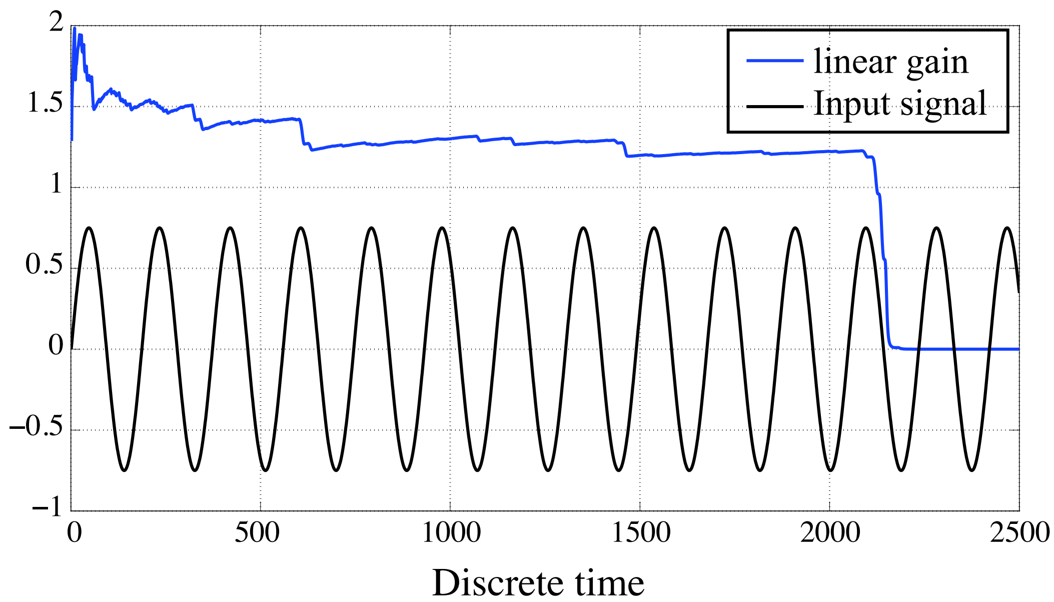
さらに，Probability of instability（POI）[35] という評価方法からも確認する。この POI という評価方法は，正弦波信号を 65536 ポイント入力し，その入力信号のポイント数とシステムが不安定となるポイント数との割合を計算することで安定性を測っている。例えば，65535 ポイント入力しすべてのポイントで安定であれば POI の値は 0 となるが，システムが不安定になるポイント数が多くなると POI の値は大きくなる。デルタシグマ変調器は，安定な状態から一度不安定な状態に陥れば，再び安定な状態に自然に戻るということはないと考えてよい。そのため，POI は信号が入力されてから，どれくらいのポイント数まで安定な駆動をするのかを検証していると言える。Fig. 5.4 に今まで検討してきた synthesizeNTF 関数による 5 次のループフィルタでの POI の様子を示している。Fig. 5.4(a) は入力信号に正規化周波数 11/2048 の正弦波を入力したときの結果であり，不安定を示すパラメータとして線形利得の値を用い，$k < 0.01$ となると不安定と判断し

た。このグラフを見ると，入力振幅 0.70 までは POI の値は 0 であるので入力振幅 0.70 までは安定であると言える。しかし，入力振幅が 0.71 より大きくなると POI の値は 0.90 程度まで大きくなり，入力振幅に対する安定性が悪くなる傾向がある。POI の値が完全に 1.0 となるのは入力振幅 0.76 以降であり，入力振幅 0.75 ではわずかなポイント数ではあるが安定して動作すると考えられる。この結果は Fig. 5.2(b) で示した，入力振幅と線形利得との関係と同じ結果を示していると考えてよい。Fig. 5.4(b) は入力信号に正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力したときの結果である。このグラフの結果も先ほどの Fig. 5.4(a) と同じような結果が得られている。入力振幅 0.64 まではPOI が 0 であるので，安定して動作すると考えられ，入力振幅 0.65，0.66 になると POI が 0.8 程度と安定性が悪くなる。そして入力振幅 0.67 以降は POI がほぼ 1.0 となり不安定となっている。Fig. 5.3(b) は入力振幅 0.67 の信号を入力したときの線形利得 k の様子であったが，おおよそ 980 ポイントまでは安定な動作をしている。これを POI に換算すると $(1 - 980/65535) \times 100 = 98.5$ となり POI が示している不安定性と一致していることが確認できる。

以上の予備実験の結果より，線形利得に注目すると，システムが不安定になるような大振幅信号がデルタシグマ変調器に入力されてもすぐに線形利得 $k = 0$ とはならず，しばらくは安定駆動することが確認できた。先行研究の振幅によるループフィルタ切り替え法では，入力振幅に対する SNR 値を参照し SNR=0 となる入力振幅よりも小さい振幅でループフィルタを切り替えている。振幅によるループフィルタ切り替え法よりも，線形利得の値をループフィルタの切り替え指標にすることで，大きな振幅の入力信号をデルタシグマ変調器に入力でき，SNR 値が高い状態で動作する時間が長くなることが期待される。

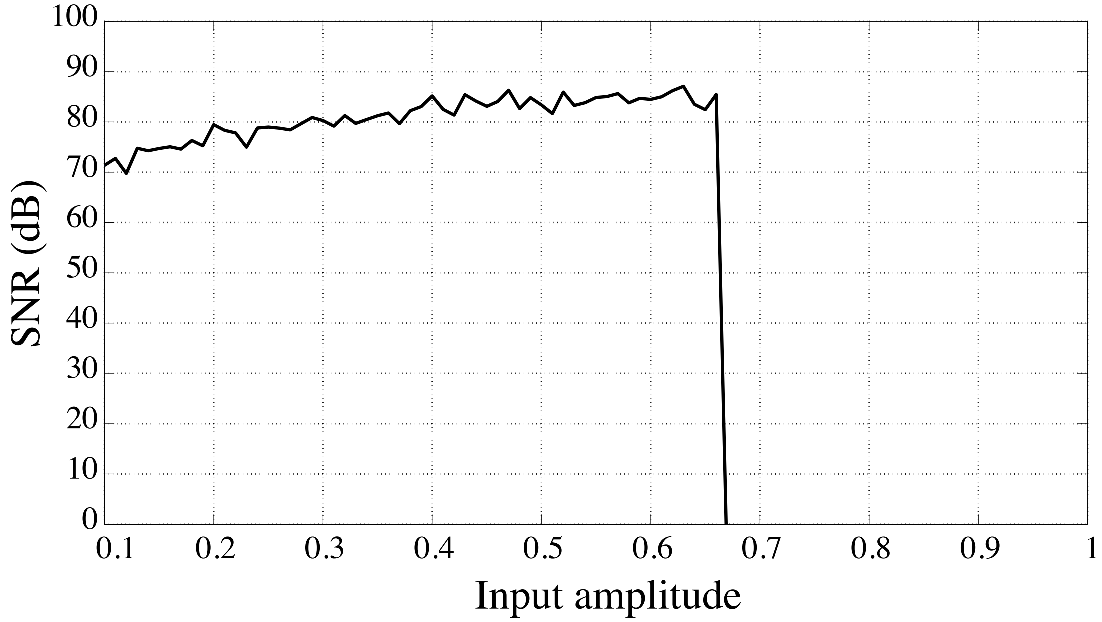


(a) 入力振幅に対する SNR

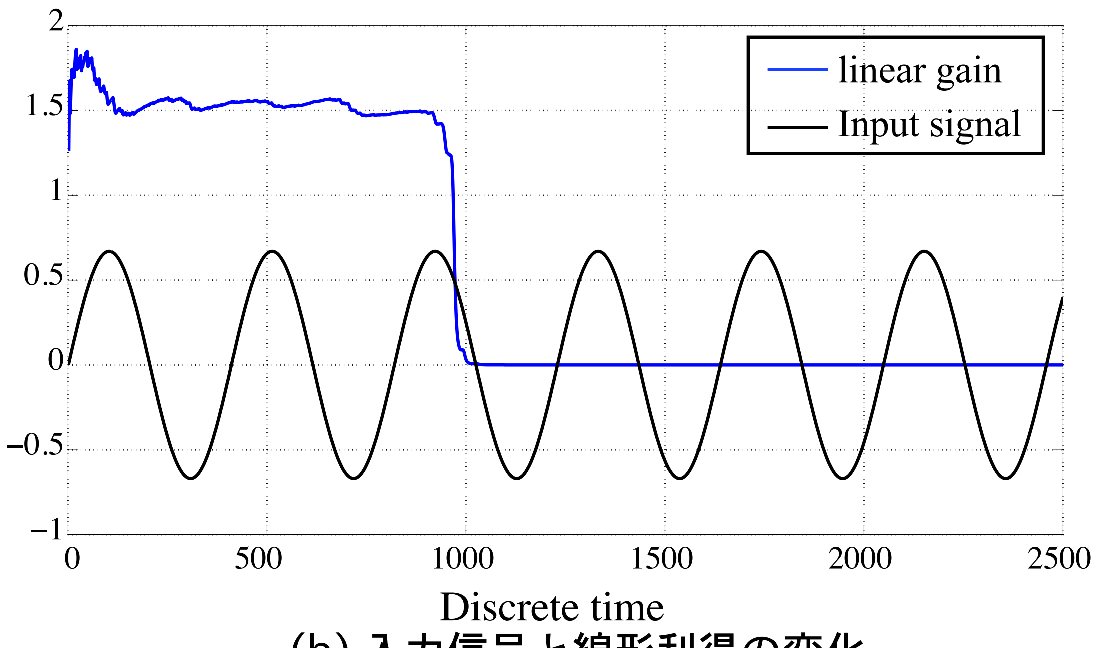


(b) 入力信号と線形利得の変化

Fig. 5.2: 正規化周波数 11/2048 に対する SNR と振幅 0.75 入力時の線形利得の変化

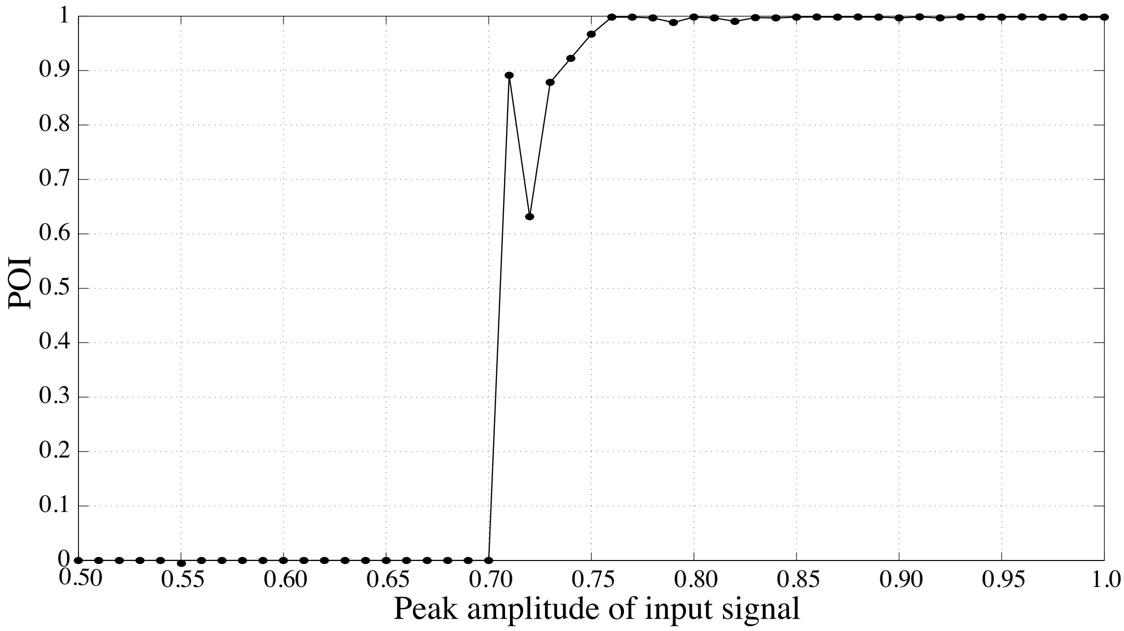


(a) 入力振幅に対する SNR

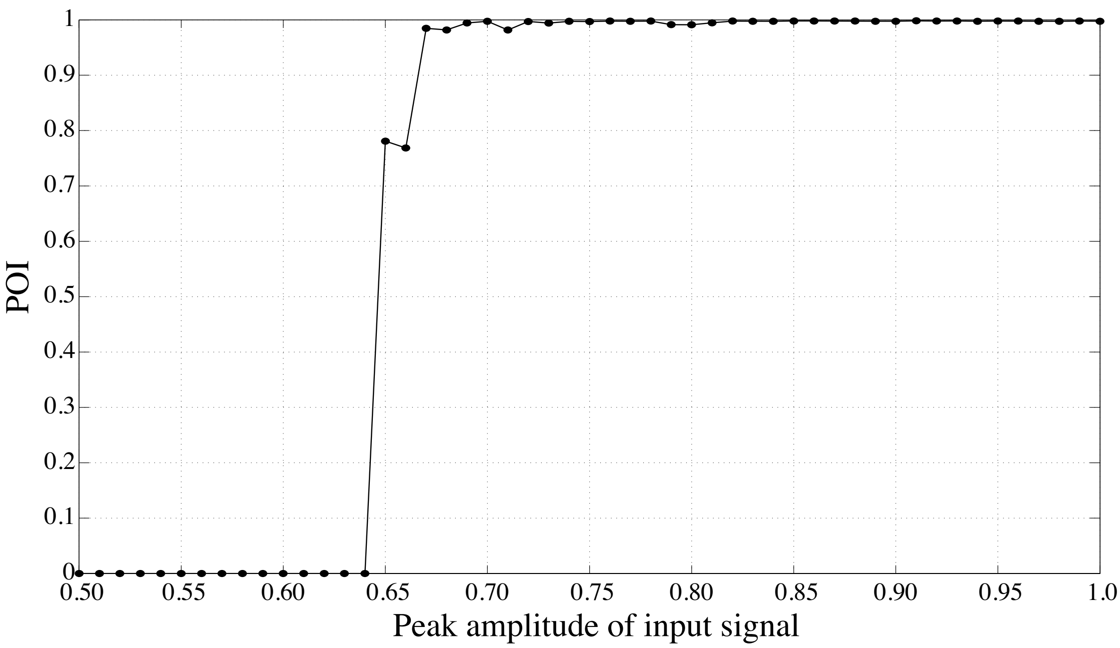


(b) 入力信号と線形利得の変化

Fig. 5.3: 正規化周波数 5/2048 に対する SNR と振幅 0.67 入力時の線形利得の変化



(a) 正規化周波数 11/2048 の正弦波を入力したときの POI



(b) 正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力したときの POI

Fig. 5.4: ２つの入力信号における Probability of instability

5.2 線形利得によるループフィルタ切り替え法

提案する線形利得によるループフィルタ切り替え法のブロック線図を Fig. 5.5 に示す。図中 m は入力信号，y はループフィルタから量子化器への出力信号，k は線形利得，e は量子化誤差，v は量子化された出力信号である。L_0，L_1 はそれぞれ m と v についてのループフィルタを示し，k detector で線形利得 k の値を判定し，L_0，L_1 の High SNR mode，Stable mode のループフィルタを切り替える。

一般的なデルタシグマ変調器に用いられる 2 値量子化器はたった一つの閾値しかもたないため，線形利得 k は容易に決定できない。最適な線形利得 k を求めるには，量子化誤差 e の 2 乗平均値を最小化することである。式 (2.4)，式 (2.5)，式 (2.6) より，平均値 E を用いると最適な線形利得 k は

$$k = \frac{E[|y|]}{E[y^2]} \tag{5.1}$$

となる。これはループフィルタから量子化器への出力信号 y の値が大きくなるほど線形利得 k が小さくなることを示す。この線形利得 k の変動を観察し，線形利得が 0 となりシステムが不安定になる前に，High SNR mode のループフィルタから，Stable mode のループフィルタへ切り替える。そして，また安定な値に戻ったら Stable mode のループフィルタから，High SNR mode のループフィルタへと切り替える。これらの切り替えを繰り返すことで高い信号対雑音比と，入力信号に対する安定性を保ちながら動作するデルタシグマ変調器が期待できる。

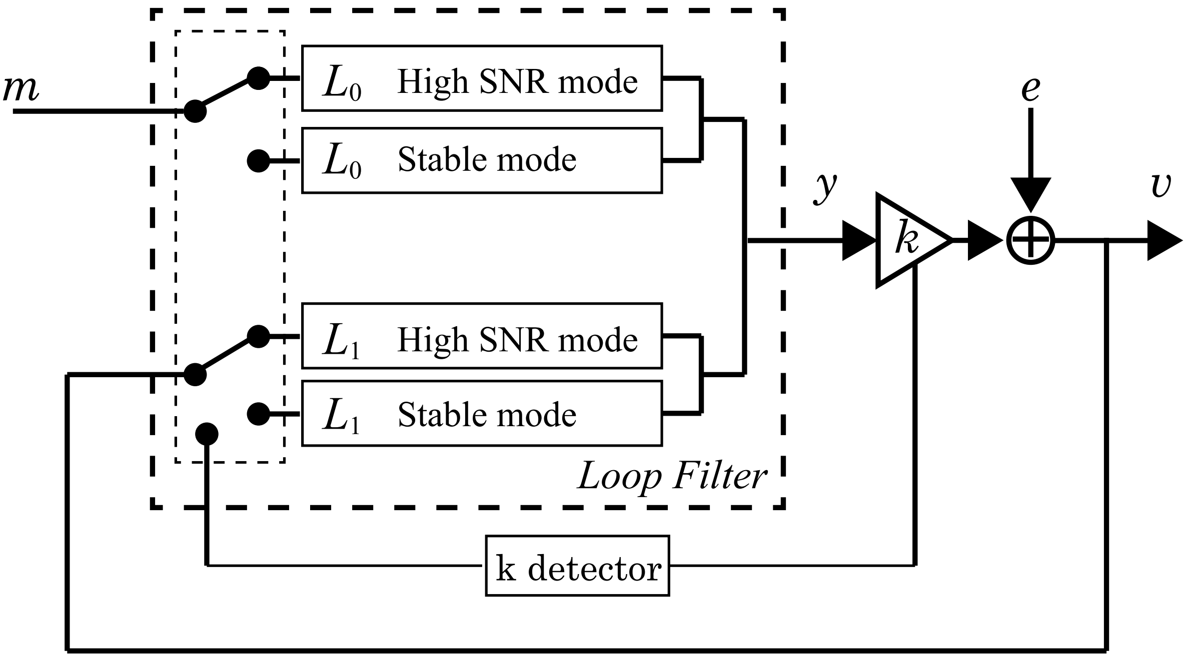


Fig. 5.5: 線形利得によるループフィルタ切り替え法のブロック線図

5.3 振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法の比較

5.3.1 High SNR mode と Stable mode のループフィルタの設計

振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法を比較するために同じ条件で設計した High SNR mode と Stable mode のループフィルタを用いることにする。MATLAB ツールボックスである synthesizeNTF 関数を利用して 5 次，OSR32 のループフィルタを設計する。High SNR mode のループフィルタと，Stable mode のループフィルタの差はリーの基準による差を用いた。一般にリーの基準の値を大きくすると，高い SNR が確保できるが大きな入力振幅に対して不安定になりやすい傾向がある。今回は，リーの基準を High SNR mode は 1.5 に設定し，Stable mode は 1.3 に設定した。以上の条件で設計した High SNR mode のループフィルタの伝達関数を式 (5.2) に，Stable mode の伝達関数を式 (5.3) に示す。

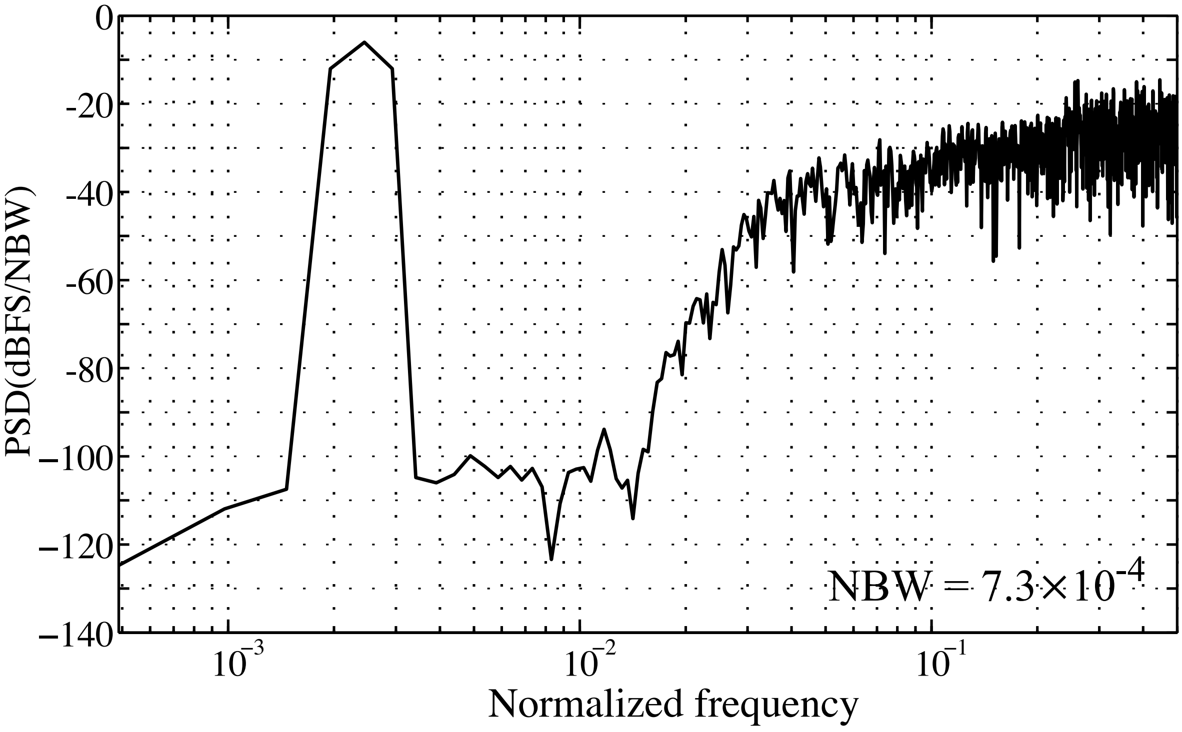
$$NTF_H(z) = \frac{(z-1)(z^2-1.997z+1)(z^2-1.992z+1)}{(z-0.7778)(z^2-1.613z+0.6649)(z^2-1.796z+0.8549)} \tag{5.2}$$

$$NTF_S(z) = \frac{(z-1)(z^2-1.997z+1)(z^2-1.992z+1)}{(z-0.8491)(z^2-1.744z+0.7672)(z^2-1.878z+0.9035)} \tag{5.3}$$

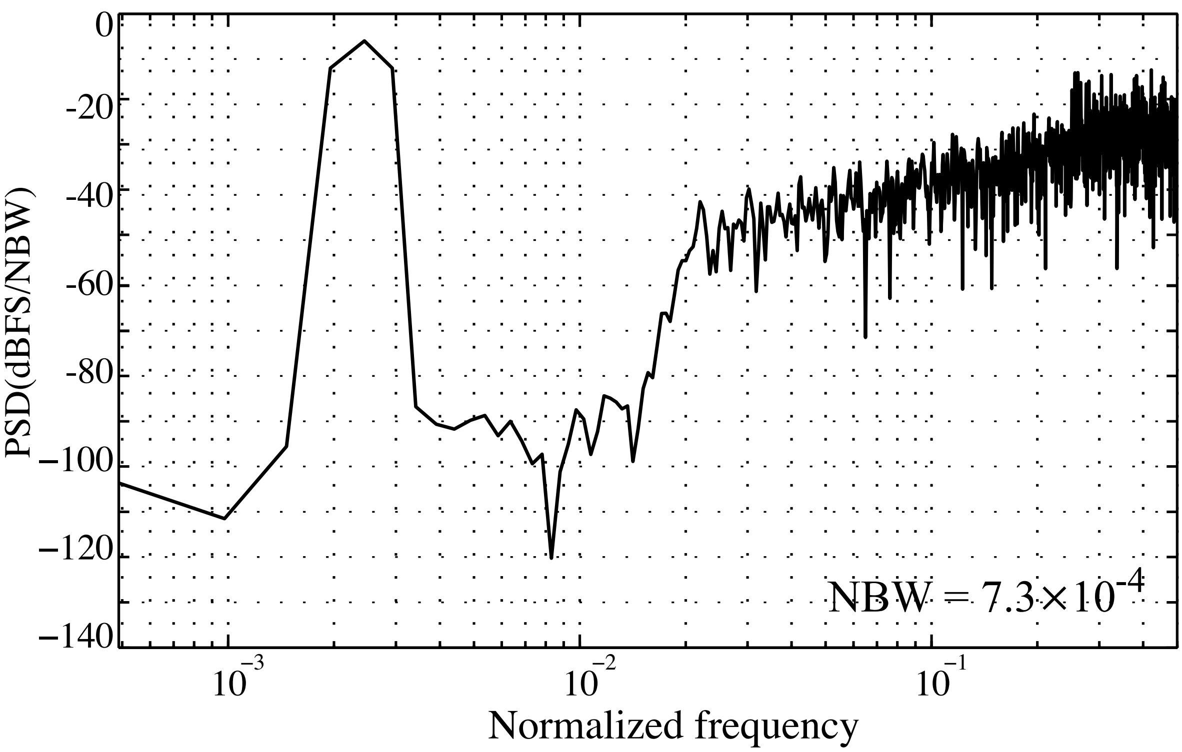
設計した High SNR mode と Stable mode のループフィルタに正規化周波数 5/2048，フルスケールの半分 (-6dB) の振幅の正弦波を入力したときの出力振幅特性を Fig. 5.6 に示す。出力振幅特性では，窓関数に Hann 窓を用いて，FFT ポイント数 2048 ポイントで FFT を行った。High SNR mode の方が Hinf が大きいため，信号帯域内でのノイズフロアが低く SNR が高いことがわかる。

次に，入力振幅に対する SNR の変化の様子を Fig. 5.7 に示す。Fig. 5.6 と Fig. 5.7 より High SNR mode のループフィルタは信号帯域内で 70dB から 85dB 程度の SNR があるが，入力振幅は 0.67 で不安定となる。対して Stable mode のループフィルタは信号帯域内で 55dB から 75dB 程度の SNR しかないが，入力振幅 0.9 まで安定性を保てることがわかる。

次に，Fig. 5.8 に High SNR mode と Stable mode の POI の様子を示す。High SNR mode と Stable mode の両方で，Fig. 5.7 で不安定になった振幅とほぼ同じ振幅で POI の値が増大し，不安定になっていることが確認できる。



(a) High SNR mode



(b) Stable mode

Fig. 5.6: synthesizeNTF 関数で設計した２つのループフィルタの出力振幅特性

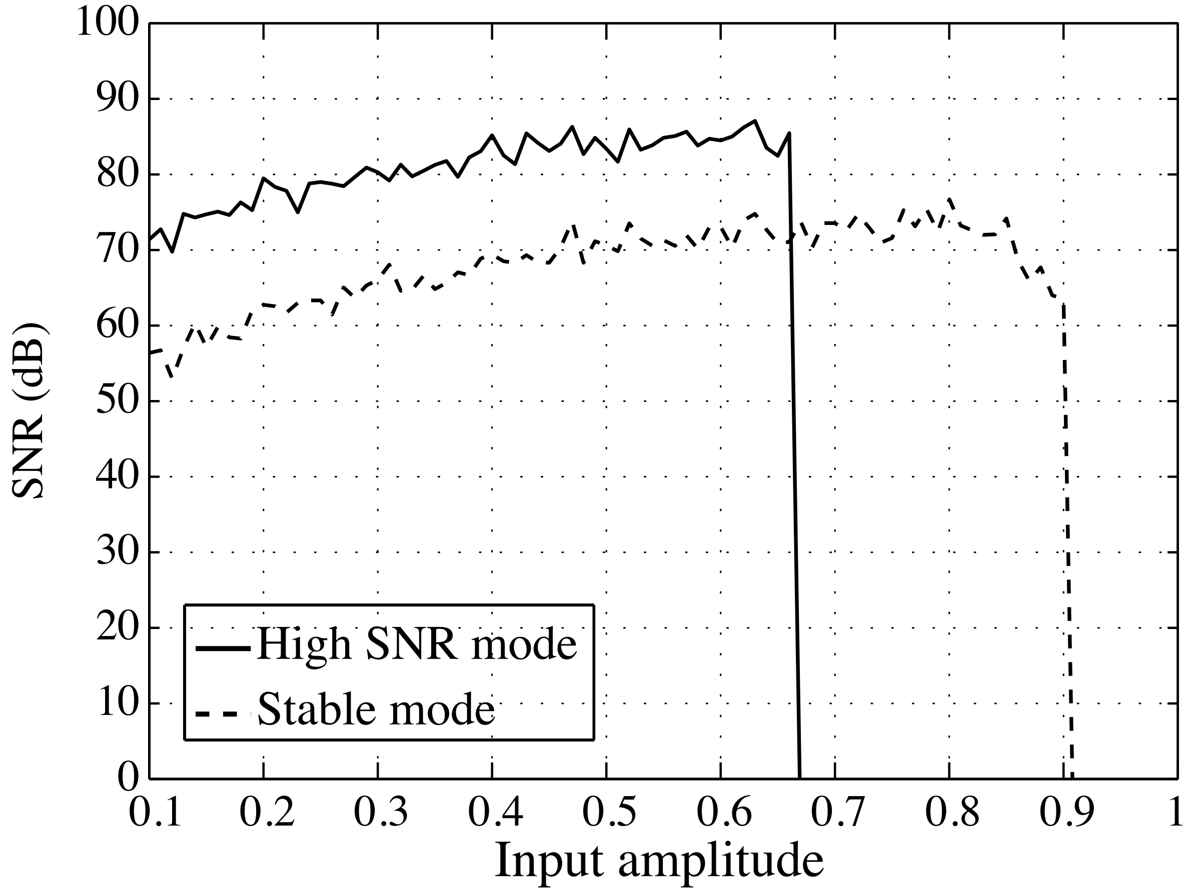
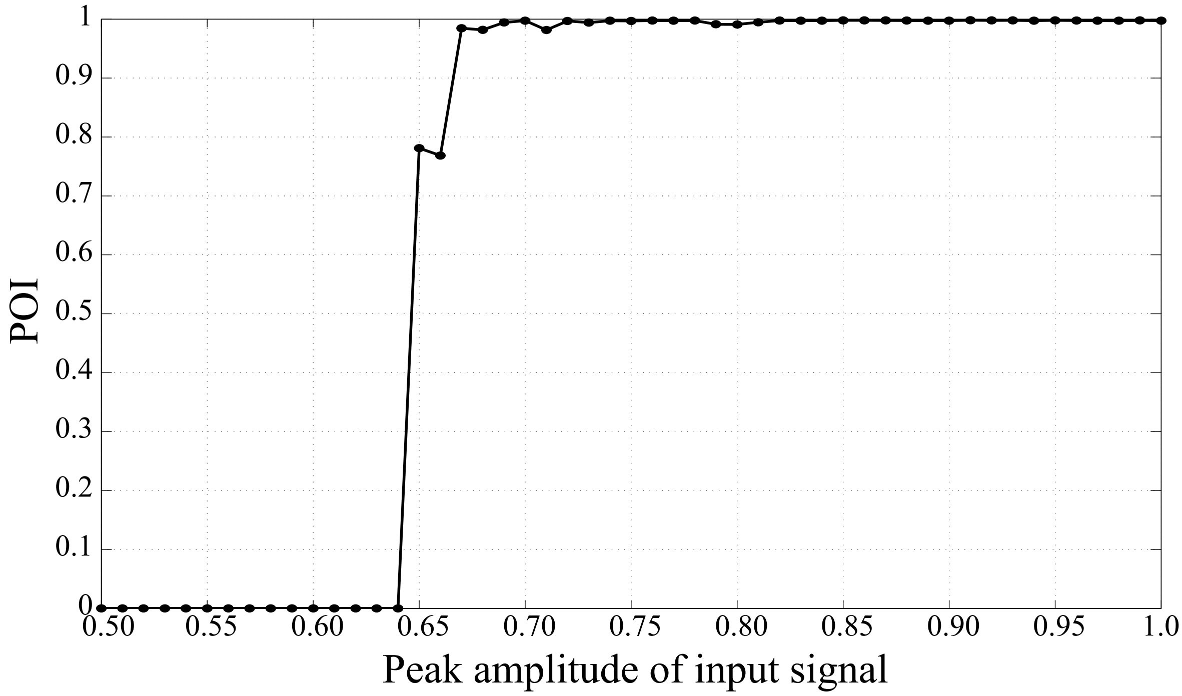
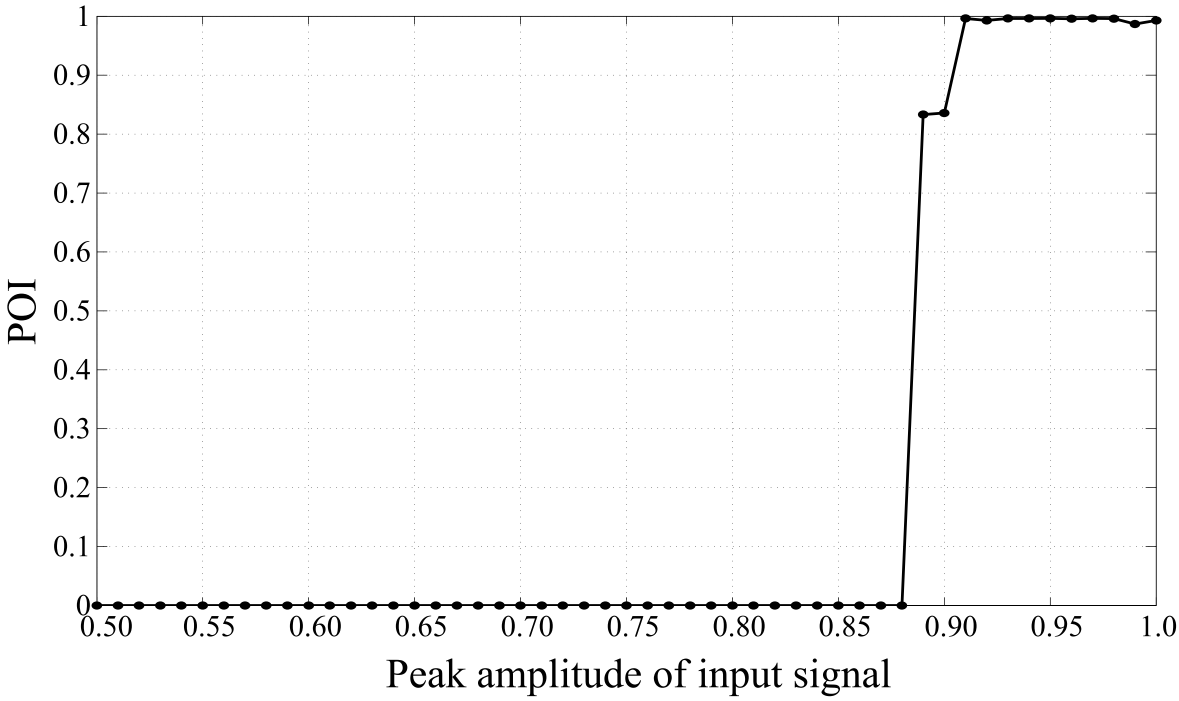


Fig. 5.7: synthesizeNTF 関数で設計した２つのループフィルタの入力振幅に対する SNR



(a) High SNR mode の POI



(b) Stable mode の POI

Fig. 5.8: synthesizeNTF 関数で設計した２つのループフィルタの POI

5.3.2 比較と検討

振幅によるループフィルタ切り替え法と，線形利得によるループフィルタ切り替えとの比較を行う。Fig. 5.7 より High SNR mode のループフィルタは入力振幅 0.67 で不安定になる。そのため，振幅切り替え法は入力振幅 0.65 を閾値として設定し，入力振幅が 0.65 より小さいときに High SNR mode で動作し，入力振幅が 0.65 より大きいときに Stable mode で動作するようにループフィルタを切り替えることにする。ループフィルタを切り替えるとき，システムが不安定な状態から復帰する際には内部状態のリセットが必要であるという参考文献 [18] を参考にし内部状態のリセット操作をおこなった。線形利得による切り替え法の閾値は，線形利得の閾値を 0.30 から 0.90 の間で 0.05 ステップで変えていき，その中で最も High SNR mode で駆動する割合が大きいときの値を線形利得の閾値として採用することにする。この線形利得の閾値を決める実験では入力振幅 0.9，正規化周波数 5/2048 の正弦波を 8192 ポイント入力し，その 8192 ポイントの中で High SNR mode で駆動するポイントを求め，割合を計算した。Fig. 5.9 にその結果を示す。線形利得 0.75 を閾値としループフィルタを切り替えたときに，最も High SNR mode で駆動する割合が大きく，その割合は 85.8% となった。以上より，線形利得 0.75 を閾値とし線形利得が 0.75 より大きいときに High SNR mode で動作し，線形利得が 0.75 より小さいときに Stable mode で動作するようにループフィルタを切り替えることにする。

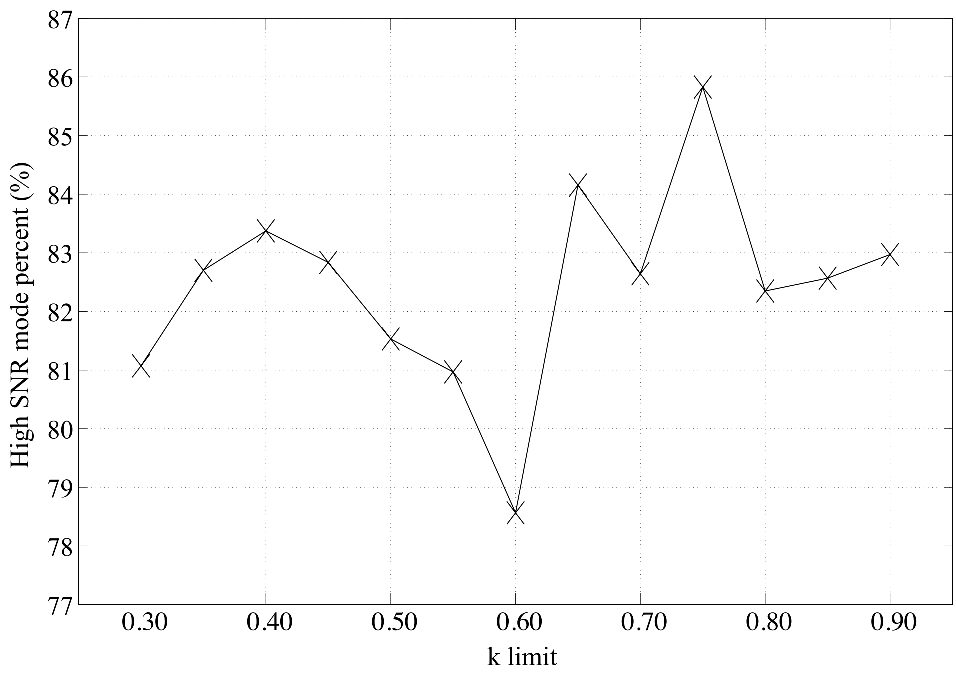
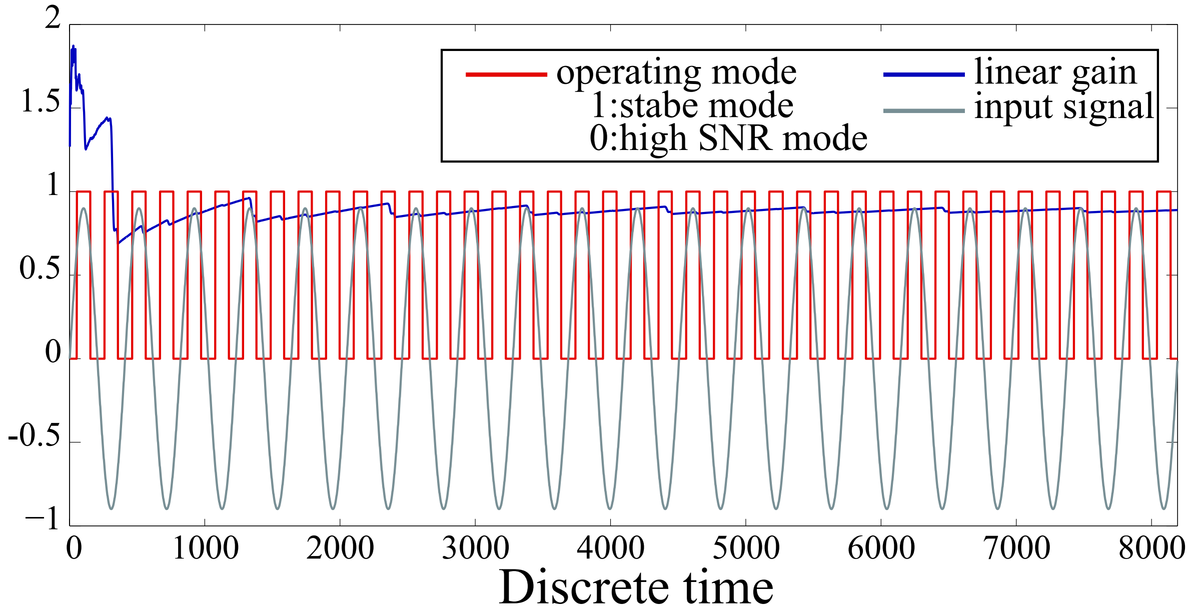


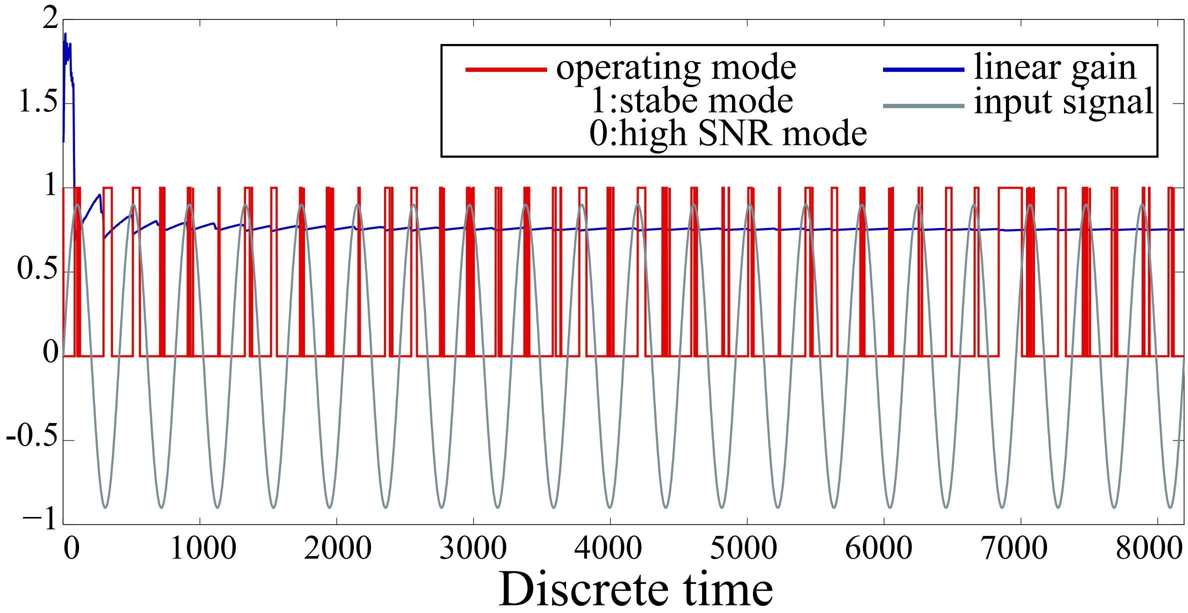
Fig. 5.9: 線形利得の閾値の違いによる High SNR mode での動作の割合

一例として，入力振幅 0.9，正規化周波数 5/2048 の正弦波を 8192 ポイント入力した。8192 ポイント入力時の切り替えの様子を Fig. 5.10 に示し，1 ポイントから 2500 ポイントまでの切り替えの様子を Fig. 5.11 に示す。Fig. 5.10，Fig. 5.11 では横軸が入力信号のポイント数，縦軸は切り替え時の様子を示し，赤色の実線の値が 0 のとき，High SNR mode で動作し，1 のとき，Stable mode で動作していることを表している。青色の実線はそのときの線形利得の値を表している。灰色の実線は振幅 0.9 の正弦波入力信号である。Fig. 5.10(a)，Fig. 5.11(a) は振幅によるループフィルタ切り替えの結果を示している。振幅切り替えでは振幅 0.65 を閾値に設定したので，灰色で表している入力信号の振幅の絶対値 0.65 を境界にして，赤実線の値が 0 と 1 が入れ変わり，HighSNR mode と Stable mode のループフィルタの切り替えが行われている様子がわかる。Fig. 5.10(b)，Fig. 5.11(b) は線形利得によるループフィルタ切り替えの結果を示している。線形利得による切り替えでは線形利得 k が下がり，システムが不安定になる前に設定した閾値でループフィルタの切り替えが行われる。振幅によるループフィルタ切り替え法よりも High SNR mode で動作する割合が多くなることが確認できる。具体的には，入力ポイント数 8192 ポイント中，HighSNR mode で駆動する割合を求めたところ，振幅によるループフィルタ切り替えでは 51.5% であり，線形利得によるループフィルタ切り替えでは 85.8% であった。以上の結果より，線形利得によるループフィルタ切り替え法のほうが，先行研究の振幅によるループフィルタ切り替え法よりも High SNR mode で駆動する割合が多くなることが確認できた。

次に振幅によるループフィルタ切り替え法と，線形利得によるループフィルタ切り替え法の場合の POI の様子を Fig. 5.12 に示す。Fig. 5.12(a) は振幅によるループフィルタ切り替え法の様子で，Fig. 5.12(b) は線形利得によるループフィルタ切り替え法の POI の様子である。POI の検討には，入力信号に正規化周波数 5/2048 の正弦波を用い，振幅を 0.5 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。このグラフからわかることは，(a) の振幅によるループフィルタ切り替え法の POI の値は振幅 1.0 まで 0 であり安定性を保っていることである。これは，振幅によるループフィルタ切り替え法は振幅 0.65 を閾値としてループフィルタを切り替えており，振幅 0.65 以上の振幅が入力されると，Stable mode のループフィルタに切り替わる。Stable mode のループフィルタは振幅 0.90 程度までは安定であるが，ループフィルタが切り替わったときに，リセットされるので，システムは安定な状態を保つことができていると考える。このことは，Fig. 5.10(a) の振幅によるループフィルタ切り替え法の様子をみると，青色の実線の線形利得の値は 0.9 付近を保っていることからも確認できる。一方，線形利得によるループフィルタ切り替え法では，振幅 0.93 まで POI の値は 0 であるが，それ以上の振幅では 1 近くになり，不安定な状態になっている。線形利得を用いて，システムが不安定になる寸前のところで切り替え，SNR を高めることを目的としているのでシステムは振幅によるループフィルタ切り替え法よりも不安定になりやすい。Fig. 5.10 と Fig. 5.12 より，線形利得によるループフィルタ切り替え法は High SNR mode で駆動する割合は多いが，安定性は振幅切り替えよりも若干劣ることがわかった。このことは，ループフィルタをより安定なものに変更することで対策が可能だと考える。

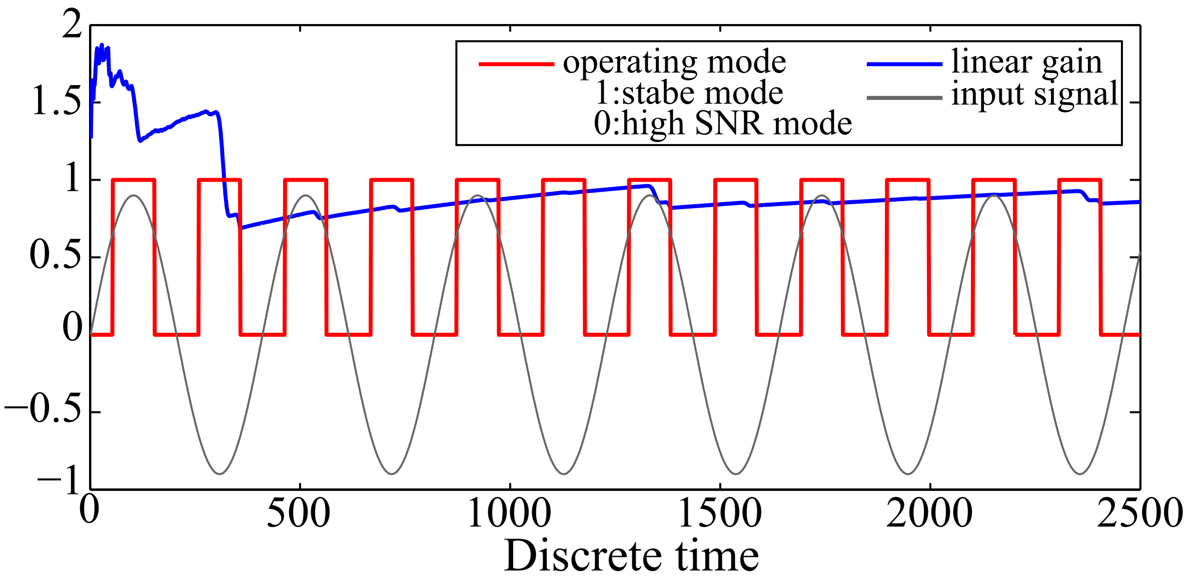


(a)synthesizeNTF 関数と振幅によるループフィルタ切り替え法

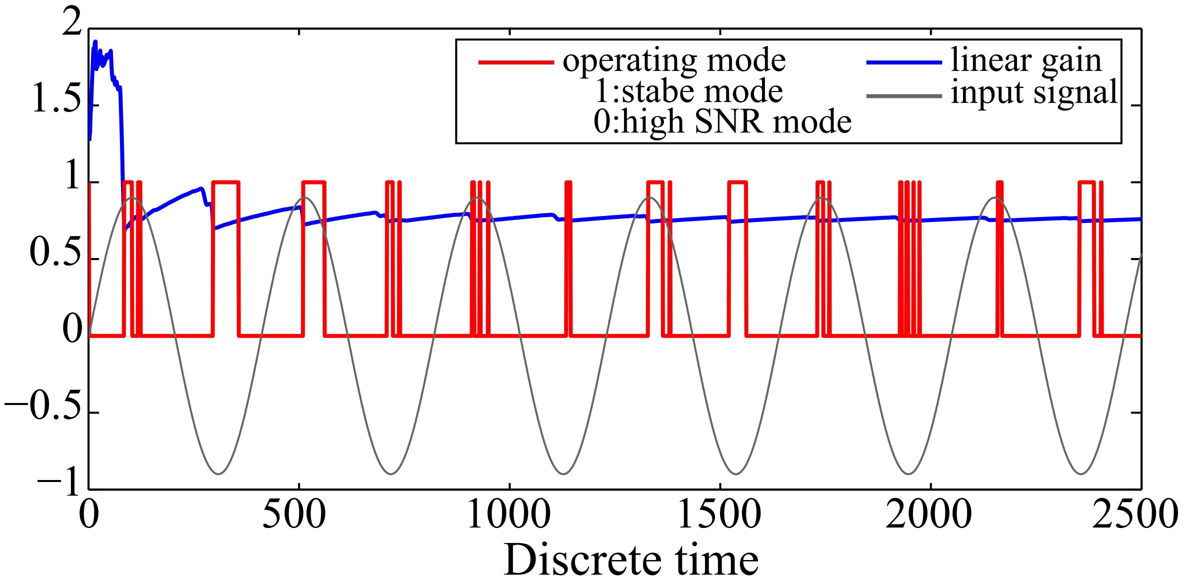


(b)synthesizeNTF 関数と線形利得によるループフィルタ切り替え法

Fig. 5.10: 振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法の全体の様子

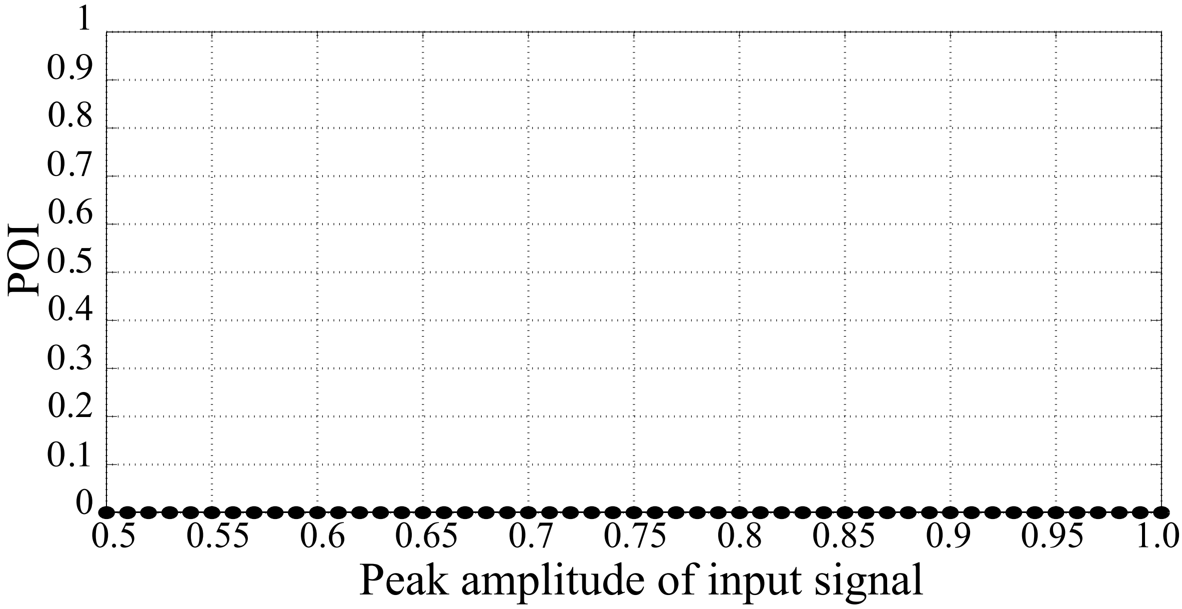


(a)synthesizeNTF 関数と振幅によるループフィルタ切り替え法

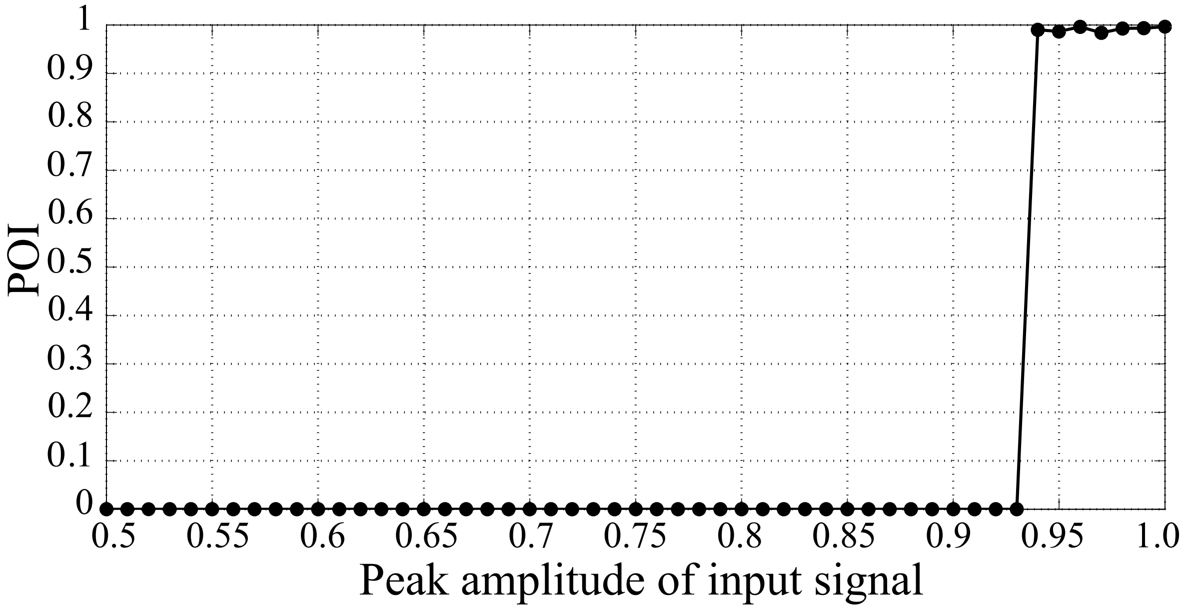


(b)synthesizeNTF 関数と線形利によるループフィルタ切り替え法

Fig. 5.11: 振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法の 2500 ポイントまでの様子



(a) 振幅によるループフィルタ切り替え法とsynthesizeNTF関数によるループフィルタ



(b) 線形利得によるループフィルタ切り替え法とsynthesizeNTF関数によるループフィルタ

Fig. 5.12: 振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法のPOIの様子

5.4 ループフィルタの設計手法が異なる場合のループフィルタ切り替え法の比較

前節では振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利によるループフィルタ切り替え法でループフィルタを切り替えたときの比較をおこない，線形利得によるループフィルタ切り替え法は High SNR mode で駆動する割合は高いが，安定性は振幅によるループフィルタ切り替え法より若干劣ることが確認された。ここでは，線形利得によるループフィルタ切り替え法を用いたとき，synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタと μ 設計法で設計したループフィルタで比較検討をおこなう。これにより，振幅によるループフィルタ切り替え法と同等の安定性を実現することを目指す。

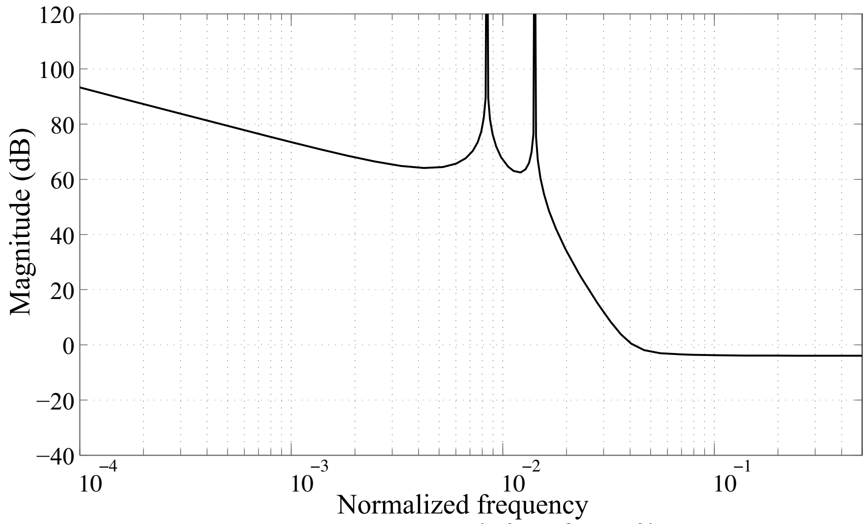
5.4.1 ループフィルタの設計

振幅によるループフィルタ切り替え法と線形利得によるループフィルタ切り替え法の比較と同じように Stable mode と High SNR mode のループフィルタを設計する。synthesizeNTF 関数を用いて設計したループフィルタのパラメータは，振幅によるループフィルタ切り替え法で用いたパラメータと同じに設定した。ループフィルタの次数を 5 次，OSR を 32 とし，HInf 値はリーの基準を参考にし Stable mode で 1.3，High SNR mode で 1.5 とした。この条件で synthesizeNTF 関数を用いて設計した High SNR mode のループフィルタと Stable mode のループフィルタの伝達関数は High SNR mode が式 (5.2) であり，Stable mode は式 (5.3) である。また，High SNR mode と Stable mode の入力振幅による SNR の変化の様子は Fig. 5.7 であり，振幅 0.5，正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力したときの出力振幅特性は Fig. 5.6 である。

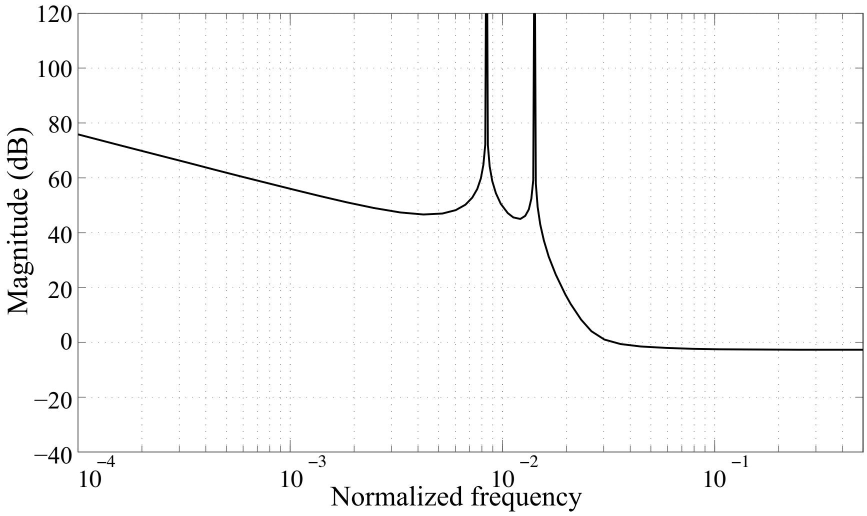
次に，第 4 章で示した μ 設計法を用いてループフィルタを設計する。synthesizeNTF 関数で設計したものと同様にループフィルタの次数を 5 次，オーバーサンプリング比を 32 とした。さらに，その他の必要なパラメータを設定する。ノミナルプラントを $k = 1$ とし，ノミナルプラントからの加法的誤差の上限を近似する重み関数 W_m は 0.5 とした。量子化雑音から出力への影響を抑圧するための外乱抑制問題における重み関数 W_s は，synthesizeNTF 関数の NTF の逆フィルタを用いた。Stable mode のときのリーの基準の値を 1.3，High SNR mode のときのリーの基準の値を 1.5 とし重み関数を設計した。High SNR mode は式 (5.2)，Stable mode は式 (5.3) で表される伝達関数の逆フィルタを使用した。High SNR mode の重み関数 W_s を安定化させる係数 α は 0.99999999 とした。Stable mode の係数 α も 0.99999999 として設計したが，synthesizeNTF 関数で設計した NTF と同じ NTF が設計されたので，Stable mode の係数 α を 0.99999999999 とした。重み関数 W_s に掛けるゲイン g は両方とも 0.95 とした。Table.5.2 に High SNR mode と stable mode のパラメータをまとめて示す。

Table.5.2: 重み関数パラメータ

order（共通）	5	High SNR mode α	0.99999999	High SNR mode Hinf	1.5
osr（共通）	32	Stable mode α	0.99999999999	Stable mode Hinf	1.3
g（共通）	0.95				



(a)High SNR mode **設計時の重み関数** *Ws*



(b)Stable mode **設計時の重み関数** *Ws*

Fig. 5.13: High SNR mode と Stable mode の重み関数

High SNR mode，Stable mode の重み関数の様子を Fig. 5.13 に示す。

以上の条件で設計した High SNR mode のループフィルタの伝達関数を式 (5.4) に，Stable mode の伝達関数を式 (5.5) に示す。

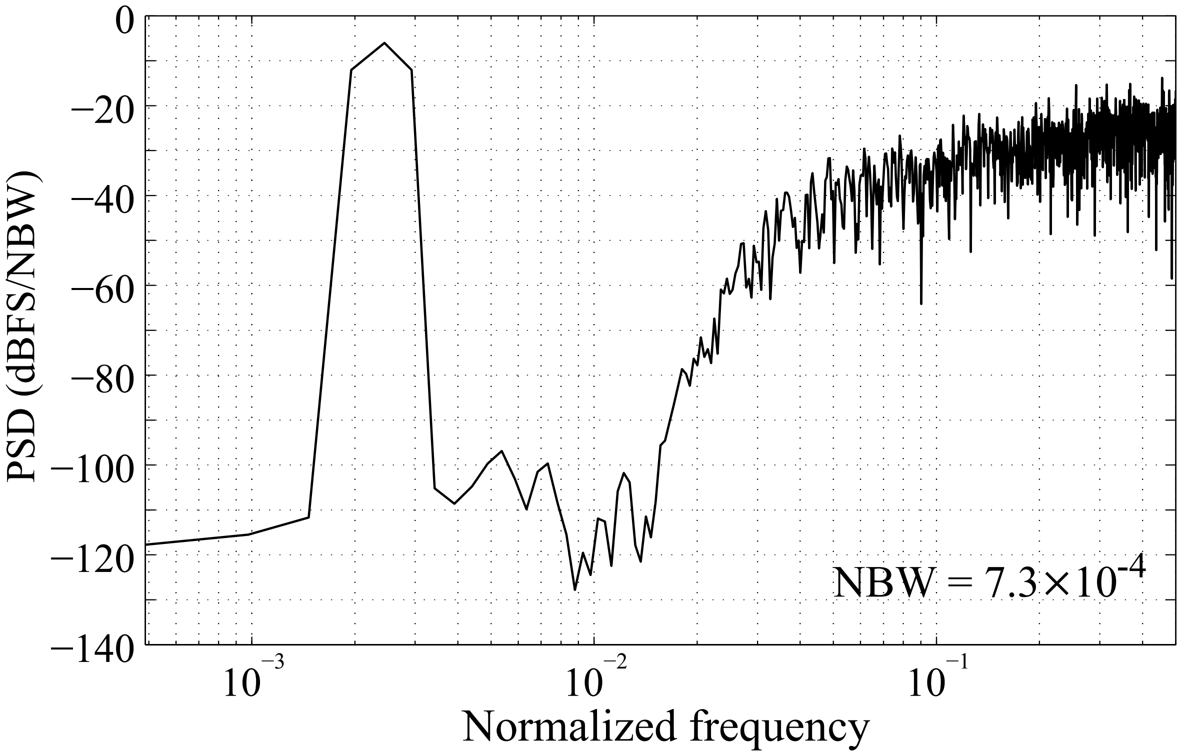
$$NTF_{\mu H}(z)=\frac{(z-0.9981)(z^2-1.994z+0.9973)(z^2-1.991z+0.9991)}{(z-0.1938)(z^2-1.547z+0.6013)(z^2-1.855z+0.8934)} \tag{5.4}$$

$$NTF_{\mu S}(z)=\frac{(z-1)(z^2-1.997z+0.9992)(z^2-1.99z+0.9978)}{(z-0.5211)(z-0.7699)(z-0.9501)(z^2-1.92z+0.9408)} \tag{5.5}$$

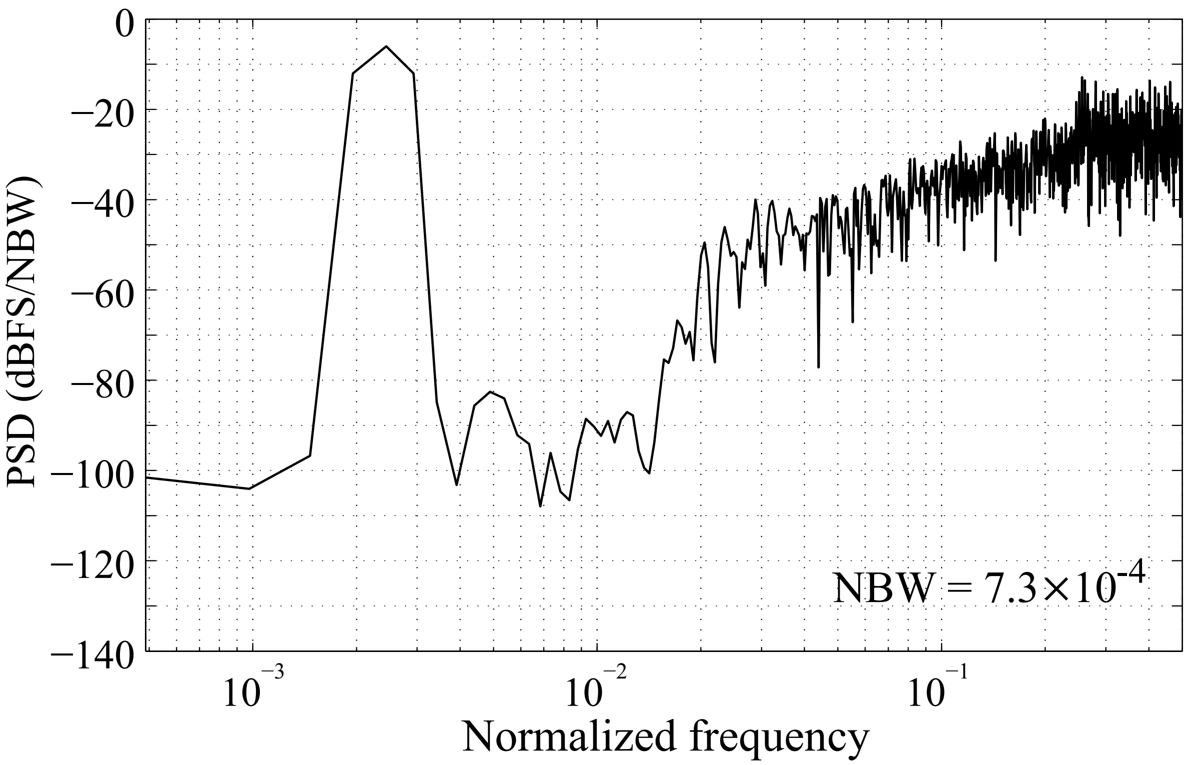
μ 設計法を用いて設計した High SNR mode と Stable mode のループフィルタにフルスケールの半分の振幅（-6dB 相当），正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力したときの出力振幅特性を Fig. 5.14 に示す。FFT は Hann 窓を用いて FFT ポイント数 2048 ポイントで行った。Fig. 5.14(a) と (b) と比較して，Hinf の値が大きい High SNR mode の方が信号帯域幅でのノイズフロアが低く SNR が高いことがわかる。

次に，入力振幅に対する SNR の変化を Fig. 5.15 に示す。入力信号は正規化周波数 5/2048 の正弦波で振幅を 0.1 から 1 まで変化させた。Fig. 5.14 と Fig. 5.15 より，HighSNR mode は SNR は 70dB から 85dB 程度で，入力振幅 0.72 程度まで安定しており，Stable mode の SNR は 55dB から 70dB 程度で HighSNR mode よりも小さいが，入力振幅 0.93 程度まで安定動作をしている。これは Fig. 5.7，Fig. 5.6 で示した，synthesizeNTF 関数を用いて設計した HighSNR mode と Stable mode のループフィルタの SNR と比較して，同程度の SNR でありながら入力振幅に対する安定性が高くなっていることが示されている。

Fig. 5.16 に POI の様子を示す。入力信号は正規化周波数 5/2048 の正弦波であり，振幅を 0.5 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた。POI の様子からも 2 つのループフィルタの入力振幅に対する安定性の違いが確認できる。また，Fig. 5.8 の synthesizeNTF 関数で設計した場合の POI と比べて，安定性が向上していることも合わせて確認できる。



(a) High SNR mode



(b) stable mode

Fig. 5.14: μ設計で設計した２つのループフィルタの出力振幅特性

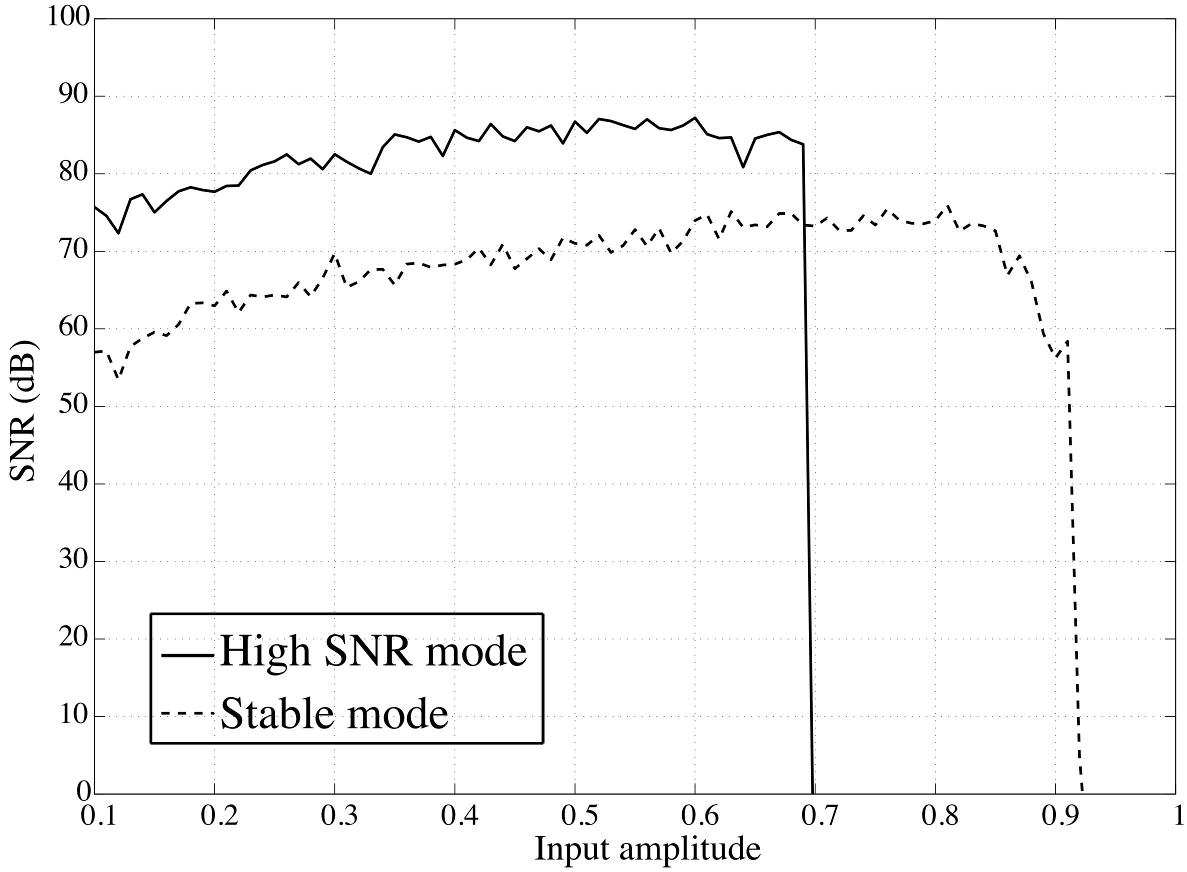


Fig. 5.15: μ 設計で設計した２つのループフィルタの入力振幅に対する SNR

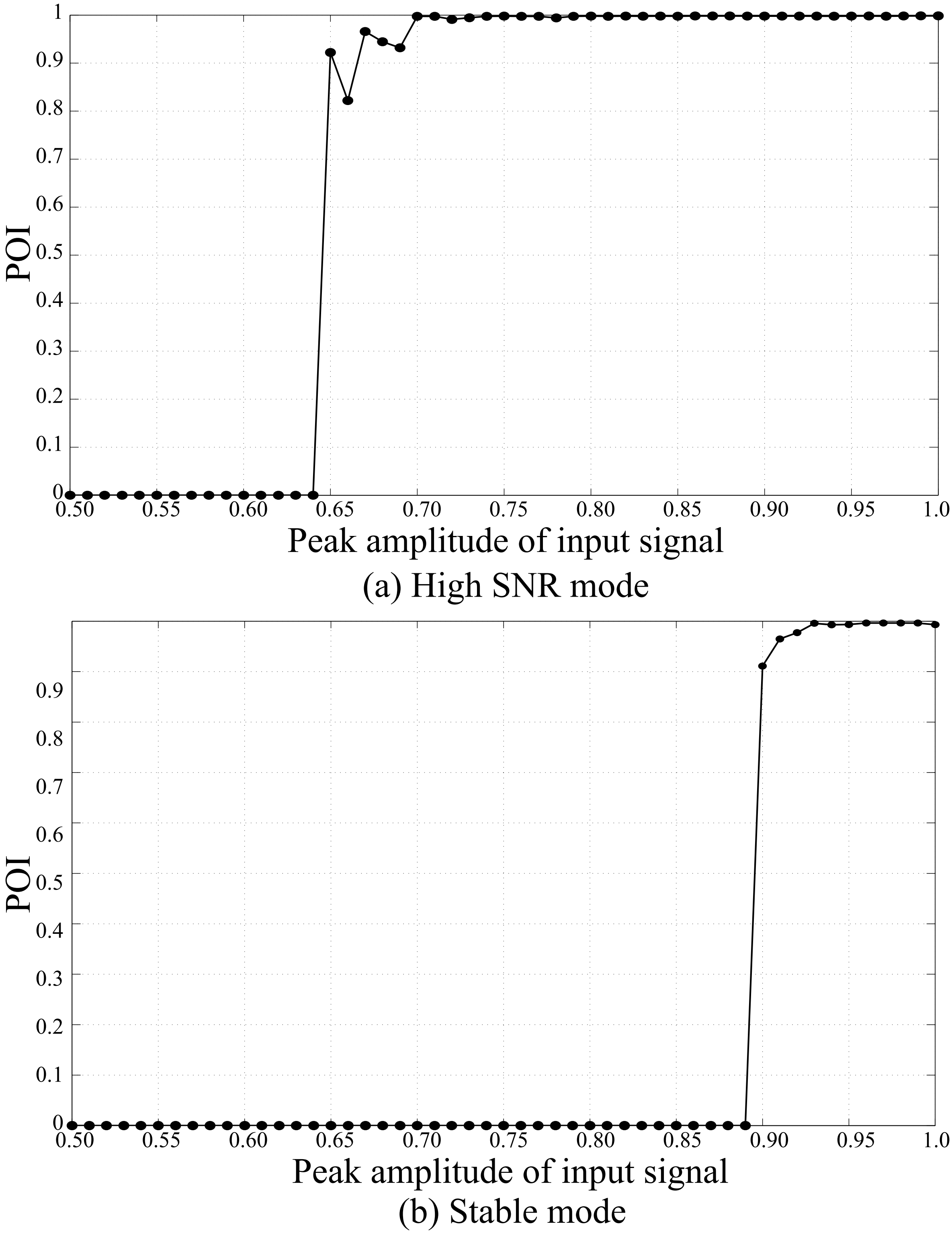


Fig. 5.16: μ設計で設計した２つのループフィルタの POI

5.4.2 比較と検討

synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタと μ 設計法で設計したループフィルタで線形利得切り替え法を適用したときの比較をおこなう。線形利得によるループフィルタ切り替えの閾値は，5.3.2 項と同様の検討を行った。線形利得の閾値を決める実験では入力振幅 0.9, 正規化周波数 5/2048 の正弦波を 8192 ポイント入力し, その 8192 ポイントの中で High SNR mode で駆動するポイントを求め, 割合を計算した。線形利得の閾値を 0.10 から 0.90 まで 0.05 ステップで変えた結果を Fig. 5.17 に示す。検討の結果により，SNR で駆動する割合が最も高い線形利得 0.25 を閾値として採用した。

一例として，5.3.2 項の synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタを線形利得で切り替える場合と比較する。5.3.2 項と同様に，入力振幅 0.9，正規化周波数 5/2048 の正弦波を 8192 ポイント入力した場合，Fig. 5.18 に 8192 ポイント入力したときの切り替えの様子を示し，Fig. 5.19 に 1 ポイントから 2500 ポイントまでの切り替えの様子を示す。グラフの見方は Fig. 5.10 と Fig. 5.11 と同じである。Fig. 5.18 を見ると，μ 設計法で設計した場合は線形利得 0.25 で HighSNR mode と Stable mode が切り替わっている様子が確認できる。入力ポイント数 8192 ポイント中，

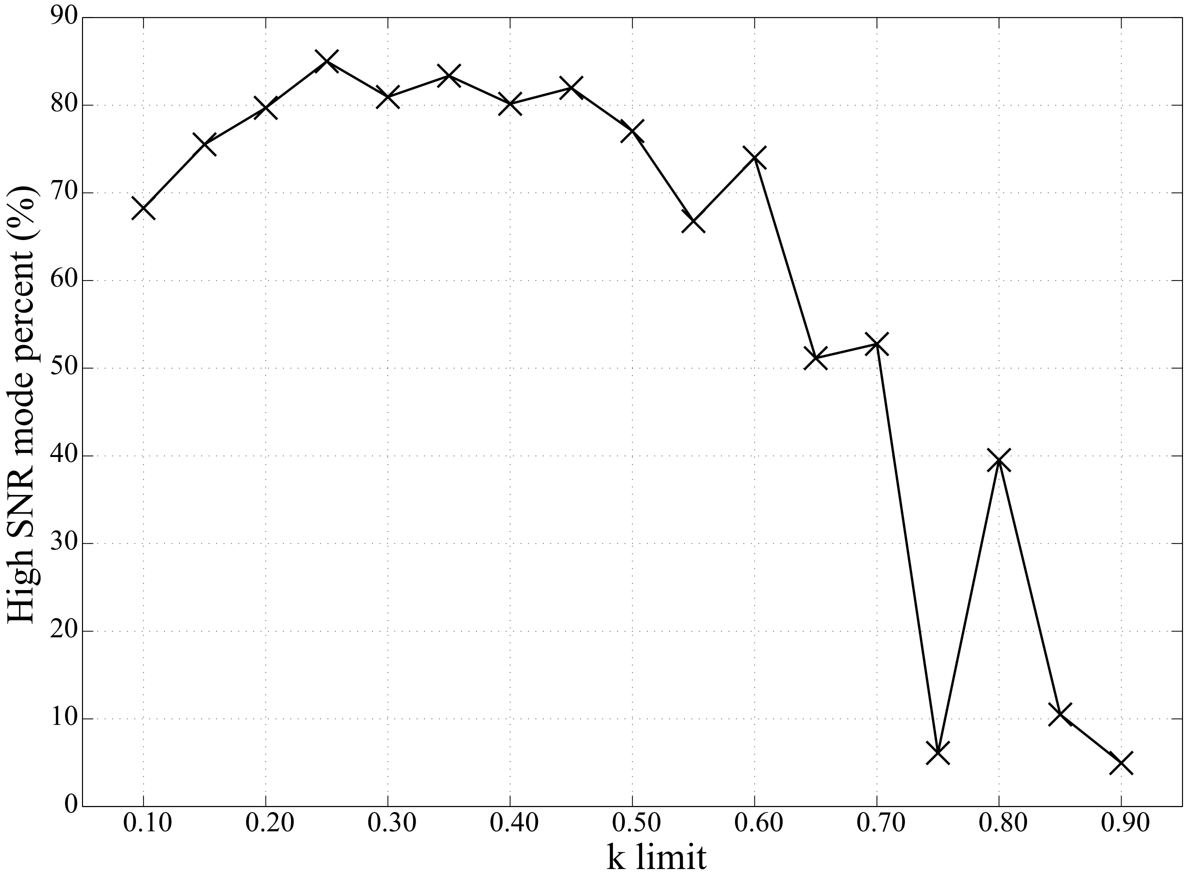
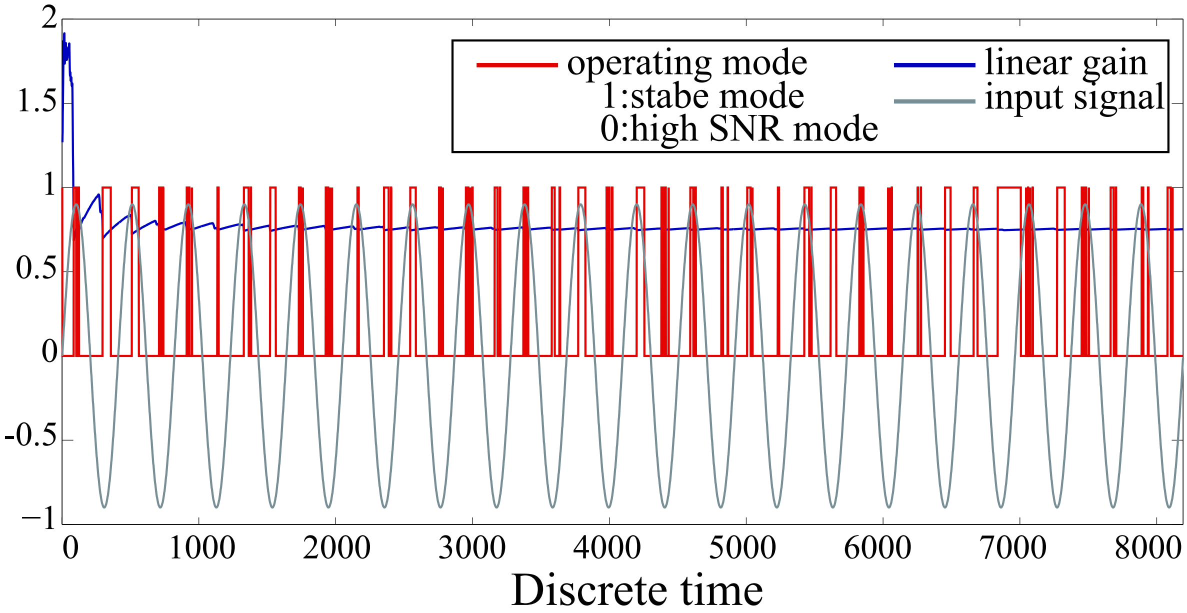


Fig. 5.17: 線形利得の閾値の違いによる High SNR mode での動作の割合

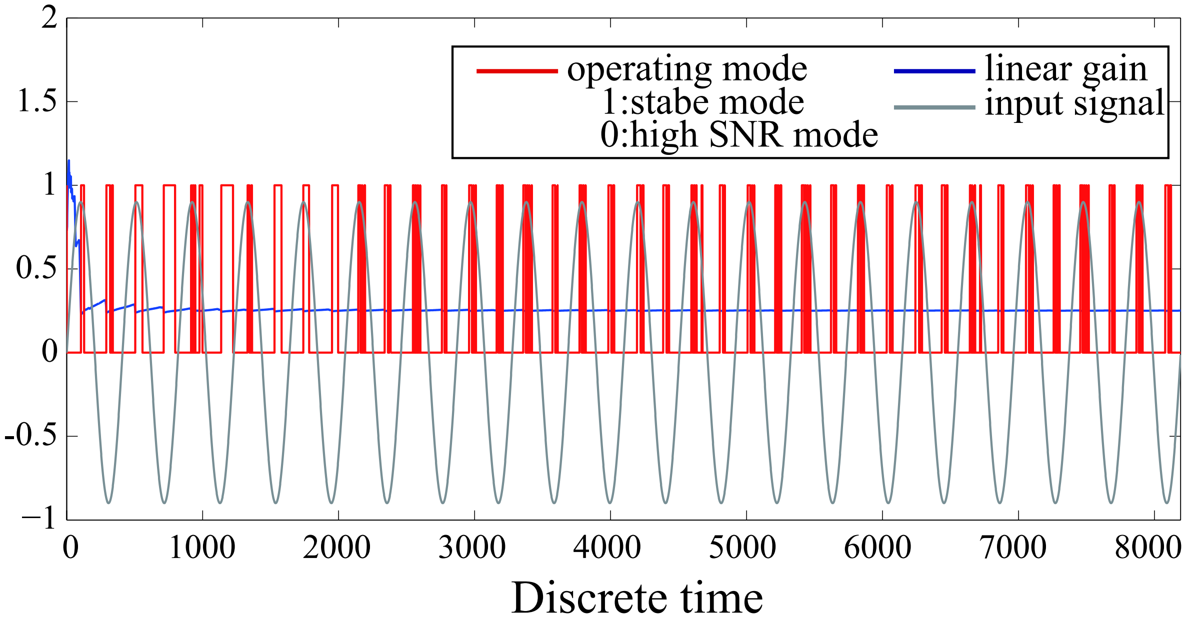
HighSNR mode で駆動する割合を求めたところ，synthesizeNTF 関数を用いたループフィルタと線形利得によるループフィルタの切り替えの場合では 5.3.2 項の線形利得切り替え法の場合と同じで 85.8%，μ 設計を用いたループフィルタと線形利得によるループフィルタの切り替えの場合では 85.0% であった。ループフィルタの設計方法を μ 設計法に変更することでの，High SNR mode で動作する割合の変化はほぼないと考えて良い。

次に，Fig. 5.20 に POI の様子を示す。Fig. 5.20(a) は線形利得切り替え法と synthesizeNTF 関数を用いたループフィルタの場合であり，Fig. 5.20(b) は線形利得切り替え法と μ 設計法を用いたループフィルタの場合の結果である。入力信号に正規化周波数 5/2048 の正弦波を用い，振幅を 0.5 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。synthesizeNTF 関数を用いたループフィルタの Fig. 5.20(a) の場合は入力振幅 0.94 ですぐに POI の値が 1 付近まで上昇し不安定となっているが，μ 設計法を用いたループフィルタの Fig. 5.20(b) の場合は入力振幅 1.0 まで POI の値 0 を保っており安定である。この POI の結果により，μ 設計法を用いることで synthesizeNTF 関数を用いた線形利得によるループフィルタ切り替え法より安定に動作することがわかった。

以上の結果より，線形利得によるループフィルタ切り替え法を用いた場合，synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタを用いるよりも μ 設計をで設計したループフィルタを用いる方が HighSNR mode で駆動する割合を保ちながら，入力振幅に対する安定性を改善できることが確認できた。

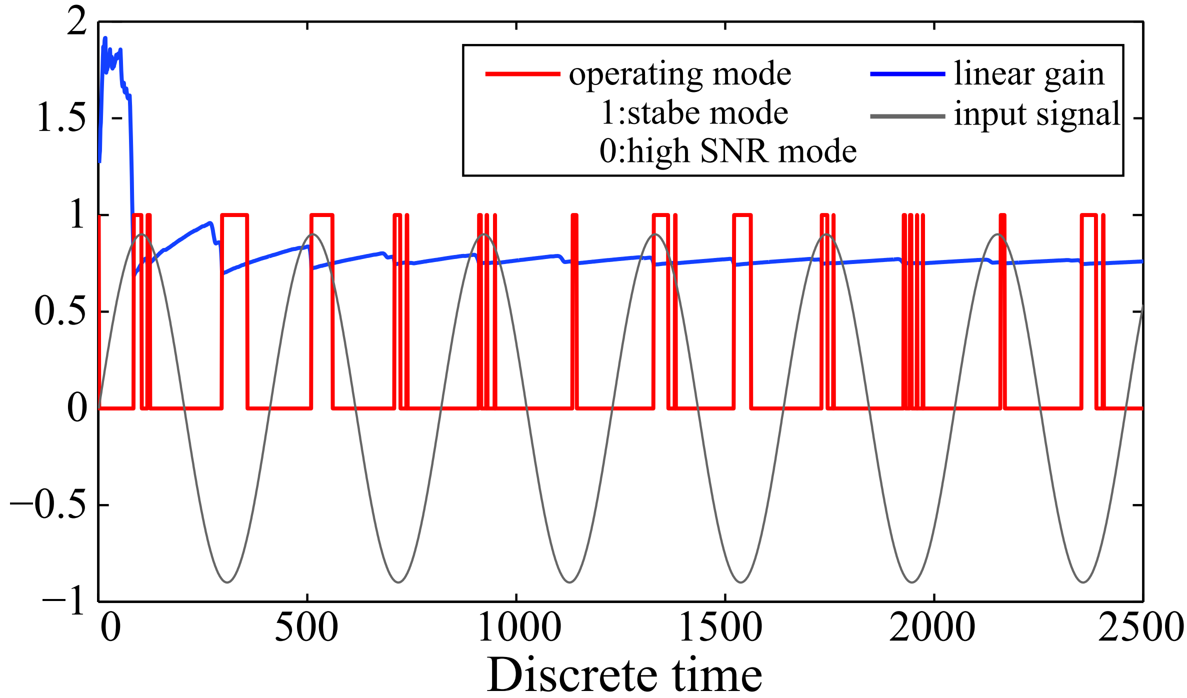


(a) 線形利得によるループフィルタ切り替え法と synthesizeNTF 関数

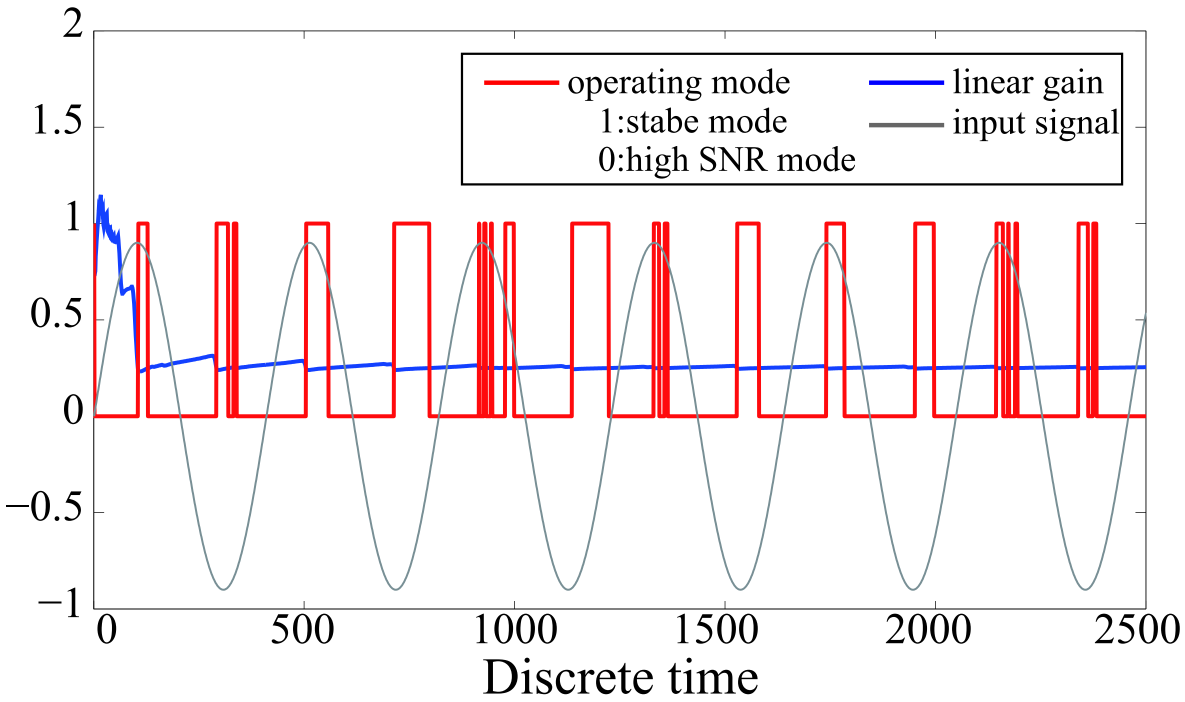


(b) 線形利得によるループフィルタ切り替え法と μ 設計法

Fig. 5.18: 線形利得によるループフィルタ切り替え法による全体の様子

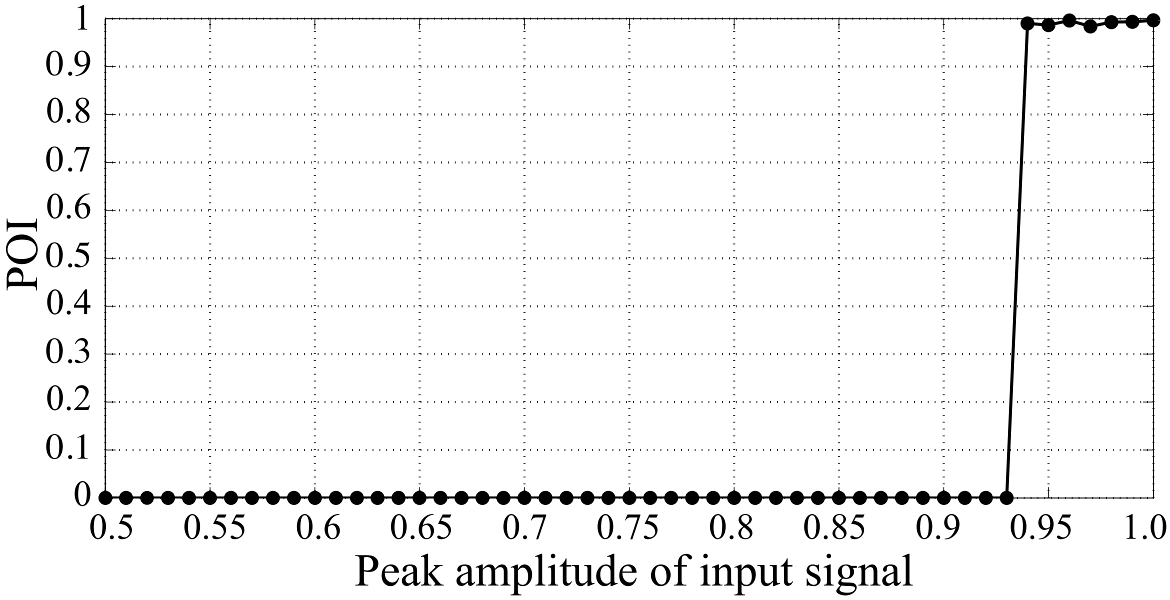


(a) 線形利得によるループフィルタ切り替え法と synthesizeNTF 関数

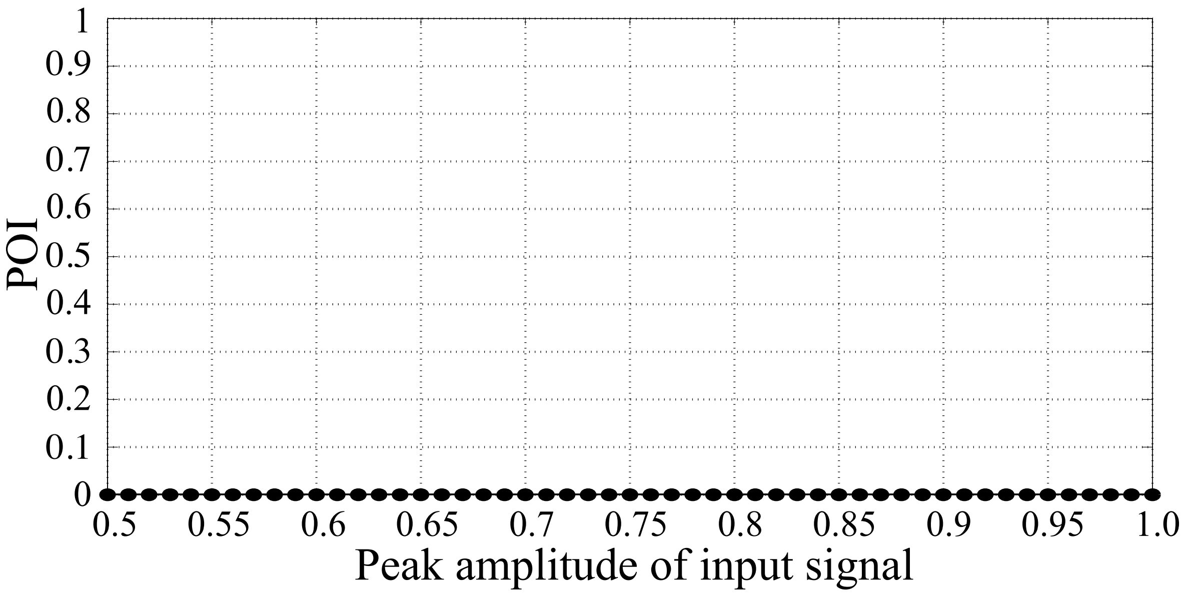


(b) 線形利得によるループフィルタ切り替え法と μ 設計法

Fig. 5.19: 線形利得によるループフィルタ切り替え法による 2500 ポイントまでの様子



(a) 線形利得によるループフィルタ切り替え法とsynthesizeNTF関数によるループフィルタ



(b) 線形利得によるループフィルタ切り替え法と μ 設計法によるループフィルタ

Fig. 5.20: 検討するシステムの POI

Table. 5.3 に本章で検討したループフィルタ切り替え法，ループフィルタの設計法の違いによるデルタシグマ変調器の High SNR mode 駆動割合，POI による安定な入力振幅の上限についてまとめた。

Table.5.3: 各切り替え方法とループフィルタ設計法による違い

	High SNR mode 駆動割合	入力振幅上限
振幅による切り替えと synthesizeNTF 関数	51.5	1.0
線形利得による切り替えと synthesizeNTF 関数	85.8	0.93
線形利得による切り替えと μ 設計	85.0	1.0

この表から，High SNR mode の駆動時間と入力振幅の上限ともに高いものは，本章で提案した線形利得線形利得によるループフィルタ切り替え法と μ 設計法によるループフィルタの組み合わせであることがわかる。

5.5 まとめ

本章では，先行研究である振幅によるループフィルタ切り替え法を参考にし，HighSNR mode と Stable mode の二つのループフィルタを用い，線形利得の値によってループフィルタを切り替えることで HighSNR mode での駆動割合を高めつつ，入力振幅に対する安定性を高めることを目指した。

はじめに，予備実験としてデルタシグマ変調器の安定性について，線形利得が 0 になると不安定になることを利用し検討した。その結果，入力信号に対する SNR から判断される安定性では，SNR=0 となる入力振幅でデルタシグマ変調器は不安定となるが，その不安定になる入力振幅において線形利得を観察すると，すぐには線形利得は 0 にはならないことがわかった。この結果により，HighSNR mode と Stable mode の二つのループフィルタを，入力振幅を参照してループフィルタを切り替えるよりも，線形利得を参照してループフィルタを切り替える方が，大きな振幅を入力でき結果として SNR も高く保つことができると考えた。

次に，予備実験での結果をもとに，従来法である振幅によるループフィルタ切り替え法と，提案手法である線形利得によるループフィルタ切り替え法の比較を行った。提案手法では High SNR mode で駆動する時間が高くなるが，入力振幅に対する安定性は従来法よりもやや劣ることがわかった。

最後に，入力振幅に対する安定性を高くするために，線形利得によるループフィルタ切り替え法で HighSNR mode と Stable mode の二つのループフィルタの設計に μ 設計法を用いて比較を行った。その結果，μ 設計法によるループフィルタと線形利得によるループフィルタ切り替え法を組み合わせることにより，入力振幅に対する安定性が従来法の振幅によるループフィルタ切り替え法と同等程度まで改善されることが確認された。以上より，従来法である振幅によるループフィルタ切り替え法と比べ，線形利得によるループフィルタ切り替え法と μ 設計法を組み合わせることにより High SNR mode で駆動する割合を高くしつつ，入力振幅に対する安定性を高めることができることが確認された。

第 6 章

ディザを適用したデルタシグマ変調器の安定性

一般的なマルチビット A-D 変換器にディザを適用することで，量子化雑音を入力信号と無相関化する技術は知られている。また，DC 成分のアイドルトーンを軽減する目的でデルタシグマ変調器にディザを付加することは検討されている [36] が，本研究では，ディザを付加することで入力振幅に対する安定性の改善について検討する。デルタシグマ変調器は出力信号と量子化雑音をループフィルタへフィードバックするシステムである。そのため，量子化雑音を無相関化しランダムな値をフィードバックすることで，一定期間におけるフィードバック量の増加を軽減できると考え，結局は量子化器への入力レベルを下げることになり入力振幅に対する安定性の改善が期待できると考える。

6.1　提案するシステム

本研究では，入力信号にディザを付加しループフィルタを通過させた後に量子化する方法と，量子化器の直前でディザを付加する方法について検討した。ディザは一般的な低周波数領域から高周波数領域まで広がる広帯域ディザと，高周波数領域のみに成分がある高域集中ディザ [37] の 2 種類を用いて検討した。そのため，

- 入力信号に広帯域ディザを付加した場合
- 入力信号に高域集中ディザを付加した場合
- 量子化器の直前で広帯域ディザを付加した場合
- 量子化器の直前で高域集中ディザを付加した場合

の 4 つの場合で検討した。まずは，入力信号にディザを付加した場合と，量子化器の直前でディザを付加した場合の伝達関数について述べる。

6.1.1 入力信号にディザを付加した場合の伝達関数

まず，はじめに入力信号にディザを付加した場合の伝達関数について検討する。1bit 量子化器を線形利得 k とそれに加わる量子化誤差 $E(z)$ でモデル化し，入力信号にディザを付加した場合のブロック線図を Fig. 6.1 に示す。図で，$M(z)$ は入力信号，$V(z)$ は量子化出力信号，$Y(z)$ は量子化器への入力信号，$D(z)$ は付加したディザ，$L_0(z)$，$L_1(z)$ はループフィルタである。このとき，量子化器への入力信号 $Y(z)$ は，

$$Y(z) = L_0(v)\{M(z) + D(z)\} + L_1(z)V(z) \tag{6.1}$$

となり，量子化出力信号 $V(z)$ は $k = 1$ とすると，

$$V(z) = Y(z) + E(z) \tag{6.2}$$

となるので，式 (6.1)，式 (6.2) より量子化出力信号 $V(z)$ を求めると，

$$V(z) = \frac{L_0(z)}{1 - L_1(z)}\{M(z) + D(z)\} + \frac{1}{1 - L_1(z)}E(z) \tag{6.3}$$

となる。入力信号 $M(z)$ に係る係数は信号伝達関数 (STF)，量子化雑音 $E(z)$ に係る係数は雑音伝達関数 (NTF) であるので，

$$V(z) = STF(z)\{M(z) + D(z)\} + NTF(z)E(z)$$

と置き換えることができる。さらに，$STF(z) = 1$ とすると，

$$V(z) = \{M(z) + D(z)\} + NTF(z)E(z) \tag{6.4}$$

となり，入力信号にディザが付加されたまま出力されることになる。出力信号からディザの影響をなくすためにの対策として，Fig. 6.2 に示すように出力信号からディザを減算することが考えられ

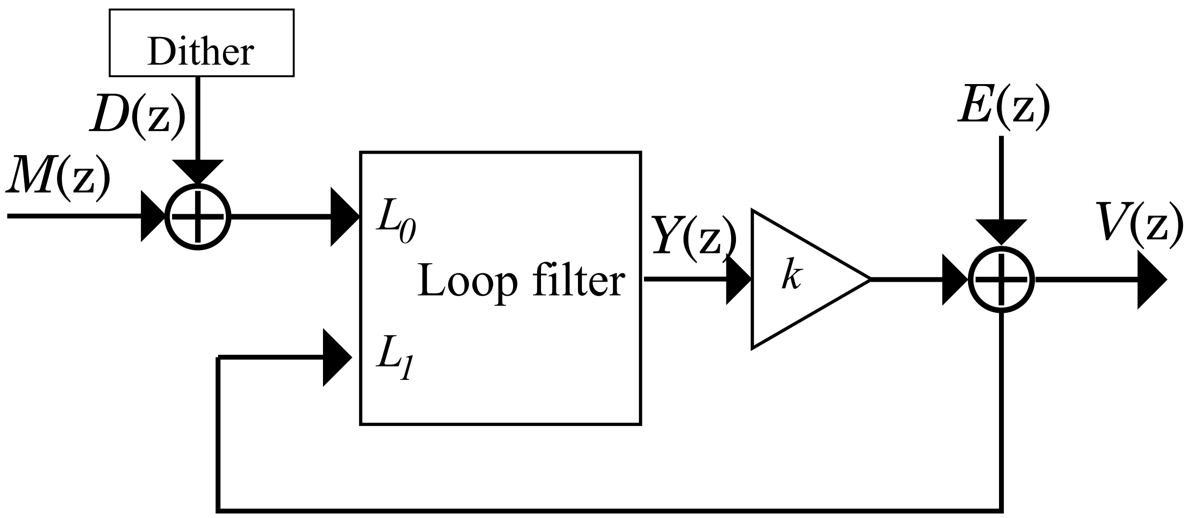


Fig. 6.1: 入力信号にディザを付加した場合のブロック線図

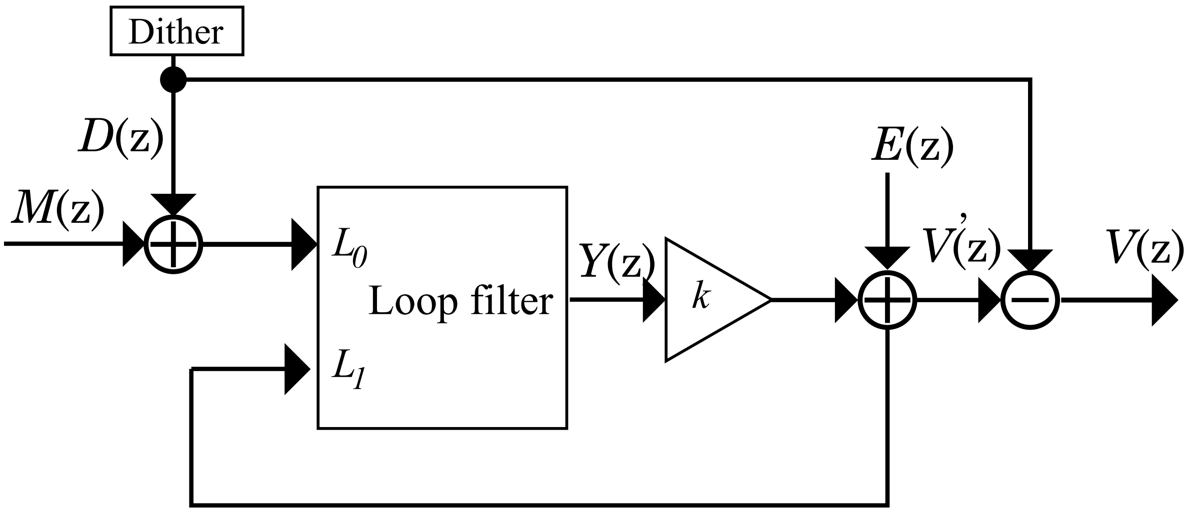


Fig. 6.2: 出力信号からディザを減算する場合のブロック線図

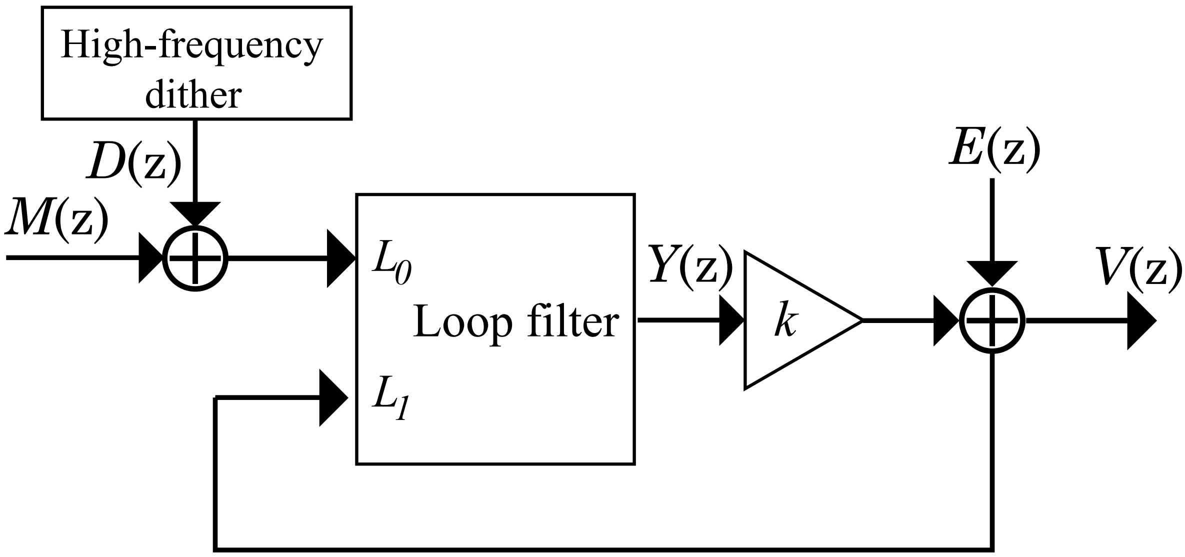


Fig. 6.3: 入力信号に高域集中ディザを適用した場合のブロック線図

る。式 (6.4) の $V(z)$ を $V'(z)$ に変え，$V'(z)$ から $D(z)$ を減算すれば,

$$V(z) = V'(z) - D(z) = M(z) + NTF(z)E(z) \tag{6.5}$$

となり，出力信号からディザの影響をなくし入力信号をそのまま取り出せるようになる。しかし，デルタシグマ変調器は回路が簡潔という利点があるので，ディザを減算する回路を新たに加えることは避けたい。そこで，高域集中ディザを付加することを考える。この場合のブロック線図を，Fig. 6.3 に示す。一般に，デルタシグマ変調器は NTF によって量子化誤差が高周波数域にシェイピングされる。必要な信号帯域は主に低周波数領域であるので，その低周波数領域に影響を及ぼさない高域集中ディザを用いることで，式 (6.4) の状態で，減算することなくディザを扱えるのではないかと考える。

6.1.2 量子化器の直前でディザを付加した場合の伝達関数

次に，量子化器の直前でディザを付加した場合の伝達関数について検討する。入力信号にディザを付加した場合と同様に，1bit 量子化器を線形利得 k とそれに加わる量子化誤差 $E(z)$ でモデル化し，量子化器の直前でディザを付加した場合のブロック線図を Fig. 6.4 に示す。図で，$M(z)$ は入力信号，$V(z)$ は量子化出力信号，$Y(z)$ はループフィルタからの出力信号，$Y'(z)$ は量子化器への入力信号，$D(z)$ は付加したディザ，$L_0(z)$，$L_1(z)$ はループフィルタである。このとき，ディザを付加する直前のループフィルタからの出力信号 $Y(z)$ は，

$$Y(z) = L_0(v)M(z) + L_1(z)V(z) \tag{6.6}$$

となり，ディザを付加した量子化器の入力信号 $Y'(z)$ は

$$Y'(z) = Y(z) + D(z) = L_0(v)M(z) + L_1(z)V(z) + D(z) \tag{6.7}$$

となる。量子化出力信号 $V(z)$ は

$$V(z) = Y'(z) + E(z) = Y(z) + D(z) + E(z) = L_0(v)M(z) + L_1(z)V(z) + D(z) + E(z) \tag{6.8}$$

となるので，式 (6.8) より量子化出力信号 $V(z)$ を求めると，

$$V(z) = \frac{L_0(z)}{1 - L_1(z)}M(z) + \frac{1}{1 - L_1(z)}\{E(z) + D(z)\} \tag{6.9}$$

となる。入力信号 $U(z)$ の係数は STF，量子化雑音 $E(z)$ とディザ $D(z)$ の係数は NTF なので，

$$V(z) = STF(z)M(z) + NTF(z)\{E(z) + D(z)\} \tag{6.10}$$

と書くことができる。STF を 1 とすると，

$$V(z) = M(z) + NTF(z)\{E(z) + D(z)\} \tag{6.11}$$

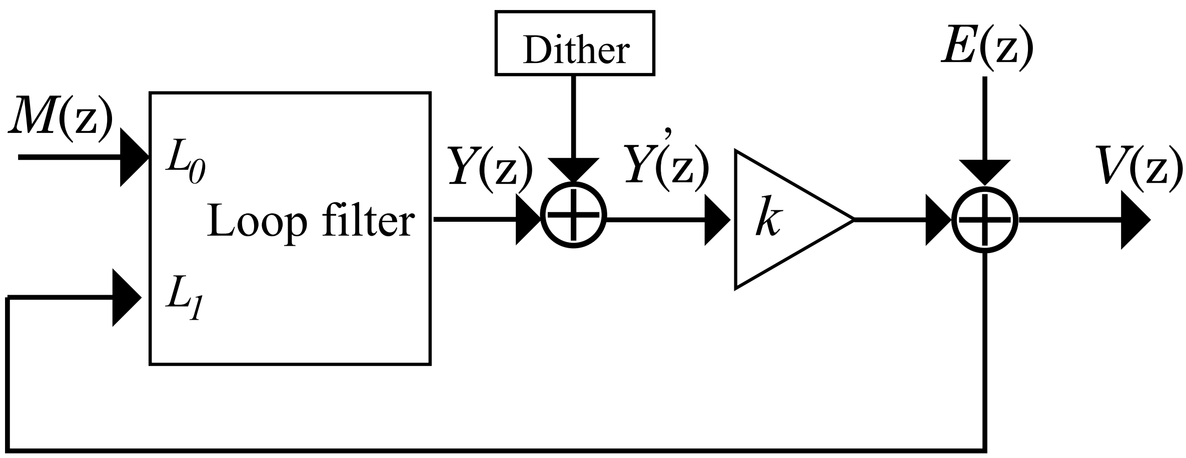


Fig. 6.4: 量子化器の直前でディザを適用したブロック線図

となり，量子化出力信号 $V(z)$ は入力信号 $M(z)$ をそのまま出力し，また，量子化誤差 $E(z)$ とディザ $D(z)$ は，高域上がりの特性である NTF によって信号帯域外にシェイピングされることになる。以上のことから，量子化器の直前でディザを付加する場合，高域集中ディザに限らず，出力信号からディザを減算しなくとも，必要な SNR が得られる可能性があることがわかる。

6.2 シミュレーションによる特性評価

6.2.1 ループフィルタとディザの設計

μ 設計法に基づいて 5 次，OSR32 のループフィルタを設計した。ここでは第 5 章で μ 設計法した HIgh SNR mode と同じループフィルタを用いた。設計に必要なパラメータは同じであるが，再び示すことにする。ノミナルプラントを $k=1$ とし，ノミナルプラントからの加法的誤差の上限を近似する重み関数 W_m は 0.5 とした。量子化雑音から出力への影響を抑圧するための外乱抑制問題における重み関数 W_s は，Hinf 1.5 で設計した synthesizeNTF 関数の NTF の逆フィルタを用いた。重み関数 W_s を安定化させる α は 0.99999999，重み関数 W_s に掛けるゲイン g は 0.95 とした。Table.6.1 に使用したパラメータをまとめて示す。重み関数 W_s のグラフは Fig. 5.13(a) と同じである。

Table.6.1: 設計に用いたパラメータ

order	5	α	0.99999999
osr	32	g	0.95
重み関数 W_s の Hinf	1.5		

以上の条件で設計した μ 設計法による NTF の伝達関数を式 (6.12) に示す。

$$NTF(z)=\frac{(z-0.9981)(z^2-1.994z+0.9973)(z^2-1.991z+0.9991)}{(z-0.1938)(z^2-1.547z+0.6013)(z^2-1.855z+0.8934)} \tag{6.12}$$

ディザは，正規化周波数 0 から 0.5 まで一様に分布する広帯域ディザと，高周波数帯域のみに分布する高域集中ディザを用いた。広帯域ディザは確率密度関数を用い振幅 ±0.01 の間に一様分布するように設計した。高域集中ディザは設計した広帯域ディザに，カットオフ周波数が正規化周波数 0.2 のハイパスフィルタをかけて，主に正規化周波数 0.1 以上にディザが集中するように設計した。高域集中ディザの周波数応答関数を Fig. 6.5 に示す。

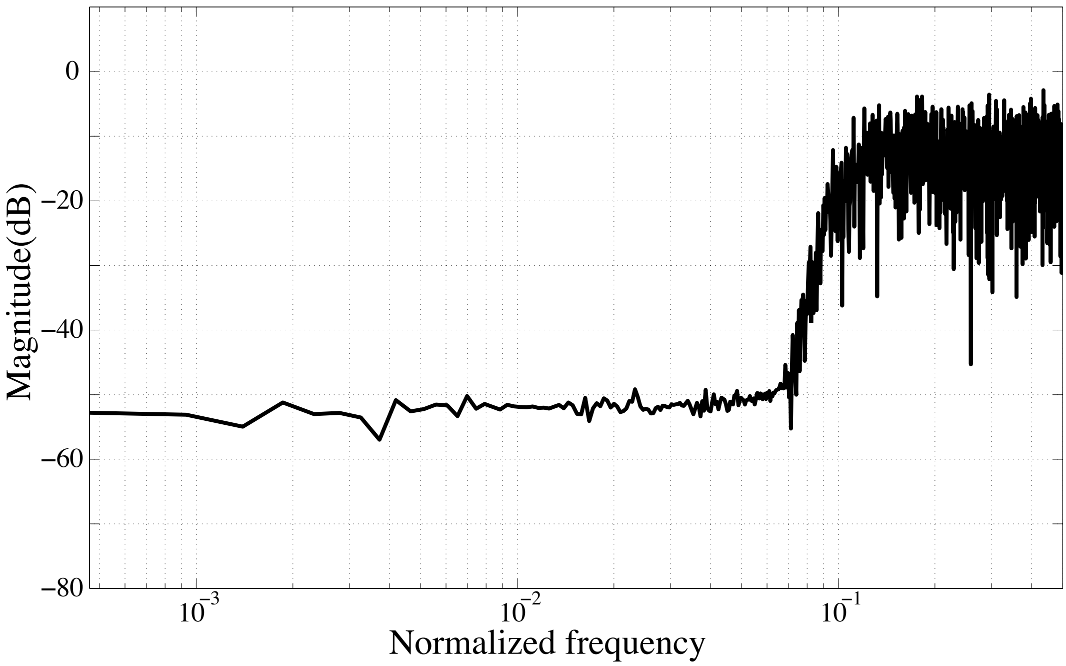


Fig. 6.5: 設計した高域集中ディザの PSD

6.2.2 入力信号に広帯域ディザを付加した場合の安定性

まずはじめに，6.1.1 項の入力信号に広帯域ディザを付加した場合について検討する。広帯域ディザを付加した場合，式 (6.4) のように出力信号にディザが含まれているので，Fig. 6.2 のように出力信号から広帯域ディザを減算する必要があるかどうかを検討をする。Fig. 6.6(a) は正規化周波数 5/2048，振幅 0.5 の正弦波入力信号であり，Fig. 6.6(b) は (a) の正弦波入力信号に 6.2.1 項で設計した広帯域ディザを付加した信号である。Fig. 6.6(a) と (b) の信号を用いて，デルタシグマ変調器に入力したときの PSD の様子を Fig. 6.7 に示す。FFT は Hann 窓を用い，FFT ポイント数は 2048 ポイントで行った。

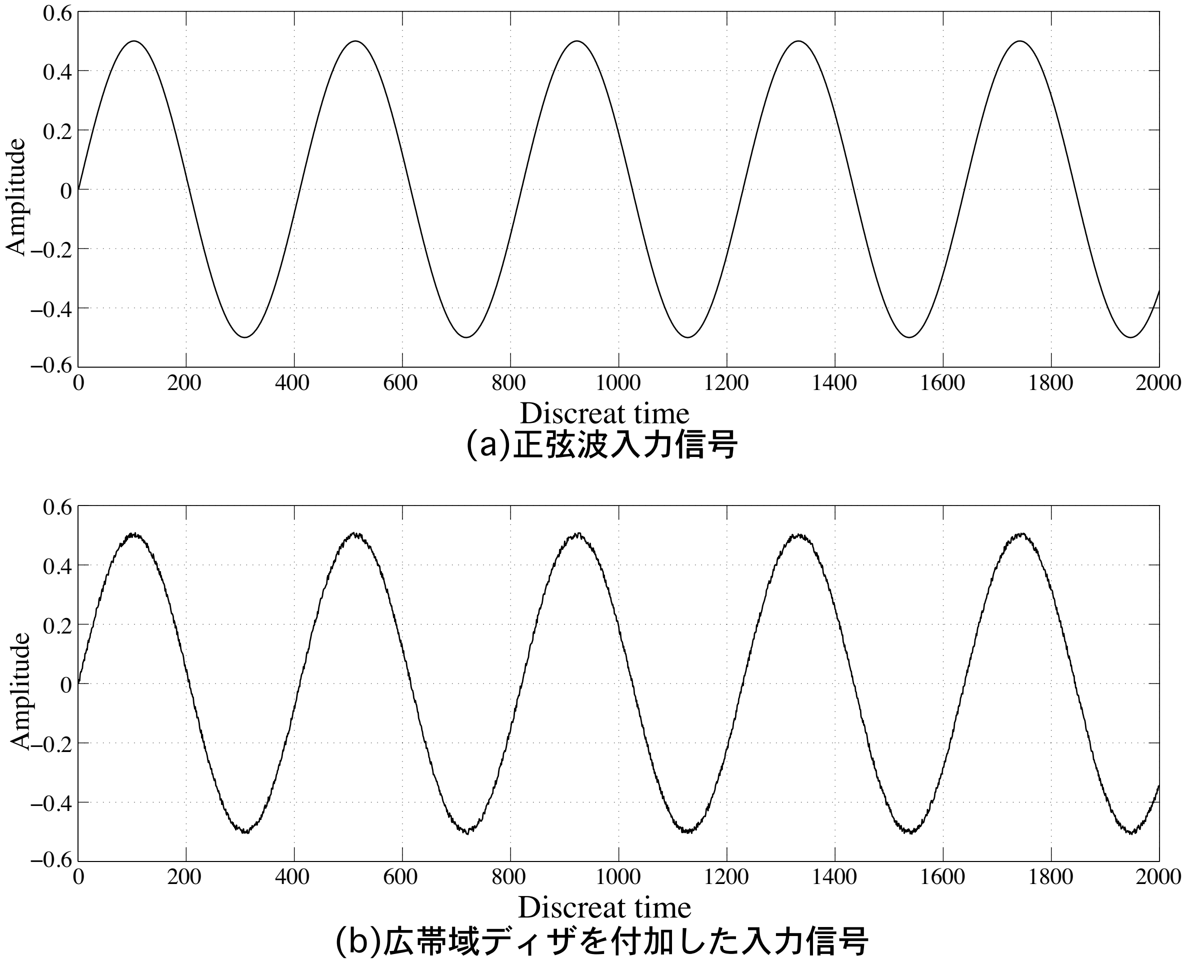


Fig. 6.6: 広帯域ディザを付加した入力信号

黒線は，入力信号に広帯域ディザを付加していない場合であり，赤線は入力信号に広帯域ディザを付加した場合である。Fig. 6.7 から，赤線の入力信号に広帯域ディザを付加したままでは正規化周波数 0.2 以下の信号帯域内で 30dB 程度，黒線の入力信号に広帯域ディザを付加していない場合と比べて，SNR が悪化していることが確認できる。このことから，入力信号に広帯域ディザを付加した場合，出力信号から広帯域ディザを減算したほうが良い可能性がある。次項で，広帯域ディザを減算した場合の検討を行う。

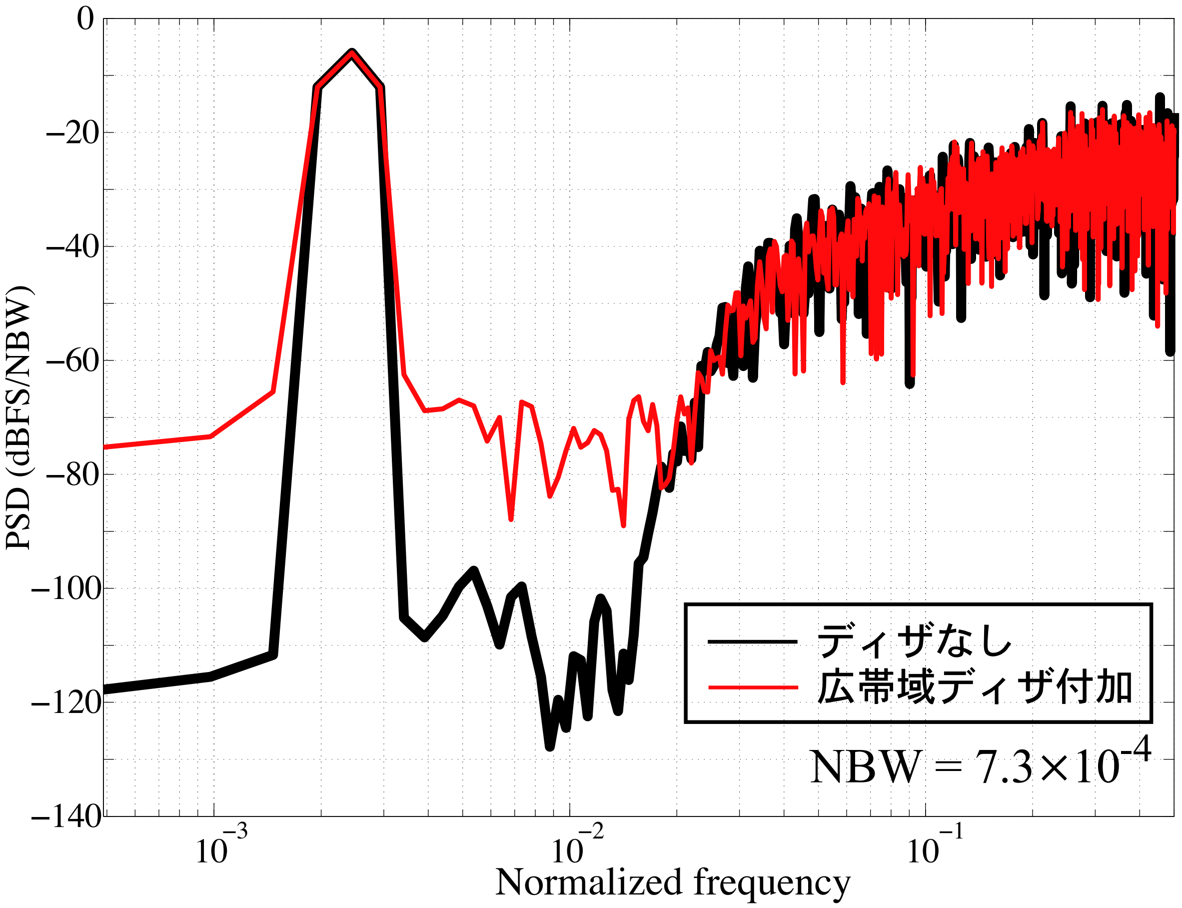


Fig. 6.7: 広帯域ディザを付加した場合の PSD

6.2.3 入力信号に広帯域ディザを付加し，出力信号から広帯域ディザを減算した場合の安定性

次に，Fig. 6.2 のように出力信号から広帯域ディザを減算した場合について検討する。入力信号は Fig. 6.6 と同じで正規化周波数 5/2048，振幅 0.5 の正弦波信号に広帯域ディザを付加した信号を用いた。出力信号から広帯域ディザを減算する場合，入力信号に付加した広帯域ディザと全く同じであることに注意する必要がある。Fig. 6.8 にループフィルタからの出力信号の様子を示す。Fig. 6.8(a) は出力信号そのままで広帯域ディザを減算する前の信号の様子である。Fig. 6.8(b) は出力信号から広帯域ディザを減算した場合である。Fig. 6.8(c) は (b) の広帯域ディザを減算した出力信号と同じであるが，減算している様子が分かるように出力値 1 付近を拡大したものである。設計した広帯域ディザは振幅 0.01 であるので，減算した場合は 0.99 から 1.01 の範囲に分布することになるが，その様子が確認できる。

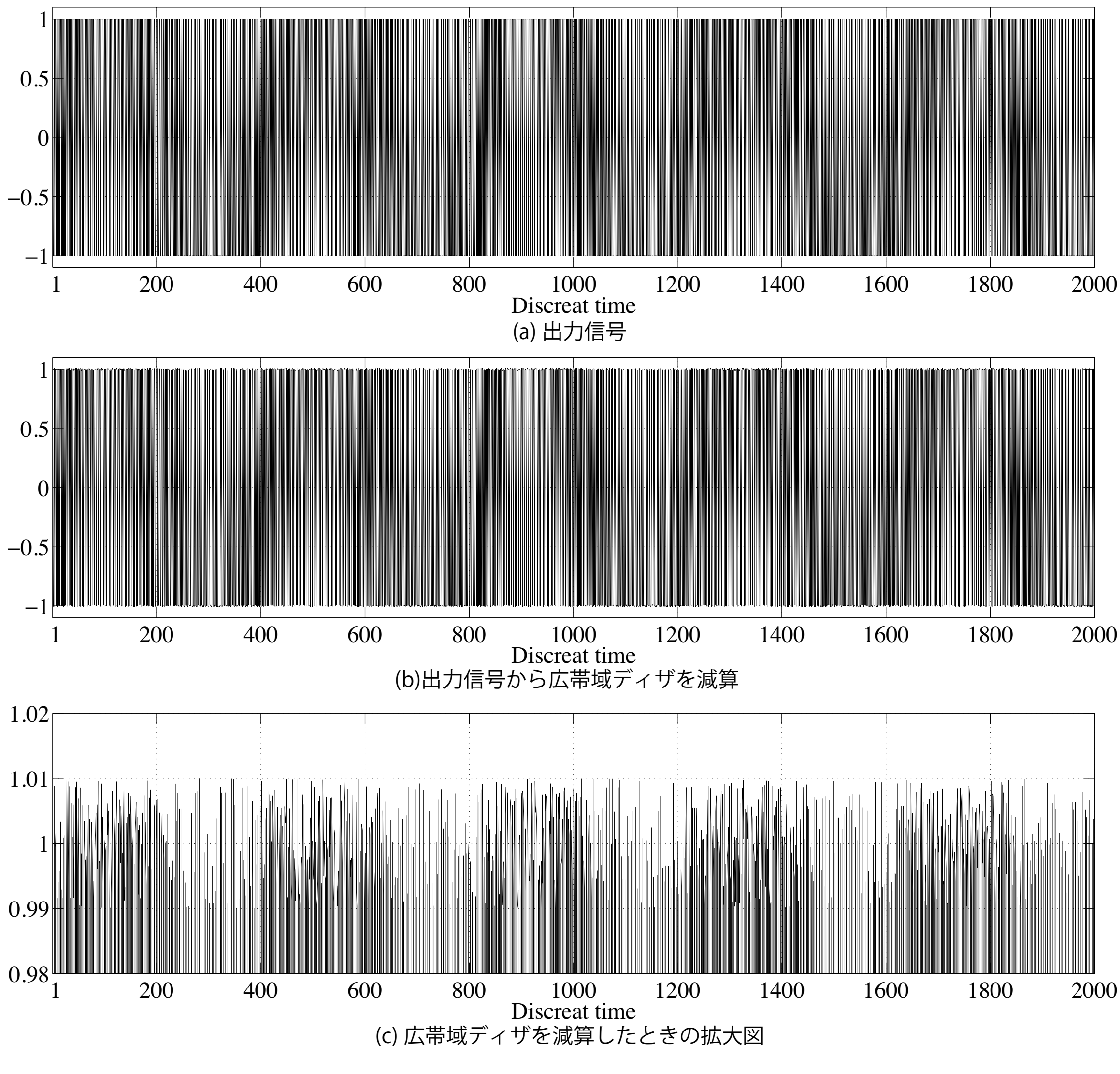


Fig. 6.8: 出力信号と広帯域ディザを減算した場合の出力信号

出力信号から広帯域ディザを減算した場合の PSD の様子を Fig. 6.9 に示す。FFT は Hann 窓を用い，FFT ポイント数は 2048 ポイントで行った。黒線は Fig. 6.6(a) のディザを適用していない，正規化周波数 5/2048, 振幅 0.5 の正弦波を入力信号とした場合の PSD であり，赤線は Fig. 6.6(b) のように入力信号に広帯域ディザを付加し，出力信号から広帯域ディザを減算した Fig. 6.8(b) の PSD である。広帯域ディザを出力信号から減算することで，Fig. 6.7 では信号帯域内で 60dB 程度だった SNR が，Fig. 6.9 に示すようにディザを演算しない場合と同等である 100dB 程度の SNR が得られていることが確認できる。PSD を見ると，入力信号に広帯域ディザを付加した場合，出力信号から広帯域ディザを減算することは有効であると考えられる。

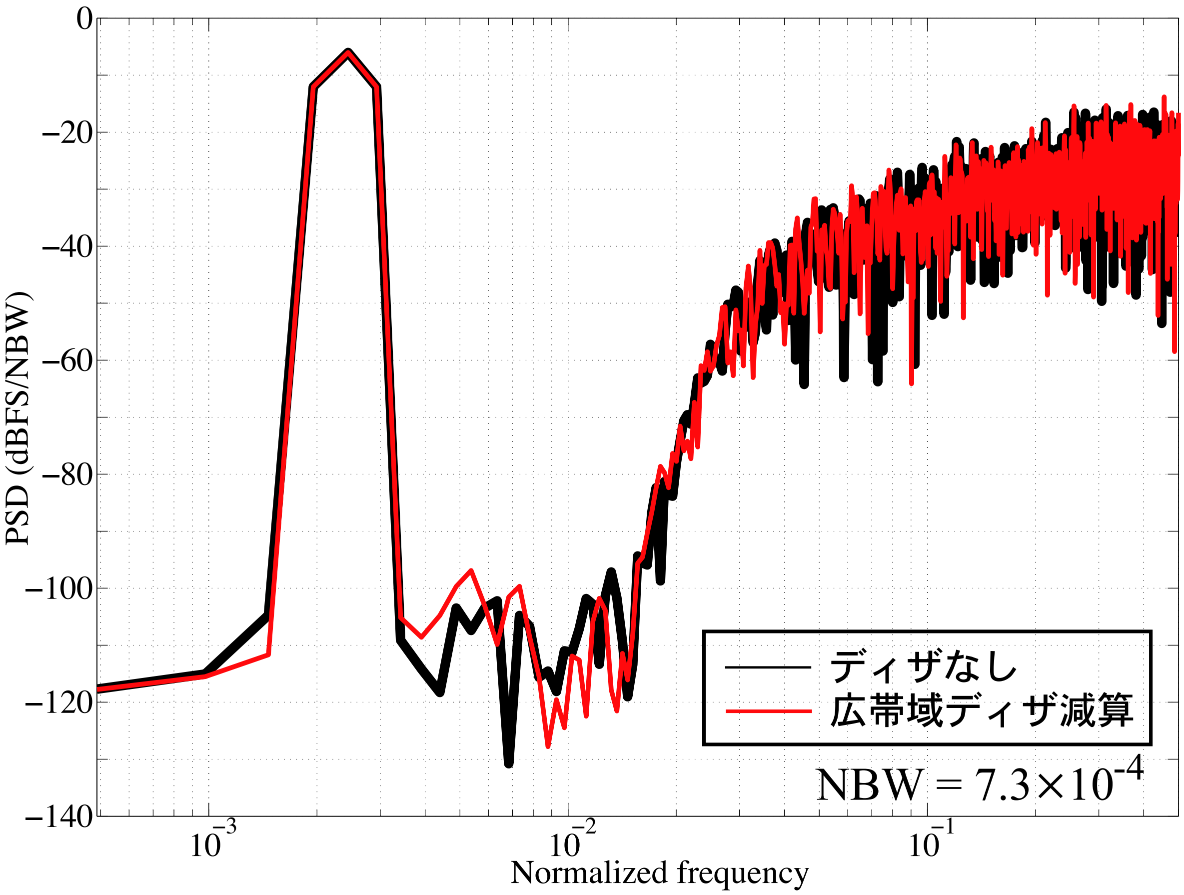


Fig. 6.9: 広帯域ディザを減算したときの PSD

次に，入力振幅に対する安定性について検討する。PSD の評価と同じく，Fig. 6.6(a) に示す正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力信号とした場合の SNR と，Fig. 6.6(b) に示す広帯域ディザを付加し，出力信号から減算した場合の SNR を Fig. 6.10 に示す。振幅は 0.1 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。黒線は，広帯域ディザを適用していない場合で，赤線は出力信号から広帯域ディザを減算した場合の SNR である。Fig. 6.10 から，点線は入力振幅 0.7 で SNR が 0 になりシステムが不安定になっているが，赤線は入力振幅 0.71 で SNR が 0 となっている。

このことから，入力信号に広帯域ディザを付加してデルタシグマ変調器のループフィルタを通過させることで，入力振幅に対する安定性がわずかながら改善される傾向にあると考えられる。広帯域ディザを付加したままでは，PSD の様子から考えると SNR が 30dB 程度悪くなるが，出力信号から広帯域ディザを減算すれば，ディザを適用しない場合と SNR を同等に保ちつつ，入力振幅に対する安定性が増し，なおかつ入力信号がそのまま取り出せるため有効な方法と考えられる。

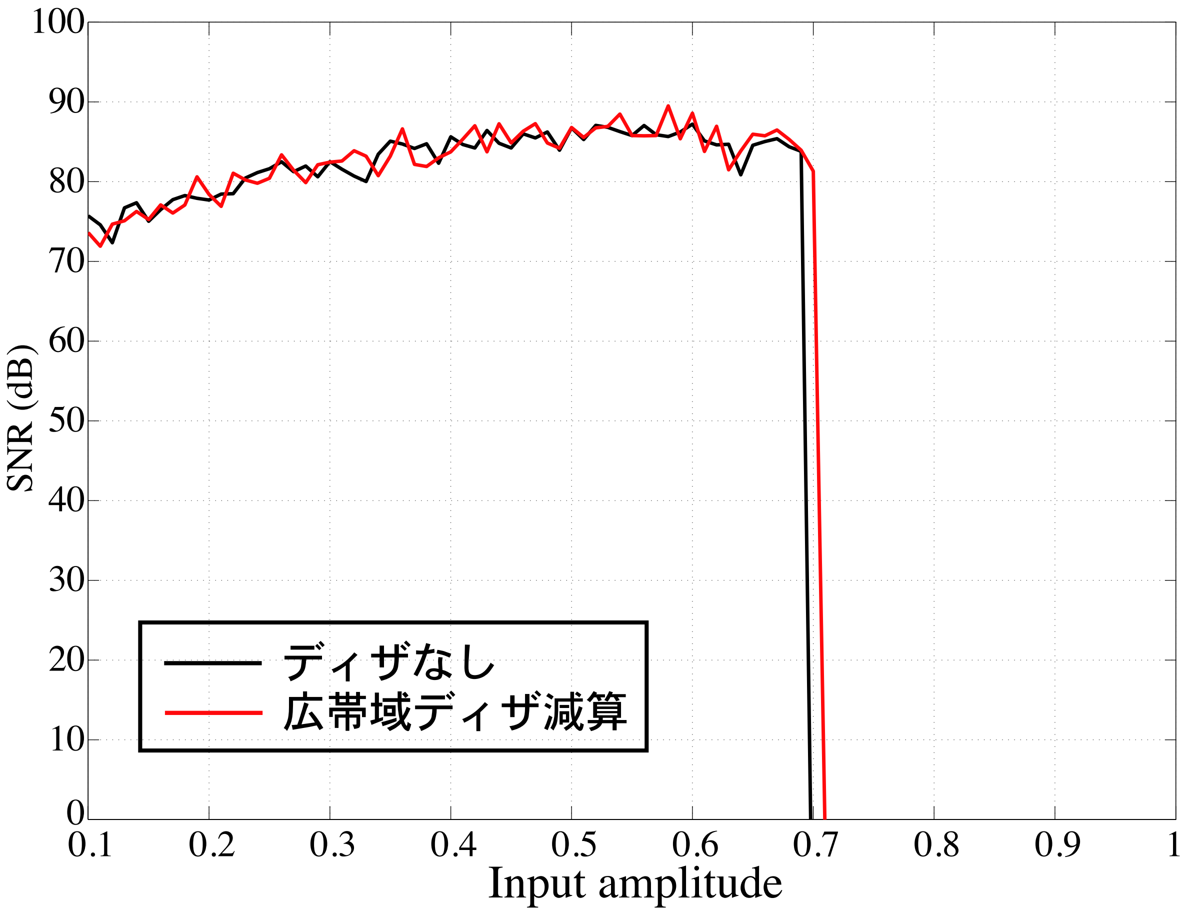
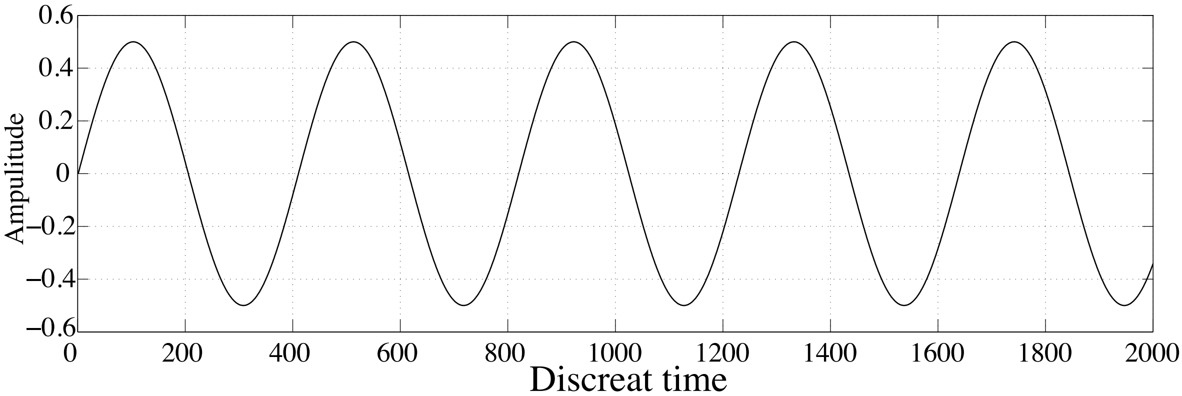


Fig. 6.10: 広帯域ディザを減算したときの SNR

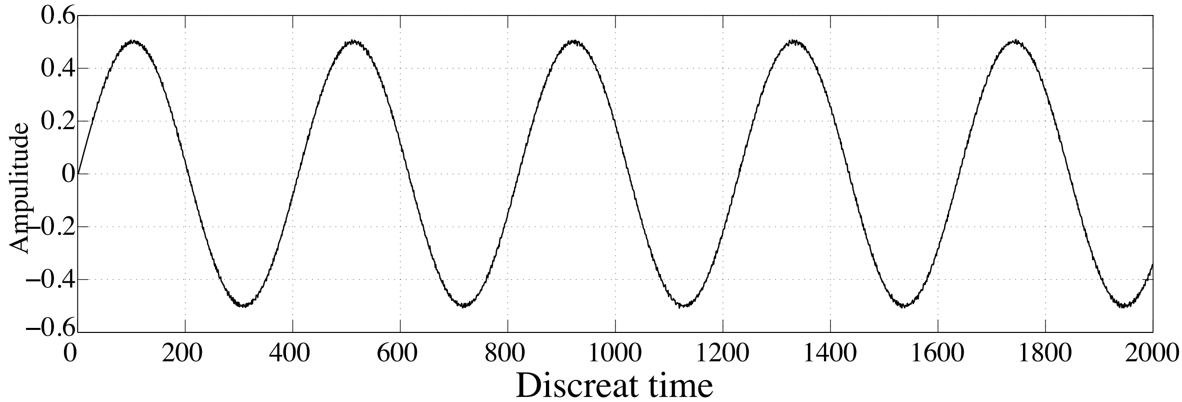
6.2.4 入力信号に高域集中ディザを付加した場合の安定性

入力信号に高域集中ディザを付加した場合について検討する。高域集中ディザは，Fig. 6.5 に示したように，低周波数領域の信号帯域内にディザの成分を含まず，信号帯域外にディザの成分を含んでいることが特徴である。そのため，式 (6.4) のように出力信号に入力信号とディザの和が含まれていても，入力信号に影響を及ぼさないのではないかと考える。つまり，高域集中ディザを入力信号に付加した場合は，出力信号から同じ高域集中ディザを減算しなくても SNR を保ちつつ，入力振幅に対する安定性を高められることが期待される。

Fig. 6.11(a) は正規化周波数 5/2048，振幅 0.5 の正弦波入力信号であり，Fig. 6.11(b) は (a) の正弦波入力信号に 6.2.1 項で設計した高域集中ディザを付加した信号である。Fig. 6.11(a) と (b) の信号を用いて，デルタシグマ変調器に入力したときの PSD を Fig. 6.12 に示す。FFT は Hann 窓を用い，FFT ポイント数は 2048 ポイントで行った。



(a)正弦波入力信号



(b)高域集中ディザを付加した入力信号

Fig. 6.11: 高域集中ディザを付加した入力信号

黒線は Fig. 6.11(a) の高域集中ディザを付加していない，正規化周波数 5/2048, 振幅 0.5 の正弦波を入力信号とした場合の PSD であり，赤線は Fig. 6.11(b) のように入力信号に高域集中ディザを付加した PSD を示している。Fig. 6.12 から，高域集中ディザを付加しないときと，高域集中ディザを付加したときで，信号帯域内ではほぼ同等の 100dB 程度の SNR が確保されていることが確認できる。このことは入力信号に高域集中ディザを付加したまま，出力信号から減算することなしでデルタシグマ変調器に適用できる可能性があると考えられる。

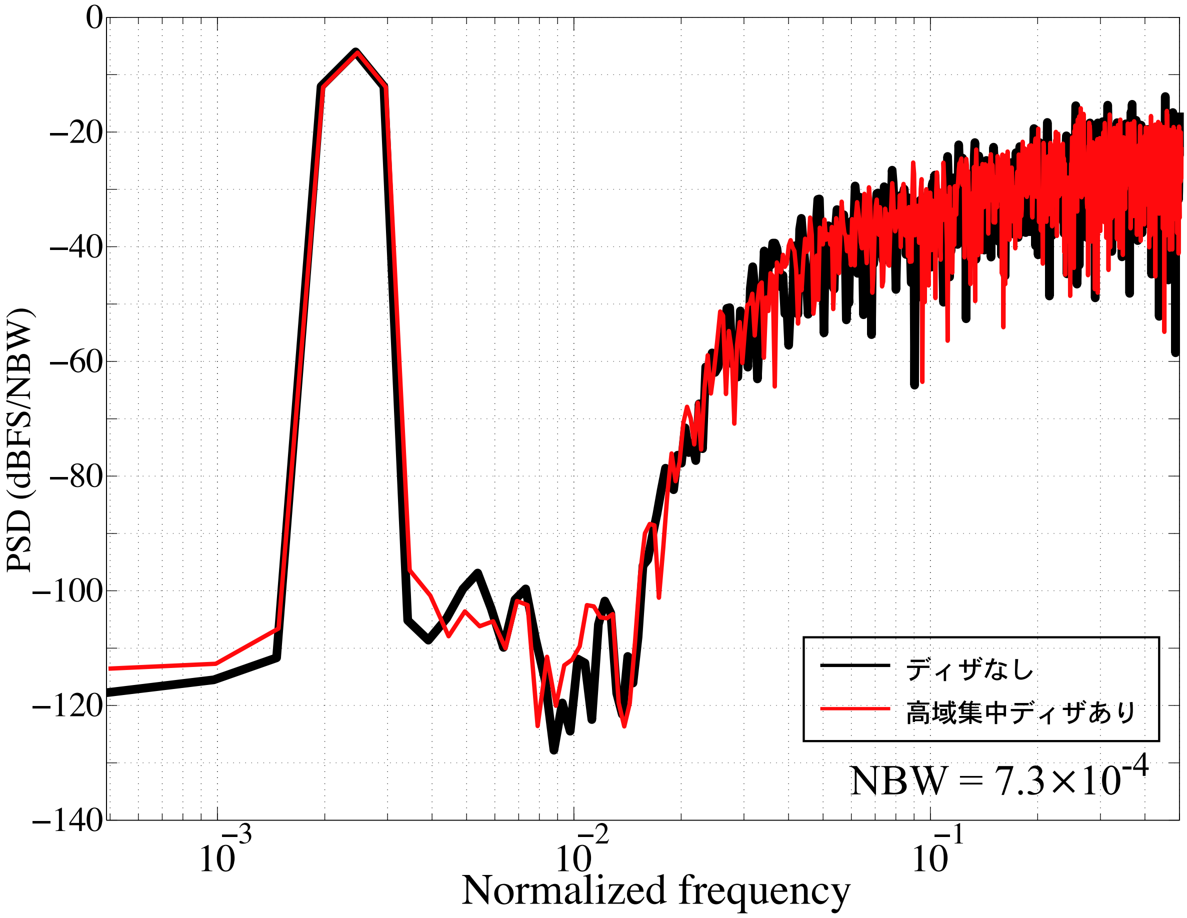


Fig. 6.12: 高域集中ディザを付加した場合の PSD

次に，入力信号に高域集中ディザを付加した場合の，入力振幅に対する安定性について検討する。PSD の評価と同じく，Fig. 6.11(a) に示す正規化周波数 5/2048 の正弦波を入力信号とした場合と，Fig. 6.11(b) に示すような高域集中ディザを付加した場合の SNR を Fig. 6.13 に示す。振幅は 0.1 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。黒線は，高域集中ディザを付加していない場合の SNR で，赤線は高域集中ディザを付加した場合の SNR の様子である。Fig. 6.13 から，Fig. 6.10 と同様に黒線は入力振幅 0.7 で SNR が 0 になりシステムが不安定になっているが，赤線は入力振幅 0.71 で SNR が 0 となっている。このことから，入力信号に高域集中ディザを付加してデルタシグマ変調器のループフィルタを通過させることで入力振幅に対する安定性がわずかながら改善される傾向にあると考えられる。広帯域ディザを付加した場合は，出力信号から減算しなければ，SNR を同等に保つことはできなかったが，高域集中ディザを付加した場合，出力信号から減算することなく，SNR を同等に保つつ，入力振幅に対する安定性が増し，かつ，入力信号がそのまま取り出せるため，入力振幅に対する安定性を高める有効な方法と考えられる。

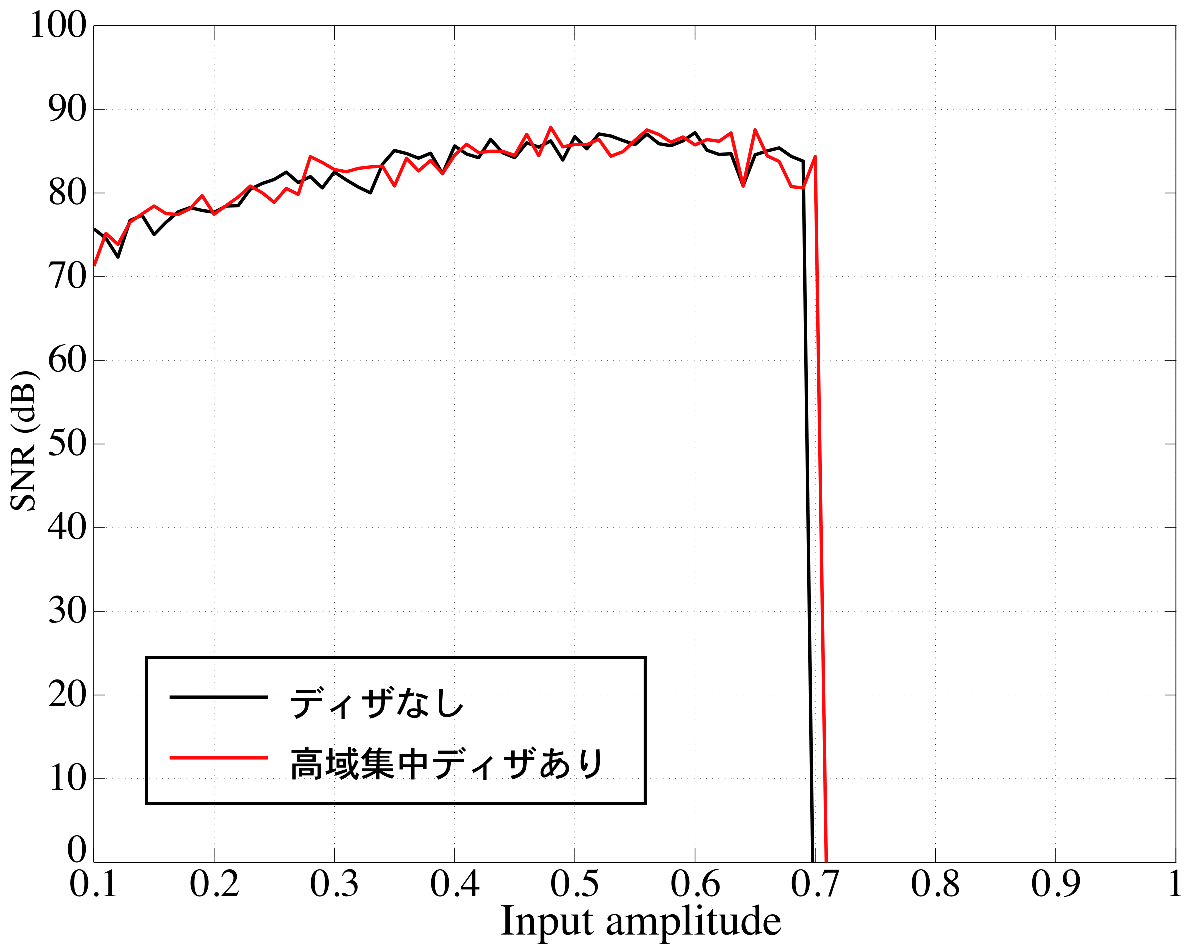


Fig. 6.13: 高域集中ディザを付加した場合の SNR

入力信号に高域集中ディザを付加した場合の最後に，Probability of instability(POI) の様子を Fig. 6.14 に示す。POI は，各振幅で 2^{16} ポイントの信号を入力したときの不安定なポイント数の割合を示す。この場合，不安定とは線形利得 k が $k < 0.01$ になることを指している。POI の値が 0 であると 2^{16} ポイントのはじめから最後まで安定しており，1 に近くなるほど信号を入力してすぐに不安定になることを表している。入力信号は Fig. 6.11(a) と Fig. 6.11(b) とし，振幅は 0.5 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。その結果，入力信号に高域集中ディザを付加した場合，わずかながら安定性が改善していることが確認できる。具体的には，黒線の入力信号に高域集中ディザを付加しない場合は，入力振幅 0.64 まで POI の値は 0 で，入力振幅 0.65 で POI の値が 0.9 を超えるが，赤線の高域集中ディザを付加した場合，0.64 まで POI の値は 0 で，0.65 での POI の値は 0.2 程度である。

以上から，入力信号に高域集中ディザを加えた場合，出力信号から高域集中ディザを減算しなくても，SNR を保ちつつ，入力振幅に対する安定性が改善されることが確認できる。

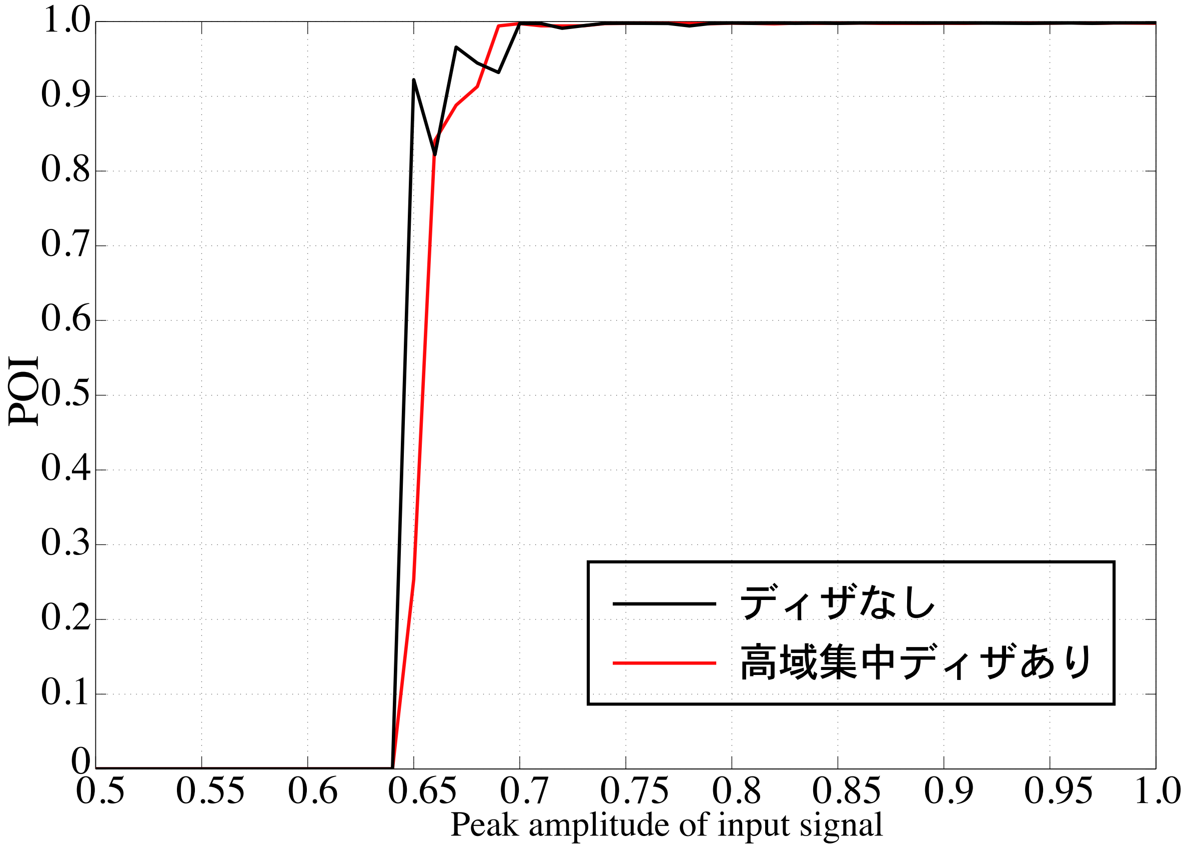


Fig. 6.14: 高域集中ディザを付加した場合の POI

6.2.5 入力信号に高域集中ディザを付加し，出力信号から高域集中ディザを減算した場合の安定性

高域集中ディザはディザ成分が高域に集中しており，信号帯域である低域には成分をもたない。このため 6.2.4 項で検討したように，高域集中ディザを付加したままでも十分な SNR，入力信号に対する安定性を得られることが確認できた。この項では，出力信号から高域集中ディザを減算した場合について検討を行う。まずはじめに，高域集中ディザを出力信号から減算した場合の PSD を Fig. 6.15 に示す。黒線は高域集中ディザを付加したままの PSD であり，赤線は出力信号から高域集中ディザを減算した場合の PSD である。Fig. 6.15 からわかるように，黒線と赤線はほとんど一致していることが確認できる。このため，PSD に関して，出力信号から高域集中ディザを減算しなくても同等の特性を得ることができると考えられる。

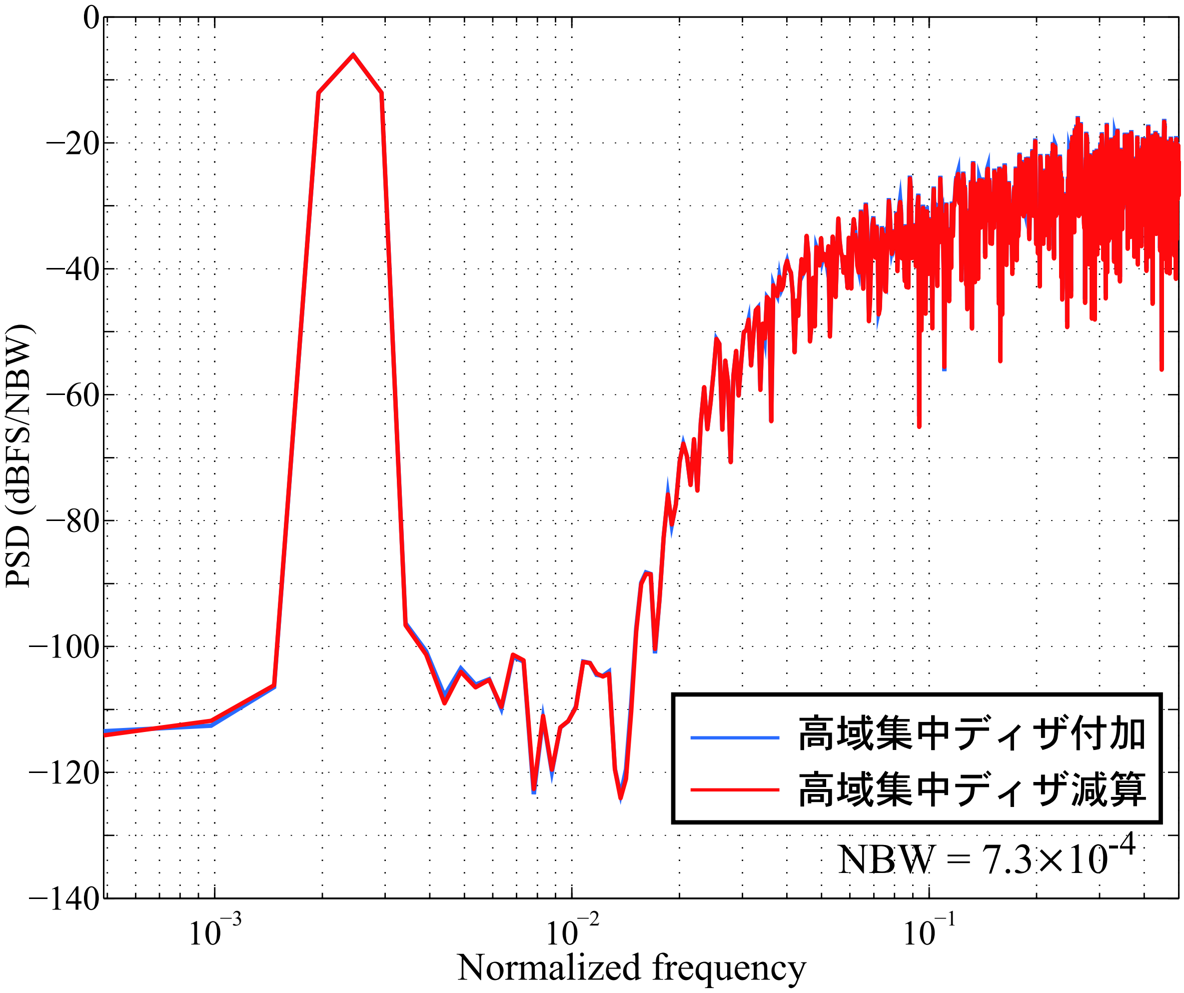


Fig. 6.15: 高域集中ディザを減算した場合の PSD

次に，Fig. 6.16 に出力信号から高域集中ディザを減算した場合の SNR と入力振幅に対する安定性の結果を示す。黒線は出力信号に高域集中ディザが付加されたままの場合であり，赤線は出力信号から高域集中ディザを減算した場合である。このとき，黒線と赤線は重なっており，同じ入力振幅に対する SNR 特性を持っていることがわかる。

以上の検討により，入力信号に高域集中ディザを付加した場合，出力信号から減算しなくても，高域集中ディザを付加しない場合と比べて，必要な SNR を得つつ入力振幅に対する安定性が増すことが確認された。

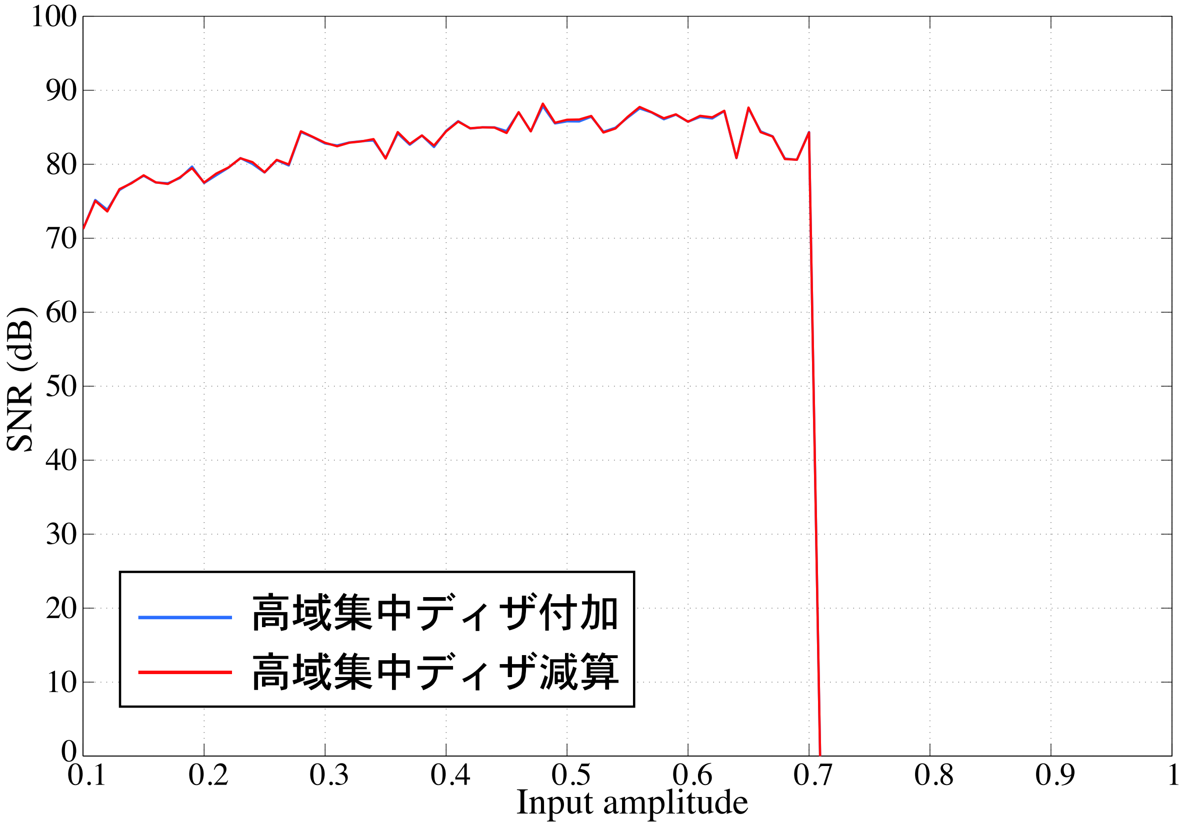


Fig. 6.16: 高域集中ディザを減算した場合の SNR

6.2.6 量子化器の直前で広帯域ディザを付加した場合

ここからは，Fig. 6.4 に示す量子化器の直前でディザを適用した場合について検討するが，まずはじめに，広帯域ディザを適用した場合について述べる。入力信号は Fig. 6.6 と同じで正規化周波数 5/2048，振幅 0.5 の正弦波信号である。付加する広帯域ディザも今までの検討で適用してきたものと同条件である，確率密度関数を用い振幅 ±0.01 の間に一様分布するように設計されたディザ信号を用いた。

まずはじめに，PSD について検討を行う。Fig. 6.17 にディザを適用していない場合と広帯域ディザを付加した場合の PSD の様子を示す。FFT は Hann 窓を用い，FFT ポイント数は 2048 ポイントで行った。黒線はディザを適用していない場合であり，赤線は広帯域ディザを付加した場合である。入力信号に広帯域ディザを付加した場合では，Fig.6.7 に示したように，信号帯域での SNR が悪くなる傾向が見られた。しかし，量子化器の直前で広帯域ディザを付加した場合，信号帯域内での SNR の悪化は見られない。これは，式 (6.11) で示したように，付加したディザが高域上がりの特性を持つ NTF によって，シェイピングされているからである。その結果，PSD を見ると広帯域ディザを付加しても，ディザを適用していない場合と同じような特性が得られていることが確認できる。

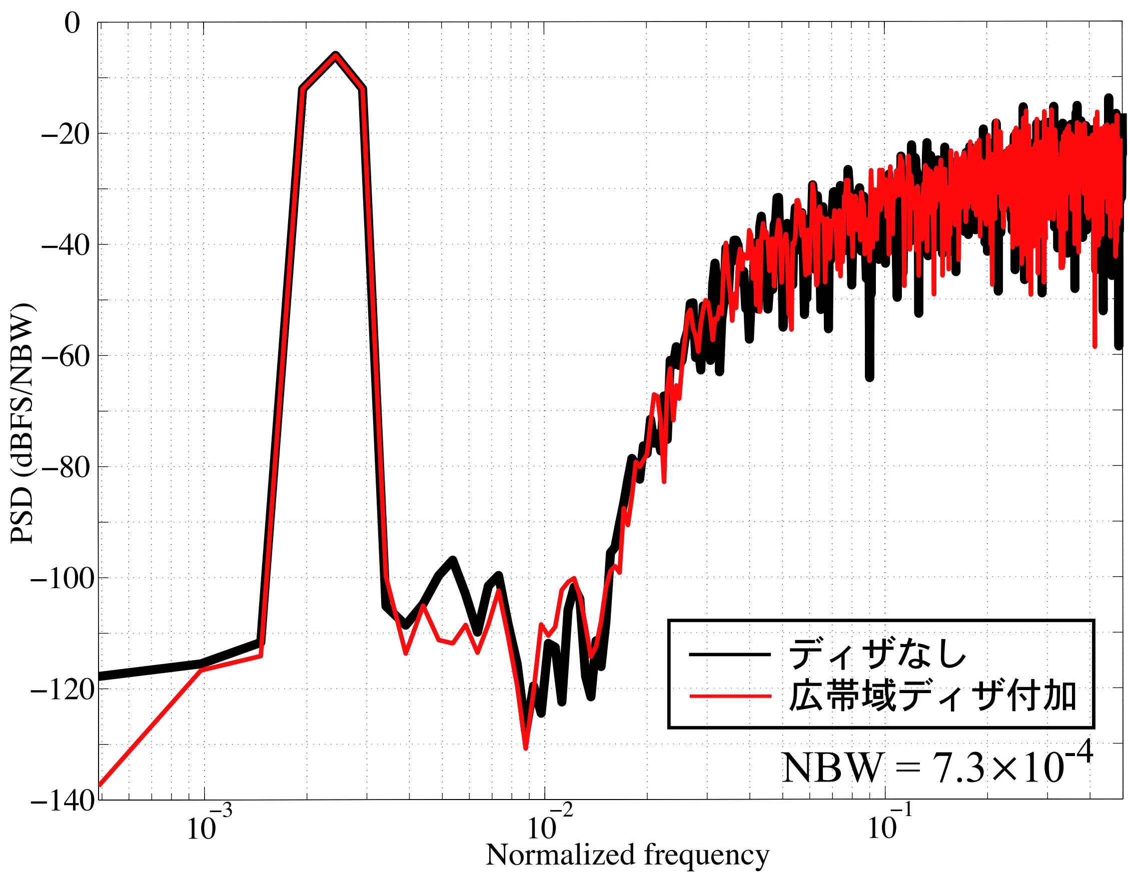


Fig. 6.17: 広帯域ディザを付加した場合の PSD の様子

次に，入力振幅に対する安定性について検討する。入力信号は正規化周波数 5/2048 の正弦波信号で振幅 0.1 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。ディザは広帯域ディザを量子化器の直前で付加している。そのときの結果を Fig. 6.18 に示す。黒線はディザを適用していない場合，赤線は広帯域ディザを付加した場合の入力信号に対する SNR の変化の様子である。黒線は 0.7 で SNR の値が 0 となっているが，実線は 0.71 で 0 となっている。また，安定して動作しているところの SNR を見ると，ディザを適用してない場合とディザを付加した場合で同程度の SNR が得られていることが確認できる。このことから，量子化器の直前で広帯域ディザを付加することで，ディザを適用しない場合より入力振幅に対する安定性が若干ではあるが高くなるということが確認された。

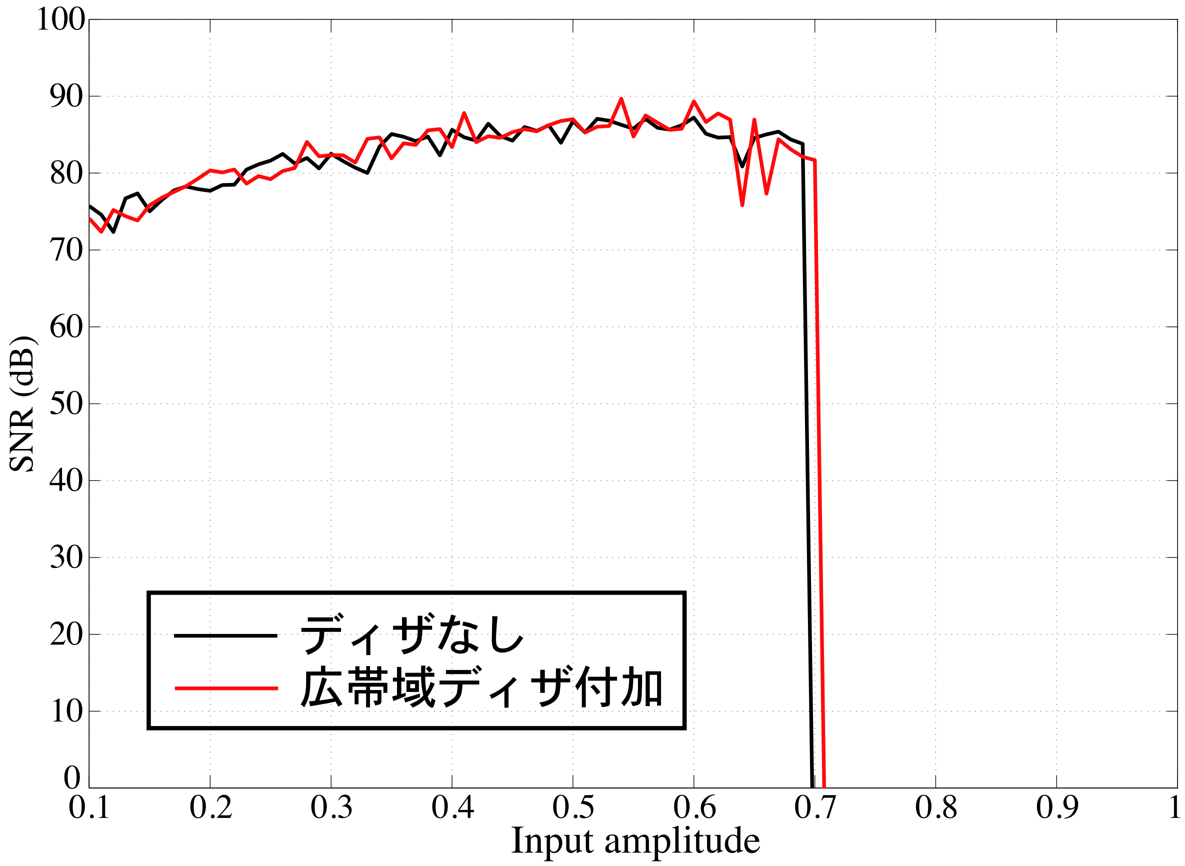


Fig. 6.18: 広帯域ディザを付加した場合の SNR の様子

6.2.7 量子化器の直前で広帯域ディザを付加し，出力信号から減算した場合

ここでは，先ほどの，6.2.6 項の出力信号から広帯域ディザを減算した場合について検討する。広帯域ディザを減算した場合，Fig. 6.19 のような PSD となる。式 (6.11) に示したように，ディザは量子化誤差とともに NTF によって高域にシェイピングされている。NTF は STF と違い 1 ではなく，式（6.12）であるため，出力信号から広帯域ディザをそのまま減算してもディザを取り除くことはできない。広帯域ディザを出力信号から取り除くためには，広帯域ディザを式 (6.12) と同じ NTF に通過させる必要がある。これは，デルタシグマ変調器の回路を複雑にする，もしくは部品の数が増えることになり，デルタシグマ変調器が優位な点である，回路が単純で部品点数が少なくて良いということに相反する。

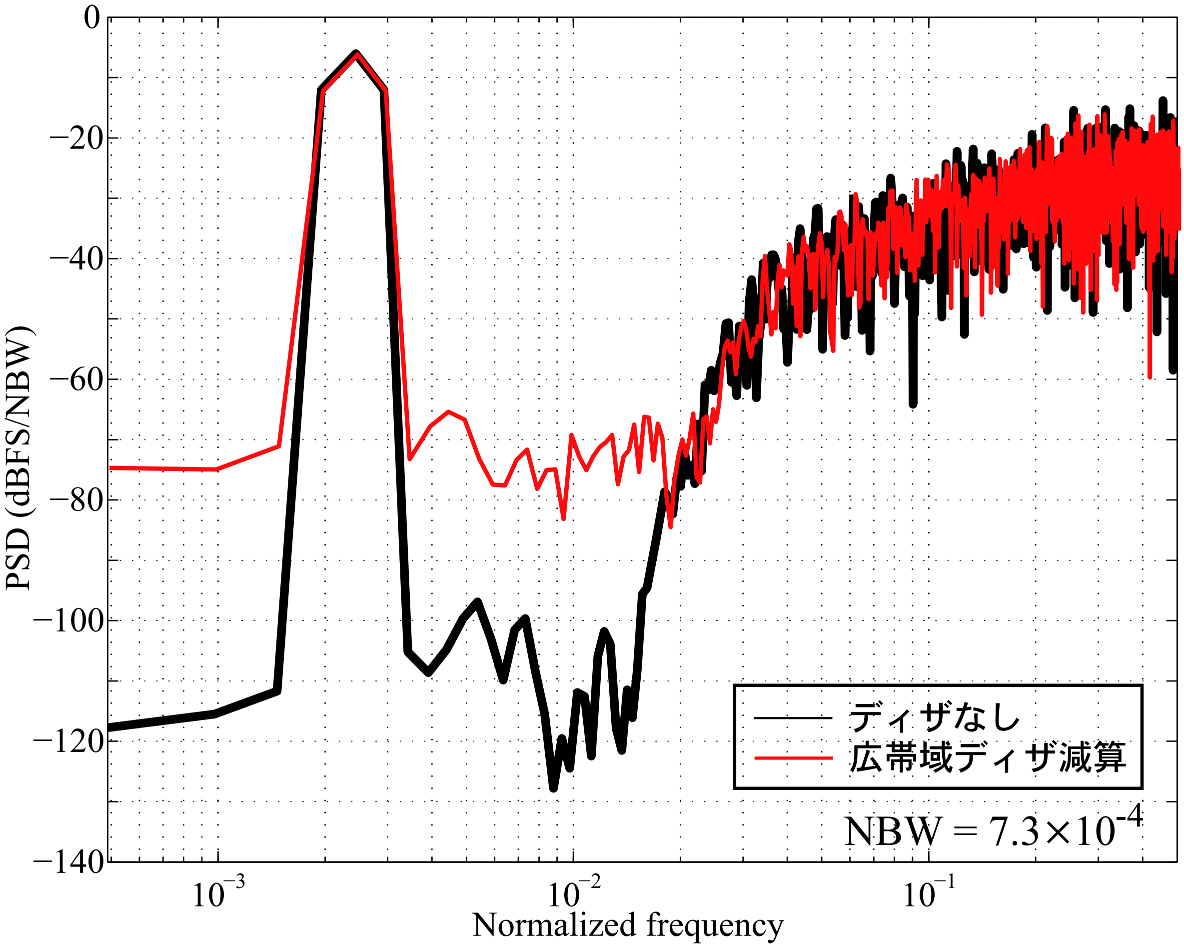


Fig. 6.19: 広帯域ディザを付加し，出力信号から減算した場合の PSD

6.2.8 量子化器の直前で高域集中ディザを付加した場合

次に，量子化器の直前で高域集中ディザを付加した場合について検討する。入力信号は Fig. 6.6 と同じで正規化周波数 5/2048，振幅 0.5 の正弦波信号である。Fig. 6.20 にディザを適用していない場合と高域集中ディザを付加した場合の PSD を示す。黒線はディザを適用していない場合であり，赤線は高域集中ディザを付加した場合である。高域集中ディザを付加した場合でもディザを適用していない場合と比べて PSD に大きな変化は見られず，高域上がりのノイズシェイピング特性を示している。

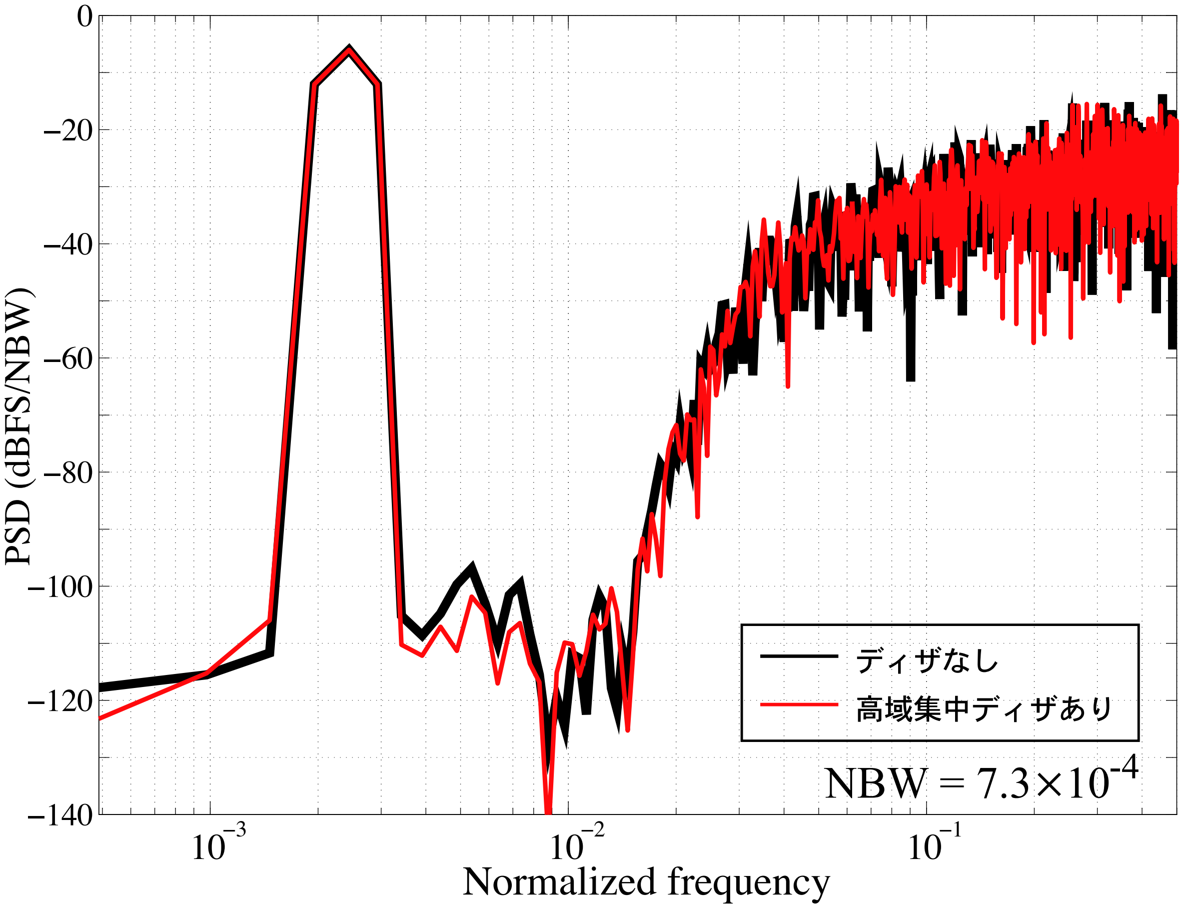


Fig. 6.20: 高域集中ディザを付加した場合の PSD

次に，入力振幅に対する安定性を検討する。正規化周波数 5/2048，振幅を 0.1 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた正弦波を入力信号として，高域集中ディザを付加したときと付加しない場合の，入力振幅に対する SNR の値を Fig. 6.21 に示す。黒線は高域集中ディザを付加しない場合，赤線は高域集中ディザを付加した場合の結果である。SNR が 0 になるとシステムは不安定となるが，黒線は入力振幅 0.7 で SNR が 0 になり不安定になっているが，赤線は 0.71 で SNR が 0 となっている。また，安定している入力振幅に注目したとき，ディザを適用しない場合と高域集中ディザを付加した場合で同等の SNR 値を得ることが確認できる。

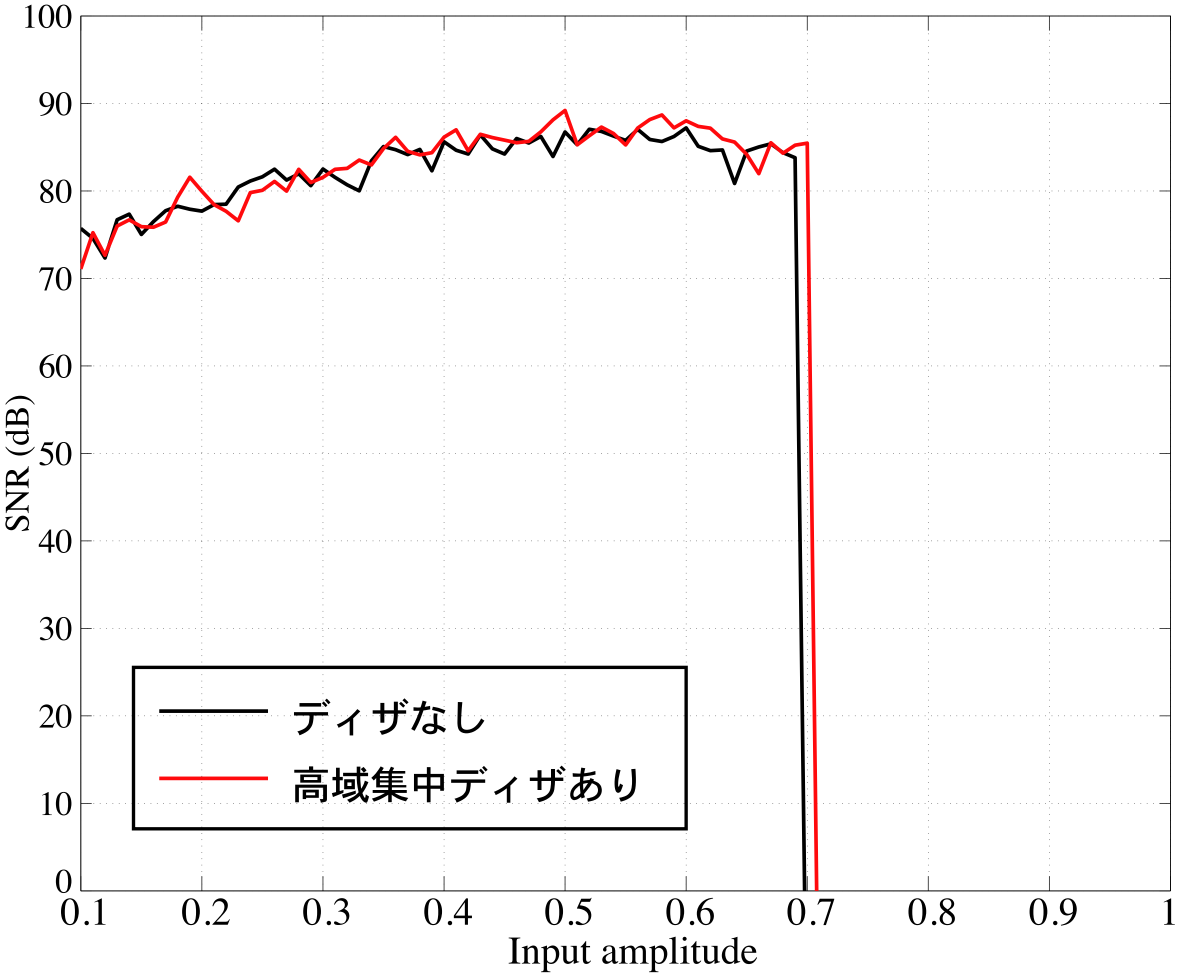


Fig. 6.21: 高域集中ディザを付加した場合の SNR

次に，POI の様子を Fig. 6.22 に示す。POI は，各振幅で 2^{16} ポイントの信号を入力したときの不安定なポイント数の割合を示す。POI の値が 0 であると安定しており，1 に近くなるほど信号を入力してすぐに不安定になることを表している。入力信号は正規化周波数 5/2048 の正弦波とし，振幅は 0.5 から 1.0 まで 0.01 ステップで変化させた。図中，黒色はディザを付加していない結果，青色は，Fig. 6.14 で示した入力信号に高域集中ディザを付加した場合の結果，赤色は，今回の量子化器の直前で高域集中ディザを付加した場合の結果である。比較すると，黒色，青色，赤色の順番で安定な入力振幅の値が大きくなり POI が改善していく様子がわかる。ディザを付加しない場合は入力振幅 0.64 までが 0 で完全に安定しているが，入力信号に高域集中ディザを付加した場合，入力振幅 0.64 までは 0 であり，量子化器に高域集中ディザを付加した場合は，入力振幅 0.65 まで 0 であることから，わずかながら安定性が改善していることが確認できる。以上から，適切な高域集中ディザを量子化器の直前で加えた場合，ディザを付加しない場合と同等の SNR を保ちつつ，入力振幅に対する安定性が改善されることが確認できる。

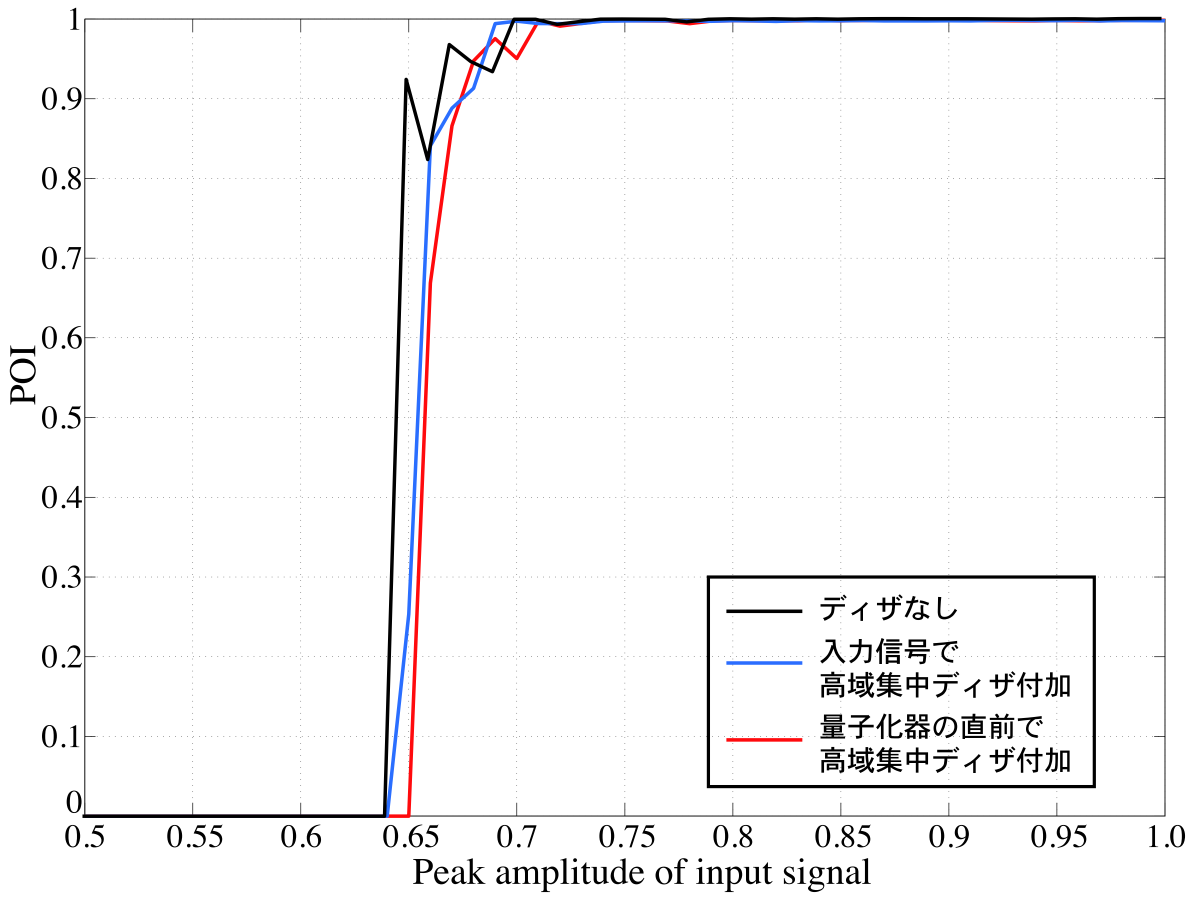


Fig. 6.22: POI の比較

6.3 まとめ

この章では，デルタシグマ変調器にディザを付加することによる，入力振幅に対する安定性について検討した。入力信号に広帯域ディザと高域集中ディザを付加する場合，量子化器の直前で広帯域ディザと高域集中ディザを付加する場合について検討を行ったが，どの場合でも入力振幅に対する安定性がわずかながらであるが改善する傾向が見られた。POI の評価では量子化器の直前で高域集中ディザを量子化器の直前で付加する場合が，もっとも良い結果が得られたと考えられる。デルタシグマ変調器のシステムを考えたときにも，量子化器の直前で高域集中ディザ付加する場合は，入力信号にディザを付加し減算する場合と比較して，システムの構成は小さくて済む。これらのことから，デルタシグマ変調器にディザを付加し入力振幅に対する安定性を高める効果を期待する場合，量子化器の直前で高域集中ディザを付加すればよい可能性が高いことが検討の結果わかった。

次の段階として正弦波のような周期的な入力信号ではなく，音楽信号や音声信号を入力信号として扱い，より実際のデルタシグマ変調器の使用状況に近づける検討が考えられる。また，ディザ設計方法の違いによってアイドルトーンの抑制効果に差があることが報告されている [38]。この研究に習い，ディザの設計方法の違いによってデルタシグマ変調器の安定性が変化するのか研究を進める所存である。

第 7 章

スライディングモード制御理論を用いたデルタシグマ変調器の設計

本章では，デルタシグマ変調器にスライディングモード制御理論を適用する。これまで提案してきたロバスト制御理論を用いた設計手法と，スライディングモード制御理論を用いる設計手法の決定的な違いは，スライディングモード制御理論では量子化器を線形利得 k と量子化誤差で近似する必要がなく，非線形性が強い 2 値量子化器をそのままスライディングモード制御の非線形制御入力として扱えることである。スライディングモード制御理論を用いたデルタシグマ変調器の研究はこれまでもなされている。例えば，S. Plekhanov らの研究 [39] では，デルタシグマ変調器をスライディングモード制御理論における制御対象プラントとコントローラに分割し設計したものであるが，SNR が 20dB 程度しか得られておらず，スライディングモード制御理論を適用できる可能性を示すのみにとどまっている。また，J.Lota らの研究 [40] では，デルタシグマ変調器をスライディングモード制御理論の観点から解析し，ループフィルタを設計したものであるが，設計手法や理論を用いた解析が初心者ではわかりにくい。本章では，まず，不確かな系のスライディングモード制御の設計法の中から，不確かさの上界値が既知の場合の設計法をデルタシグマ変調器に適用する方法を述べる。次に，既存のループフィルタの状態方程式をそのまま用い，スライディングモード制御理論を適用した場合について述べ，先行研究よりも初心者でも簡単に設計できるような手法を提案する。

7.1 マッチング条件を満たすスライディングモード制御理論の適用

7.1.1 提案する設計手法

入力信号を上界値が既知な不確かな信号として扱うことで，不確かな系を含むスライディングモード制御設計手法 [29] をデルタシグマ変調器に適用することができる。外乱やモデル化誤差などの摂動が入力行列への制御入力からまとめて入力されるように変換できるとき，それはマッチング条件を満たす場合と呼ばれる。マッチング条件を満たす場合と満たなさない場合で設計手法が異なるが，本研究では適用が比較的容易なマッチング条件を満たす場合の設計手法を適用す

る。Fig.7.1 に示す，２次デルタシグマ変調器に提案手法を適用することを考える。この図で，m は入力信号，u は量子化された出力信号である。Fig.7.1 の状態方程式を求めると，$x_1(k+1)$ と $x_2(k+1)$ はそれぞれ，

$$x_1(k+1) = x_1(k) + m(k) - u(k) \tag{7.1}$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + x_1(k+1) - u(k) \tag{7.2}$$

となるので，式（7.1）と式（7.2）をまとめると，

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} m(k) \tag{7.3}$$

となる。ここで，入力信号 $m(n)$ に注目する。入力信号は主に音響信号であり，どのような信号が入力されるのかはわからないため，不確かな信号と見なすことができる。入力信号は不確かではあるが，最大振幅は設計者によって設計することは可能である。一般的に最大振幅は 1 に正規化するため，上界値は 1 と仮定することができる。マッチングを満たすスライディングモード制御系を適用する場合，$u(n)$ と $m(n)$ の入力行列 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ に関して α を定数とすると，

$$\boldsymbol{B}_1\{u(n) + \alpha m(n)\} \tag{7.4}$$

の関係が成り立つ必要がある。しかし，Fig.7.1 の状態方程式 (7.3) では式 (7.4) の関係は成り立たない。マッチング条件を満たすためにデルタシグマ変調器の構造を変化させ，Fig.7.2 のようなデルタシグマ変調器を考える。Fig.7.2 では量子化器 Q をリレーに置き換えており，その前にある σ は切り換え超平面であり，リレーの直後にある ρ は不確かさの上界値であり，この場合の上界値は 1 である。Fig.7.2 の状態方程式を求めると，$x_1(k+1)$ と $x_2(k+1)$ はそれぞれ，

$$x_1(k+1) = x_1(k) + m(k) - u(k) \tag{7.5}$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) - x_2(k) + x_1(k+1) \tag{7.6}$$

となるので，式（7.5）と式（7.6）をまとめると，

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} m(k) \tag{7.7}$$

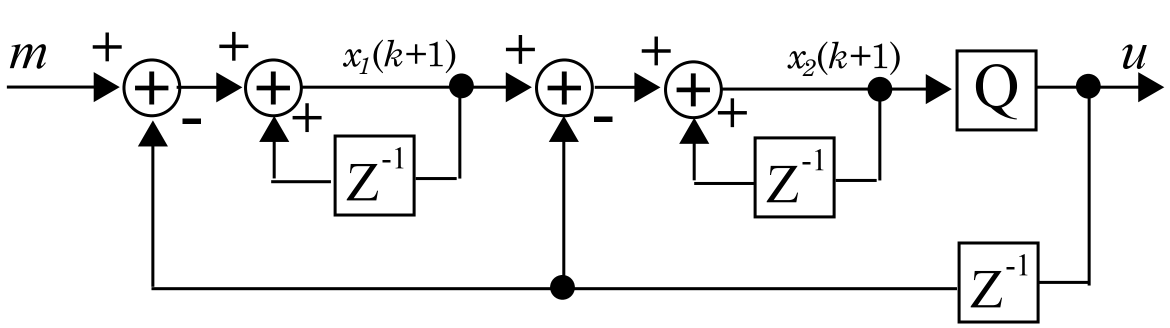


Fig. 7.1: ２次のデルタシグマ変調器

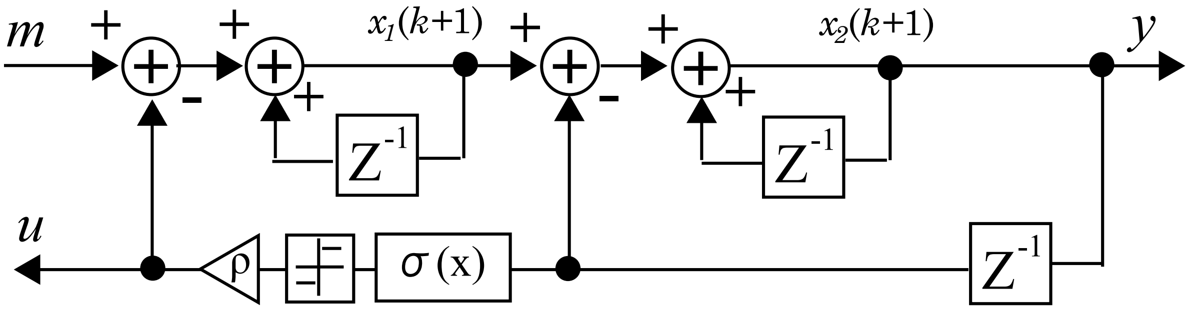


Fig. 7.2: 構造を変えたデルタシグマ変調器

と求めることができる。式を簡単にするために,

$$\boldsymbol{X(k)} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \boldsymbol{X(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおくと,式 (7.7) は

$$\boldsymbol{X(k+1)} = \boldsymbol{AX(k)} + \boldsymbol{B}\{m(k) - u(k)\} \tag{7.8}$$

と書き直すことができる。この式 (7.8) は式 (7.4) の関係が成り立つ,したがってマッチング条件を満たすスライディングモード制御理論を適用できる。

設計手順としてまず,Fig. 7.3 に示すような状態フィードバック $\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{x}$ を行列 $\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}_c$ が安定化するように選ぶ。よって,フィードバック制御入力は $u_c = -\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{x}$ となる。

スライディングモード状態のとき,システムは非線形性の最も強いスイッチング入力であるため,解析が困難である。スイッチング入力を連続入力で置き換えることにより,解析が容易になる。この置き換えを等価制御入力という。この等価制御入力を求めるために,ある正定対称な行列 $\boldsymbol{Q}_c$ と $\boldsymbol{P}_c$ が存在すると仮定する。ここで $\boldsymbol{P}_c$ は次のようなリアプノフ方程式の唯一正定対称解である。

$$\boldsymbol{A}_c{}^T\boldsymbol{P}_c + \boldsymbol{P}_c{}^T\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{Q}_c \tag{7.9}$$

また,切り換え超平面が次式のように与えられる。

$$\sigma_c = \boldsymbol{S}_c\boldsymbol{x} = 0 \tag{7.10}$$

ここで,$\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}_c$ である。スライディングモードが存在するとき $\dot{\sigma}_c = 0$ であるので

$$\dot{\sigma}_c = \boldsymbol{S}_c\boldsymbol{A}_c x + \boldsymbol{S}_c\boldsymbol{B}u_{eq} = 0 \tag{7.11}$$

よって,$\det(\boldsymbol{SB} \neq 0)$ ならば,ノミナルシステムの等価制御入力 u_{eq} は

$$u_{eq} = -(\boldsymbol{S}_c\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{S}_c\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} \tag{7.12}$$

になる。

最後に，切り換え超平面上に状態を拘束させるための非線形入力であるスライディングモードコントローラの設計を行う。スライディングモードコントローラの設計方法には，固定階層制御法，自由階層制御法，最終スライディングモード制御法などがある。本研究では設計が容易な最終スライディングモード設計法を用いることにする。この制御法はシステムの状態が任意の初期値から出発したときに，スライディングモード領域に至るまで，一度もスライディングモードを生じないで，スライディングモード領域に入った後，一機にスライディングモードを生じるものである。一般に最終スライディングモード制御入力は等価制御入力と非線形制御入力で構成され，非線形制御入力は次式のようになる。

$$u_{nl} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_c}{\|\sigma_c\|}\bar{\rho}_c & S_c x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & S_c x = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{7.13}$$

ここで $\bar{\rho}_c$ は不確かな関数の上界値であり，このシステムの場合 $\bar{\rho}_c = 1$ である。最終スライディングモード制御入力は

$$u = u_{eq} + u_{nl} = -(\boldsymbol{S}_c\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{S}_c\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} - \frac{\sigma_c}{\|\sigma_c\|} \tag{7.14}$$

となる。

マッチング条件を満たす制御手法をデルタシグマ変調器に適用したときのブロック線図を Fig. 7.4 に示す。量子化された出力信号は非線形制御入力 u_{nl} を参照することになる。

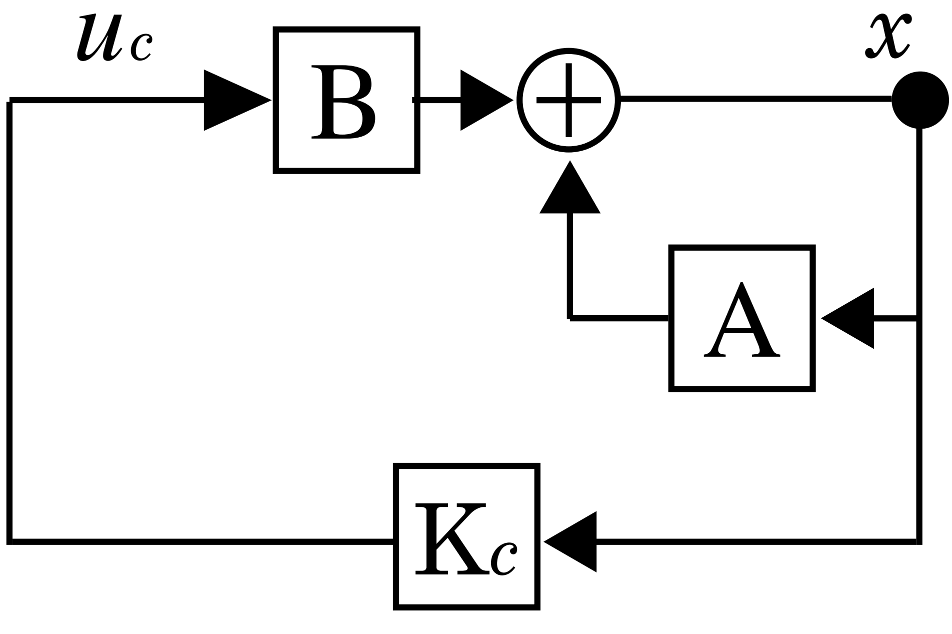


Fig. 7.3: 定数フィードバック

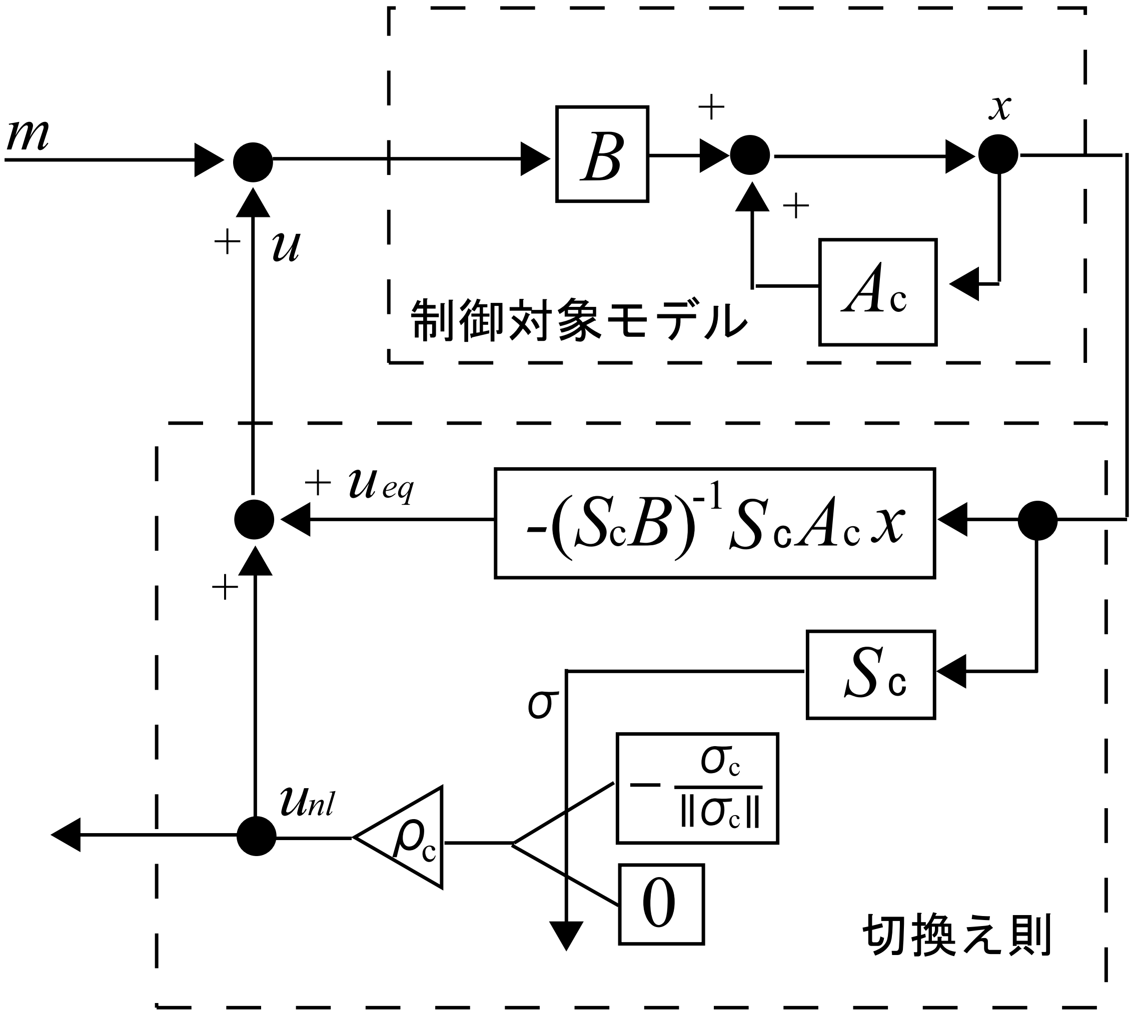


Fig. 7.4: 提案手法のデルタシグマ変調器ブロック線図

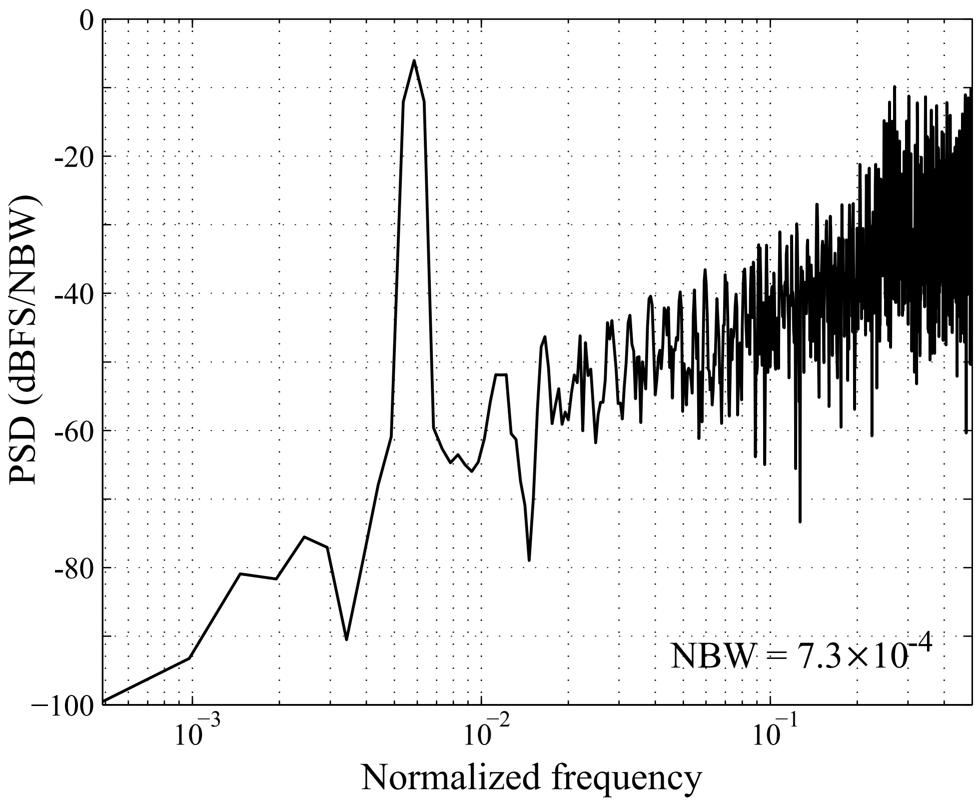


Fig. 7.5: 出力振幅特性

7.1.2 デルタシグマ変調器の設計例と考察

状態フィードバックゲイン $\boldsymbol{K_c}$ を $\boldsymbol{K_c} = [2, 1]$，入力信号の上界値 $\bar{\rho}_c$ は $\bar{\rho}_c = 1$ として設計した２次のデルタシグマ変調器に，フルスケールの半分の振幅，正規化周波数 11/2048 の正弦波を入力したときの出力の振幅周波数特性を Fig. 7.5 に示す。FFT ポイント数は 2048 ポイントで Hann 窓を用いた。デルタシグマ変調器の特徴である，高域上がりの量子化雑音特性を示しており，不確かな系を含むスライディングモード制御理論をデルタシグマ変調器に適用できることが確認された。しかし，量子化雑音を最適にシェイピングしているとは言えず，信号周波数帯域においてはフラットな特性を示しておらず，高い SNR を得ることは難しい。考察の結果，ループフィルタを高次化しても雑音伝達関数が１次のループフィルタの場合と変化しないことが解った。これは，構造をマッチング条件を満たすように変えたことによるものである。高次のデルタシグマ変調器で高い信号対雑音比を得つつ安定性を高めるためには，マッチング条件を満たさない場合の制御手法をデルタシグマ変調器に適用していく必要があり引き続き研究する所存である。

7.2 既存のループフィルタにスライディングモード制御理論を適用する手法

7.2.1 提案する設計手法

スライディングモード制御は，ある与えられたシステムに対して切り換え超平面を設計し，システムを安定させるというのが特徴である。本項ではある既存の方法で設計される量子化器を線形近似して求められるループフィルタをそのまま利用することを考える。このループフィルタは今まで検討してきたように，２次までは安定であるが，次数が大きくなると大きな入力振幅に対して不安定になりやすいという特徴があった。この不安定なシステムに対してスライディングモード制御理論を適用することを考える。

Fig. 7.6 に設計されたループフィルタにスライディングモード制御理論を適用したブロック線図を示す。L はループフィルタ，S は設計する切換超平面，v は出力信号かつ非線形入力，u_{eq} は等価制御入力である。スライディングモード制御理論ではデルタシグマ変調器の量子化器を線形近似する必要はないが，参考までに量子化器を線形近似するループフィルタの設計手法と同じように，２値量子化器を線形利得 $k = 1$ で近似し量子化雑音 E が付加されるとして伝達特性を求めると次式のようになる。

$$V = \frac{SL}{1+SL}(M - Ueq) + \frac{E}{1+SL} \tag{7.15}$$

この式から入力信号 m と等価制御入力 u_{eq} の差を取っていることがわかり，入力信号 m は等価制御入力 u_{eq} により変化することになる。

このことを避けるために，等価制御入力 u_{eq} を 0 にした場合のブロック線図を Fig. 7.7 に示す。

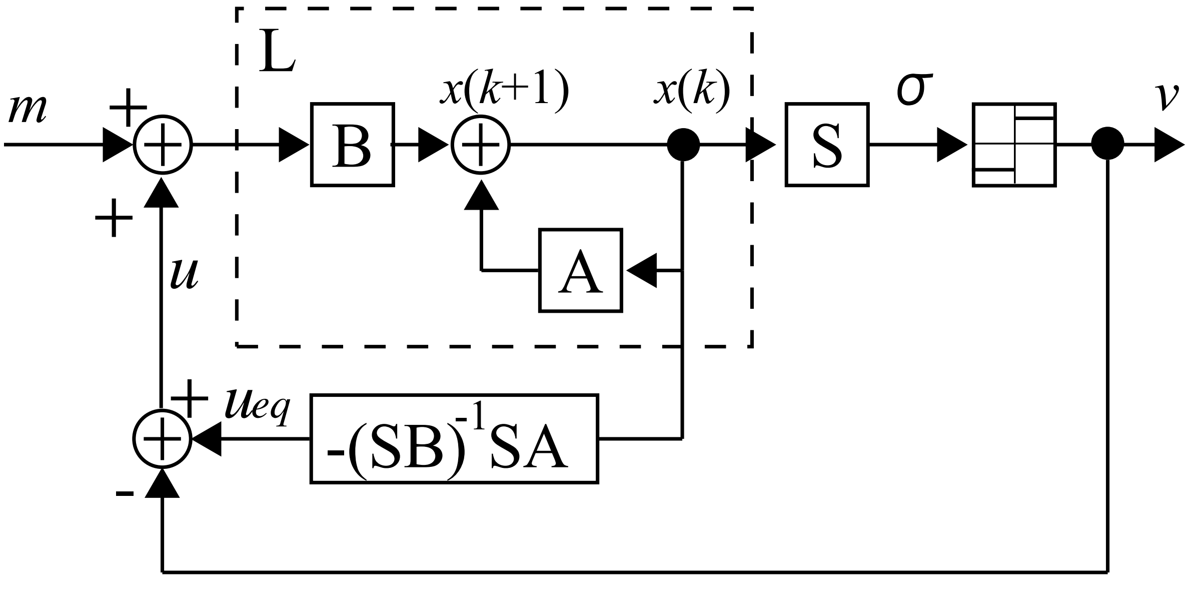


Fig. 7.6: スライディングモード制御理論を適用した図

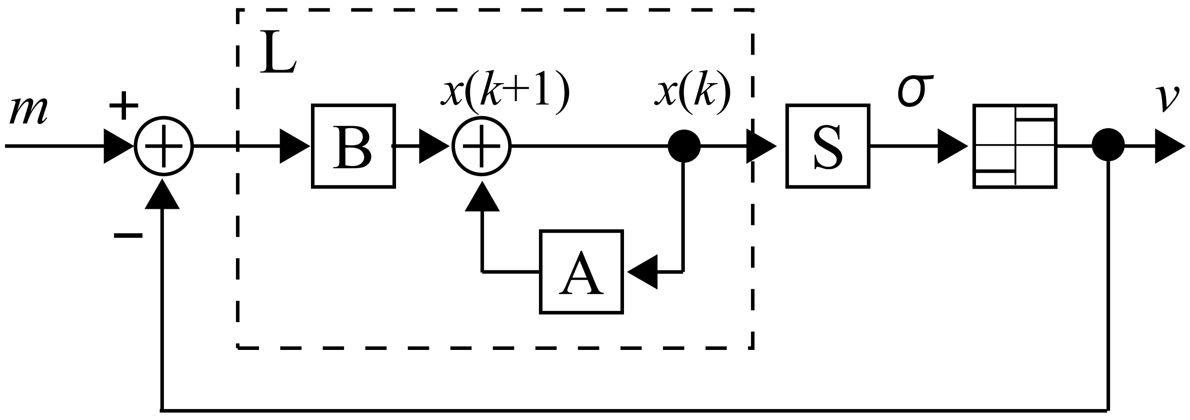


Fig. 7.7: 提案するブロック線図

この場合の伝達特性は

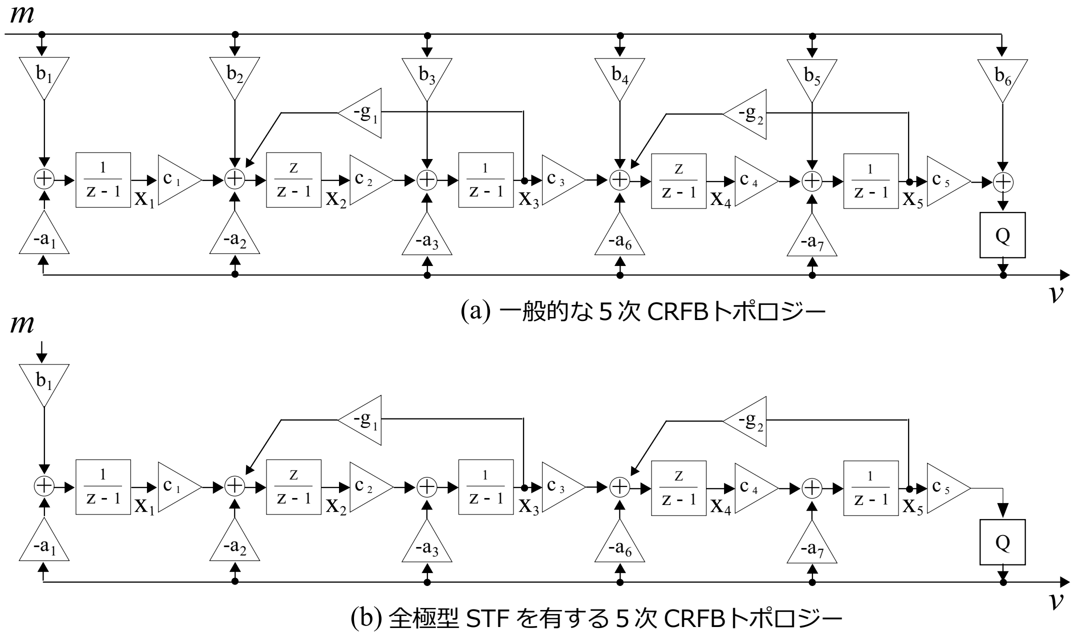
$$V = \frac{SL}{1+SL}M + \frac{E}{1+SL} \tag{7.16}$$

となり，単一フィードッバク構造をもったデルタシグマ変調器の伝達特性に，切り替え超平面 S によってシステムの状態を判定する構造となり制御効果が期待できる。単一フィードバック構造では一つのループフィルタ L のみで STF と NTF を実現している。そのため，STF に関しては全周波数帯域で STF(z)=1 とはならない。しかしながら，信号周波数帯域においては 1 となるようにループフィルタ L を設計できる。

Fig. 7.7 において，新しく設計するものは切り換え超平面 S と量子化器のゲイン k のみである。切り換え超平面は極配置法，固有ベクトルを用いた方法，システムの零点を用いた方法などから選択し設計すればよく，デルタシグマ変調器の設計が簡単に行える。

7.2.2 デルタシグマ変調器の設計例と評価

提案手法におけるデルタシグマ変調器の設計例を紹介する。synthesizeNTF 関数を用いてループフィルタを設計するが，そのパラメータはフィルタ次数 5 次，OSR 比 32，Hinf はリーの基準値を参考にし 1.5 とした。synthesizeNTF 関数が設計するループフィルタは 2 入力 1 出力であるので，今回設計する単一フィードバック構造の 1 入力 1 出力に変換する必要がある。Fig. 7.8 に 5 次の CRFB トポロジーについて示す。Fig. 7.8(a) は一般的な CRFB トポロジーであり，係数ベクトル a,b,c,g によって表現されている。synthesizeNTF 関数が設計するループフィルタからもこの CRFB トポロジーの係数ベクトル a,b,c,g を求めることができる。具体的には図中の X_1 から X_5 までの状態方程式と，ループフィルタの状態空間表現された ABCD 行列の要素を比較すればよく，デルタシグマツールボックスの realizeNTF 関数によって簡単に変換できる。その求めた係数ベクトル b に注目し，b_1 項以外を 0 とすることで Fig. 7.8(b) のトポロジーが得られる。この (b) のトポロジーでの STF は b_1 項を分子に持つ全極型フィルタである。次に，b_1 項以外を 0 とした係数



(a) 一般的な5次 CRFBトポロジー

(b) 全極型 STF を有する5次 CRFBトポロジー

Fig. 7.8: 5次の CRFB トポロジー

ベクトル b' と係数ベクトル a,c,g から再び状態空間モデルを作成し，

$$L = 1 - \frac{1}{NTF(z)} \tag{7.17}$$

から，単一フィードバック構造のループフィルタを求めることができる。このとき，設計される単一フィードバック構造のループフィルタ L の $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 行列は，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9986 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0028 & 0.9986 & 0.0451 & 0.1722 & 0.5068 \\ 0 & 0 & 0.9960 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0079 & 0.9960 & 0.3513 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

となる。ループフィルタ L によって求められる STF と NTF を Fig. 7.9 に示す。赤色の実線が STF であり，青色の実線が NTF である。Fig. 7.9 から STF は全極型フィルタであり，全体域で |STF(z)|=1 は保証されないが，信号周波数帯域である低周波数帯域では STF はフラットであるため，A-D 変換器として十分な特性であると考えられる。

スライディングモード制御の切り換え超平面はシステムの零点を用いた設計法で設計した。そのパラメータは制御目的の重み行列:$\boldsymbol{Q} = 0.001 \times \boldsymbol{I}$，制御入力の重み:R=1，安定余裕のための零点

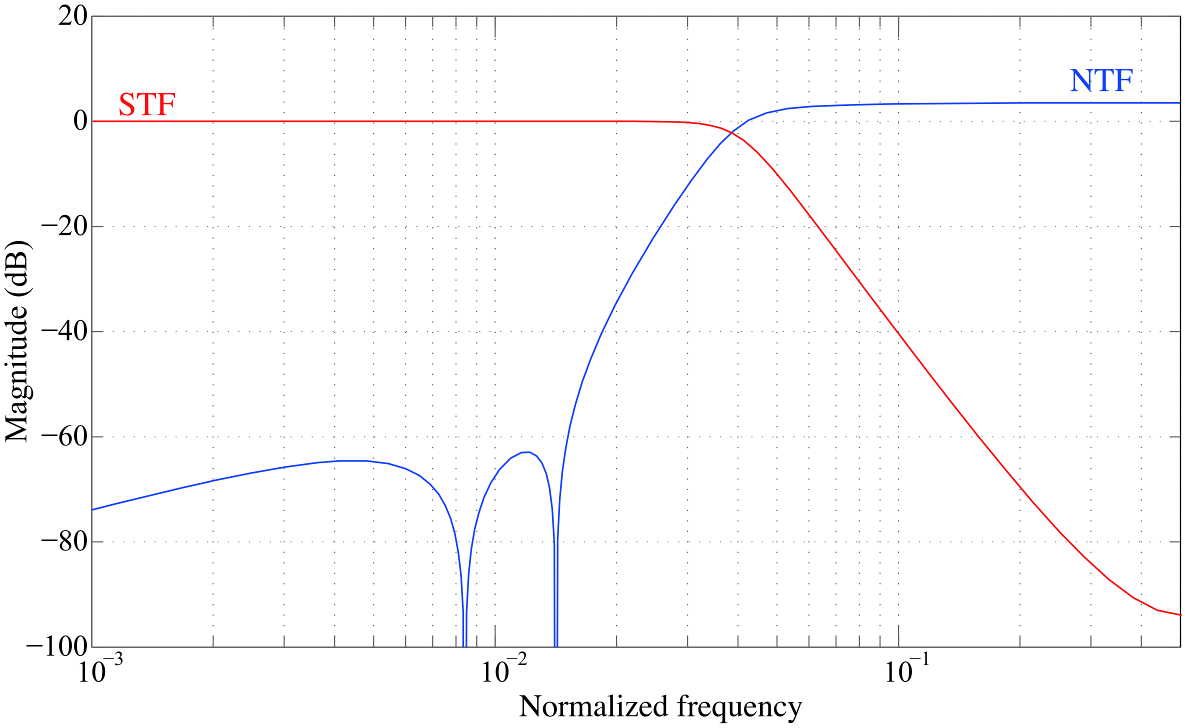


Fig. 7.9: 単一フィードバック構造における STF と NTF

の実部の最大値:$-\epsilon = -0.01$，である。2 値量子化器のゲインは ± 1 に設定した。このパラメータにより設計した切り換え超平面 $\boldsymbol{S}$ は

$$\boldsymbol{S} = [0.0203, 0.3326, 0.0887, 0.4320, 0.8812] \tag{7.20}$$

となる。

以上の設計パラメータにより完成した 5 次のデルタシグマ変調器に，フルスケールの半分の振幅 (-6dB 相当)，正規化周波数 11/2048 の正弦波を入力したときの出力の振幅周波数特性を Fig. 7.10 に示す。FFT は Hann 窓関数を用いて 2048 ポイントで行った。黒色の実線は synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタのみを用いた場合の PSD の様子であり，赤色の実線は提案手法による PSD の様子を表している。2 つの PSD を比べてデルタシグマ変調器の特徴である，高域上がりの量子化雑音特性を示しノイズシェイピングされていることが確認でき，ほぼ同等の出力振幅特性であることがわかる。

次に入力振幅に対する SNR を検討する。Fig. 7.11(a) は正規化周波 5/2048 で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた正弦波信号を入力したときの SNR であり，Fig. 7.11(b) は正規化周波 15/2048 で振幅を 0.1 から 1 まで 0.01 ステップで変化させた正弦波信号を入力したときの SNR である。黒色の実線は synthesizeNTF 関数で設計したループフィルタのみを用いた場合の SNR の様子であり，赤色の実線は提案手法による SNR の様子を表している。Fig. 7.11(a) は synthesizeNTF 関数のみを用いた場合は入力振幅 0.65 で不安定となるが，提案手法は入力振幅 0.71 まで安定であり，Fig. 7.11(b) も同様に synthesizeNTF 関数のみを用いた場合は入力振幅

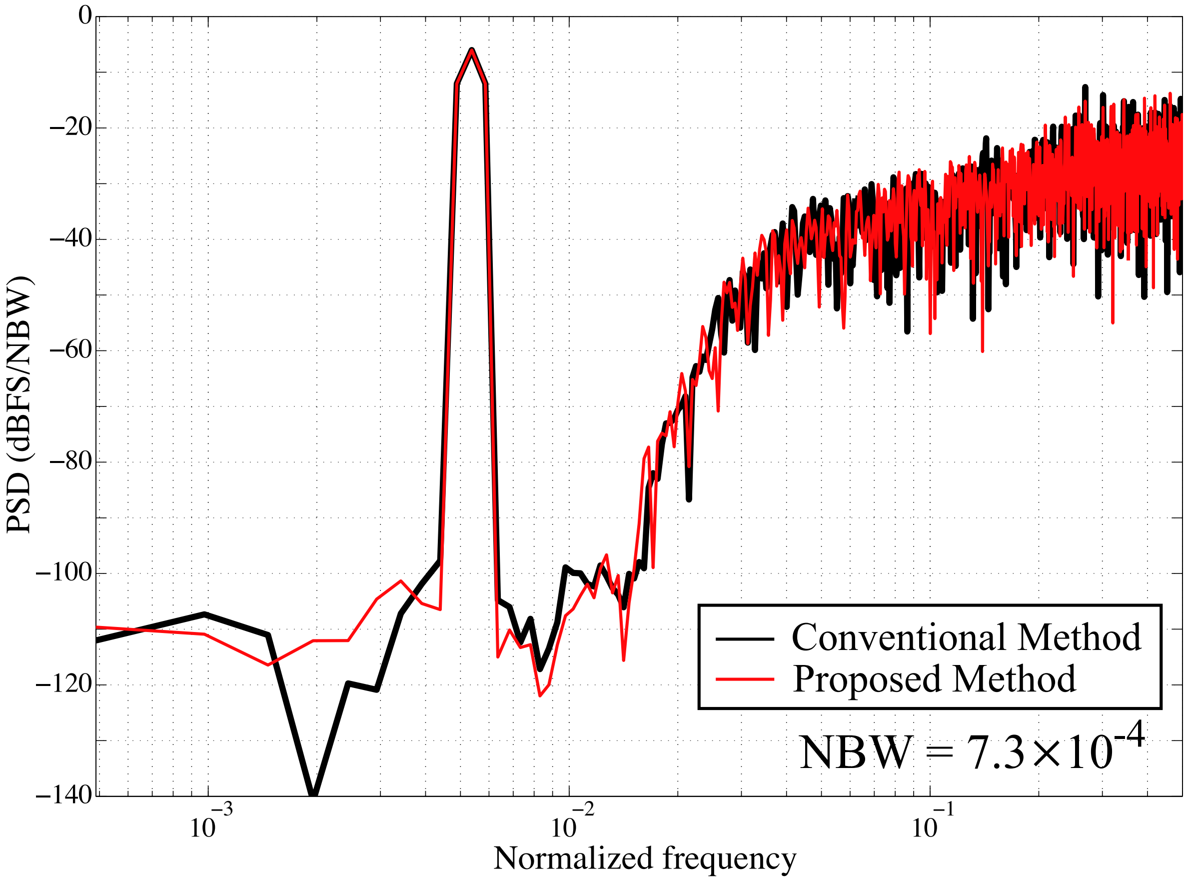
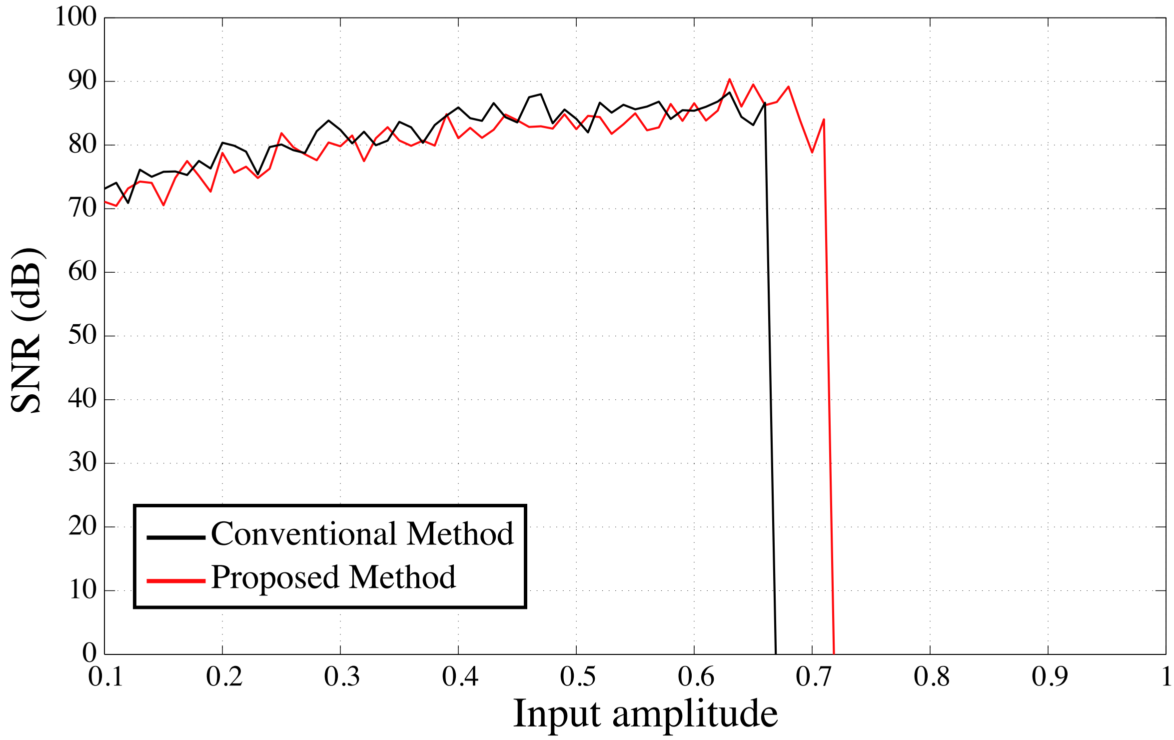
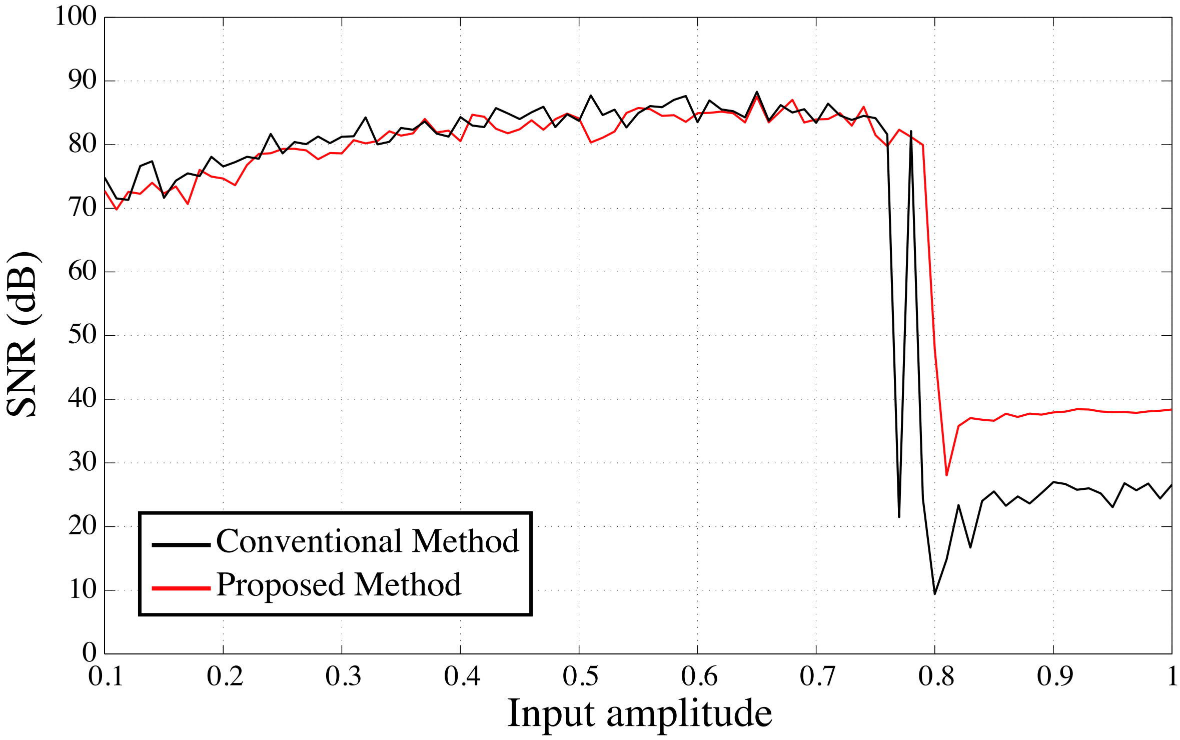


Fig. 7.10: 出力振幅特性

0.75 で不安定な動作が見られるようになるが，提案手法は入力振幅 0.80 まで安定な状態を保っている。また，Fig. 7.11(a)，(b) ともに提案手法は，synthesizeNTF 関数のみを用いた場合と同等の SNR を実現できていることから，SNR を保ちつつ入力振幅に対する安定性を高めることができると考えられる。



(a) 正規化周波数5/2048



(b) 正規化周波数 15/2048

Fig. 7.11: 入力振幅に対する信号対雑音比

7.3 まとめ

本章ではスライディングモード制御理論をデルタシグマ変調器に適用し，高い SNR と入力振幅安定性を併せ持ったシステムの設計を試みた。マッチング条件を満たすスライディングモード制御理論を適用する場合は，理論を適用するためにデルタシグマ変調器の構造を変化させる必要があった。このために，ループフィルタを高次化しても高い SNR が得られなかった。今後は，構造を変えずにマッチング条件を満たす場合の理論を適用する，またはマッチング条件を満たさない場合の理論を適用するなどという研究課題が残っている。

次に，スライディングモード制御理論本来の不安定なシステムを安定化させるという考え方で，既存の量子化器を線形近似する方法で設計したループフィルタを用いて安定化を目指した。この提案手法では，デルタシグマ変調器は単一フィードバック構造と呼ばれる構造になっており，一つのループフィルタで STF と NTF を実現する必要がある。そのため，STF は 1 ではなく，設計した NTF の特性に依存するが，信号帯域内では STF=1 でありノイズシェイピングが始まる高域付近で利得が落ちるような仕様になる。設計方法は，既存の量子化器を線形近似する方法で設計したループフィルタの状態方程式 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ のみを用い，切り替え超平面 S を設計するのみで良い。設計例では synthesizeNTF 関数と比較し，同等のノイズシェイピング特性と SNR を保ちながら，入力振幅に対する安定性を高めることができ，有効な制御方法と考えることができる。

第 8 章

デルタシグマ変調器の応用例と可能性

8.1 高周波信号の復元

本章ではデルタシグマ変調器の応用例と可能性について述べる。まずはじめに，μ 設計法で設計した 5 次，OSR16 で設計したデルタシグマ変調器に基本周波数 12kHz，振幅 0.5 の矩形波アナログ信号を入力したときのシミュレーションを行う。Fig. 8.1(a) は基本周波数 12kHz の矩形波アナログ信号をサンプリング周波数 48kHz の 16 倍である 768kHz で標本化したサンプル値信号である。この信号を 5 次，OSR16 で設計したデルタシグマ変調器で 1bit 量子化した出力信号が Fig. 8.1(b) である。

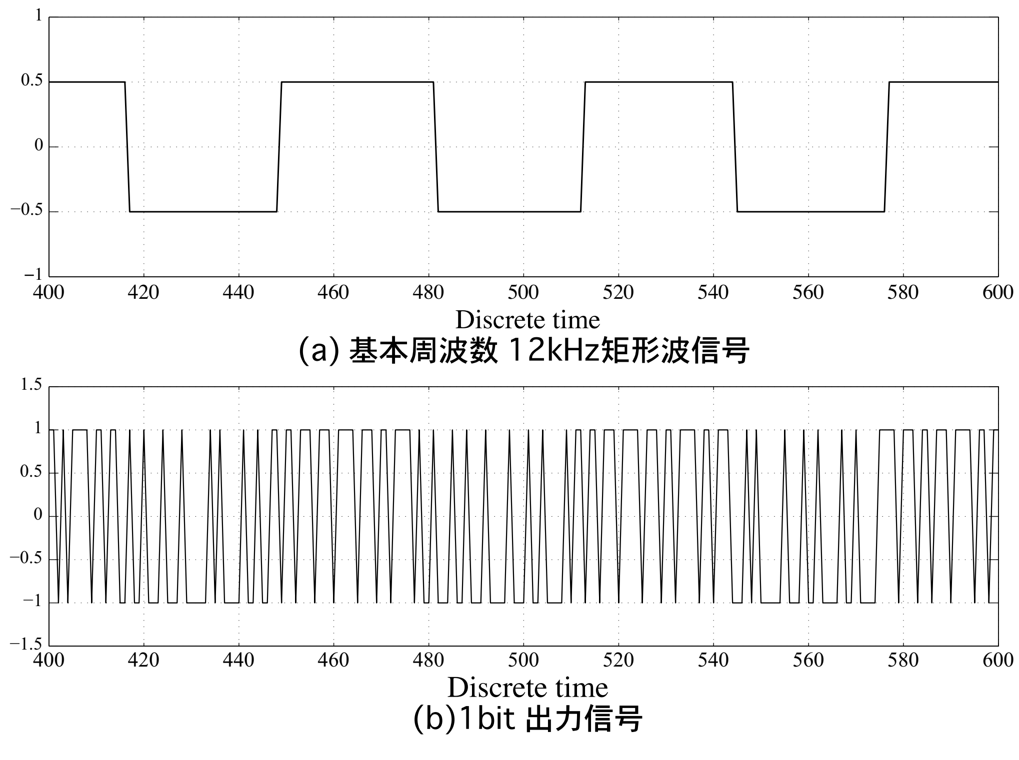


Fig. 8.1: 基本周波数 12kHz 矩形波と出力信号

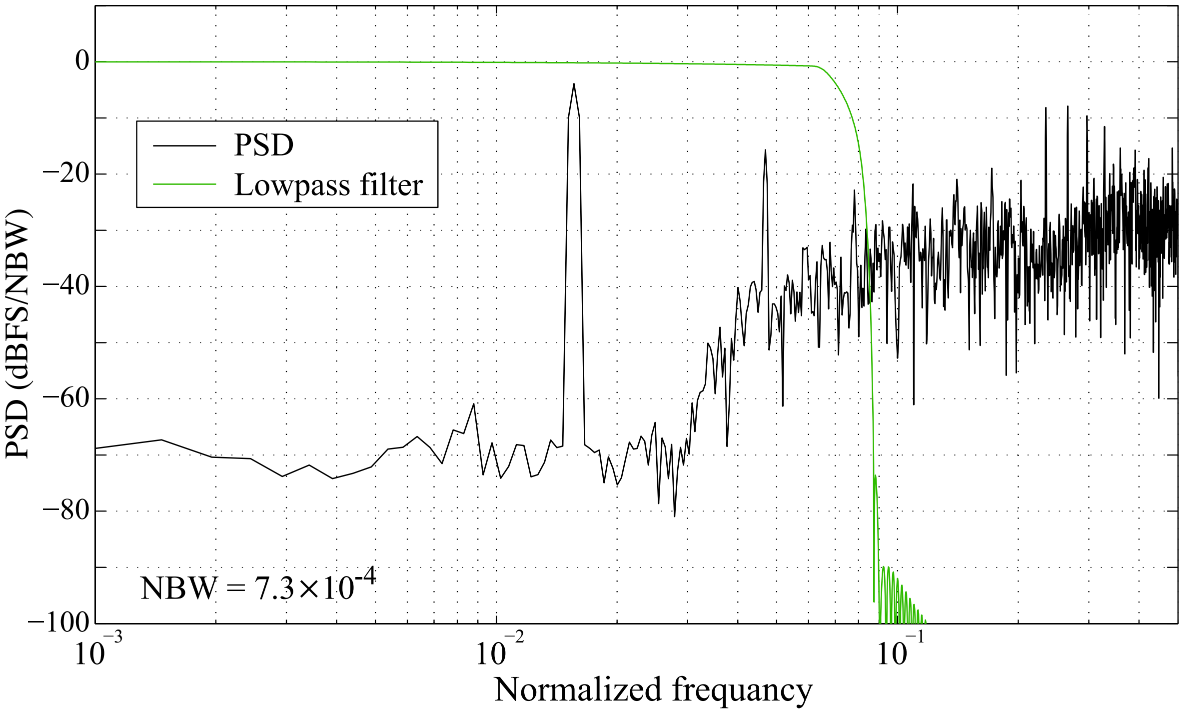


Fig. 8.2: 出力信号の振幅特性

Fig. 8.1(b) の出力信号を Hann 窓を用いて 2048 ポイントで FFT した結果が Fig. 8.2 である。黒色の線が出力信号の PSD の様子である。この出力信号に Fig. 8.2 の緑色の線で示す基本周波数の 9 倍音成分までを通過させるような特性を持つローパスフィルタを通し，復調した信号が Fig. 8.3 である。このように，５次，OSR16 のデルタシグマ変調器で基本周波数 12kHz 矩形波を符号化すると不完全ではあるが矩形波信号を復元できることがわかる。このデルタシグマ変調器

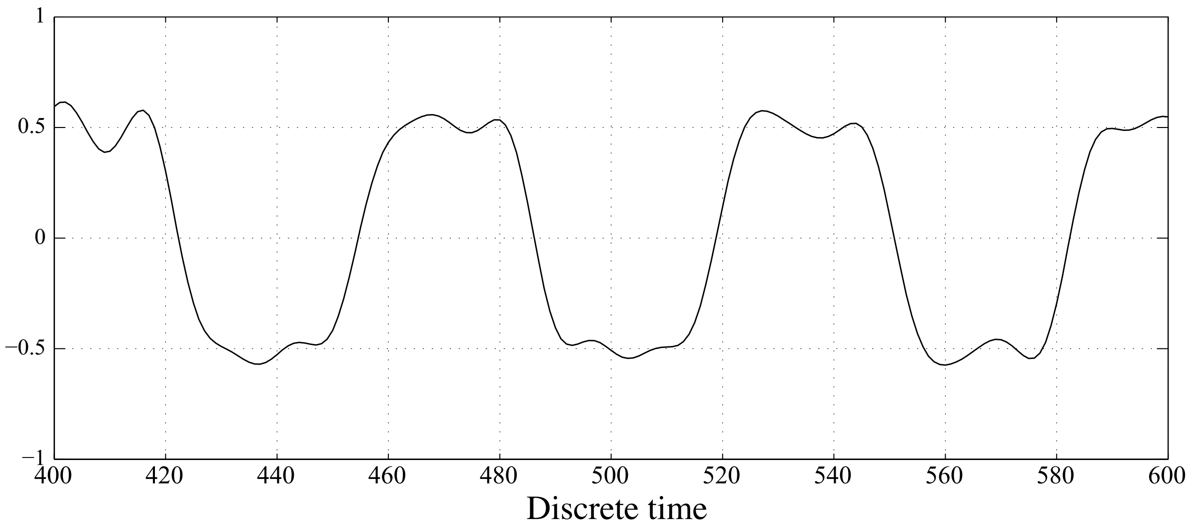


Fig. 8.3: 復調信号

は 48kHz×OSR16 の 768kbps の伝送容量を持つが，サンプリング周波数 48kHz，量子化ビット数 16bit のナイキスト型 A-D 変換器（伝送容量 786kbps）では 24kHz までしか符号化できない。そのため，シミュレーションで用いた矩形波を符号化し復調しても基本周波数の 12kHz の正弦波信号しか現れない。このシミュレーション結果から，ナイキスト型 A-D 変換器と同様の伝送容量を持つデルタシグマ変調器を用いて符号化すると，ナイキスト型 A-D 変換器が符号化できない高周波数帯域まで符号化できることがわかる。

8.2 DSD 方式におけるループフィルタの高次化

デルタシグマ変調を用いた，アナログ信号のデジタル化は主にオーディオの分野で用いられている。デルタシグマ変調は，ダイレクトストリームデジタル（Direct Stream Digital, DSD）方式と呼ばれ，Super Audio CD(ディスク一枚の容量 4.7GB) で使用されている。現在，主流となっているのは，サンプリング周波数が CD の規格である 44.1kHz の 64 倍の 2822.4kHz，量子化ビット数は 1bit であり，この仕様は DSD64 と呼ばれている。符号化可能な信号周波数帯域は 2822.4kHz の半分の 1411.2kHz であるが，高域になるにつれてノイズシェイピングの影響を受けて SNR が下がるので，実際には再生可能周波数 100kHz，可聴域 (22kHz 以下) での SNR は 120dB 以上と言われている。デルタシグマ変調器のループフィルタの次数は 5 次までが主に使われており，ループフィルタの次数を高次化することで，可聴域での SNR をさらに向上することができる。

μ 設計法によって設計されたループフィルタを用いて DSD64 と同じ OSR である OSR64 の場合のシミュレーションを行う。入力信号は，サンプリング周波数は 48kHz の 64 倍とし，周波数はフーリエ変換時の周波数 bin と合わせるため 12kHz に設定し，振幅はフルスケールの半分である 0.5 の正弦波を用いた。つまり，アナログ信号を振幅 0.5 で正規化し DSD64 方式でデジタル信号に変換するシミュレーションである。1bit 出力信号を Hann 窓関数を用い 2048 ポイントで FFT した結果を Fig. 8.4 に示す。横軸には正規化周波数に加えて，DSD64 方式のサンプリング周波数 2822.4kHz の場合における可聴域 22kHz と 100kHz の位置を示す。黒色の実線が，現在，主に用いられている 5 次のループフィルタを μ 設計を用いて設計した場合の結果であり，赤色の実線が，μ 設計法を用いて設計された 11 次のループフィルタでのシミュレーション結果である。このとき，可聴域の 22kHz は正規化周波数 0.0077 までであり，その帯域以下での SNR を検討すると，11 次の場合は 5 次の場合よりもノイズフロアが低く最大で 10dB 程度 SNR が改善している。さらに，11 次の場合 SNR が高いフラットな帯域が正規化周波数 0.01 程度まで高域に延びており，これは実際の周波数で 30kHz までフラットな特性を持つことを示している。そのため，ループフィルタの次数を高次化することで，信号周波数帯域での SNR が改善するだけなく，符号化した信号をより高域まで SNR がよい状態で符号化できると考えられる。

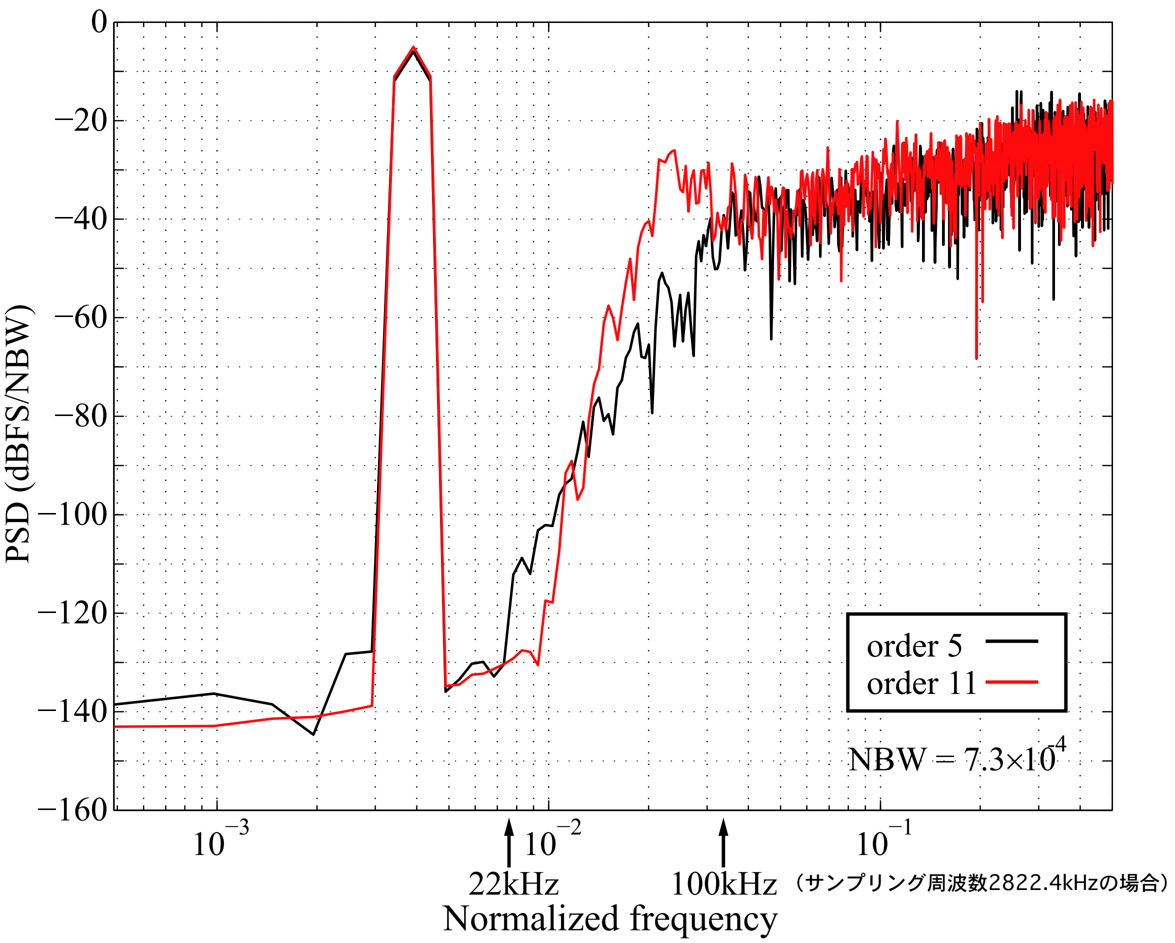


Fig. 8.4: DSD64 方式である OSR64 のシミュレーション

8.3 DVD オーディオから DSD64 への変換

DSD64 方式の再生可能周波数 100kHz を利用して，DVD オーディオ（サンプリング周波数 192kHz，量子化ビット数 24bit，ディスク一枚の容量 4.7GB) の PCM 方式のデジタル信号に対して，DSD 方式を用いて D-D 変換することも考えることができる。DVD オーディオでの伝送容量は 1ch あたり 4608kbps であるが，DSD 方式での伝送容量は 1ch あたり 2822.4kbps である。これは，PCM 方式から DSD 方式に変換すると 60 %圧縮でき，同じ記録媒体におおよそ 1.6 倍のデータを記録することができる計算となる（Fig. 8.5)。しかしながら，デルタシグマ変調を用いると高域ではノイズシェイピングの影響を受けノイズが増え，SNR が低下し，このため，PCM 方式で符号化している 96kHz に近くなるにつれてノイズが増え SNR の劣化が起こる。また，先ほど述べたように現状ではデルタシグマ変調での SNR は可聴域 (22kHz 以下) での SNR が 120dB 以上と言われおり，DVD オーディオの SNR が理論上おおよそ 144dB であるので，可聴域では若干の SNR の低下が考えれられる。この可聴域の SNR の低下の問題を解決するために，高次のループフィルタを用いて可聴域での SNR を高くすることが考えられる。

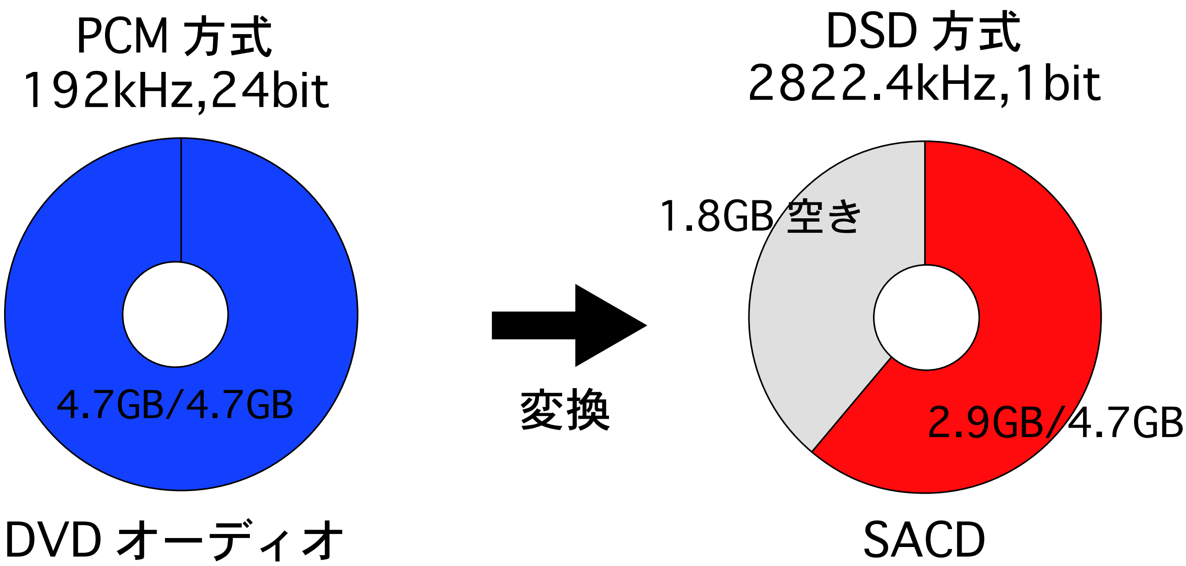


Fig. 8.5: PCM 方式から DSD 方式への変換

8.4 デルタシグマ変調を用いたデータ圧縮の可能性

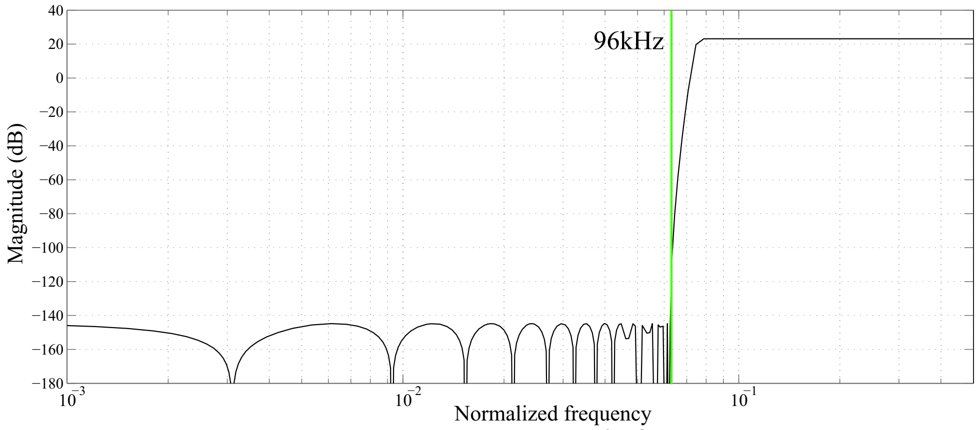
8.4.1 DSD 方式によるデータ圧縮

SACD の規格である DSD64 方式とらわれず，DVD オーディオの PCM 方式から DSD 方式のデジタルーデジタル変換（D-D 変換）によるデータ圧縮の可能性として，DSD64 方式の OSR64 から OSR32 へ小さくすることができれば，1ch あたりの伝送容量は 1536kbps となり，圧縮前の

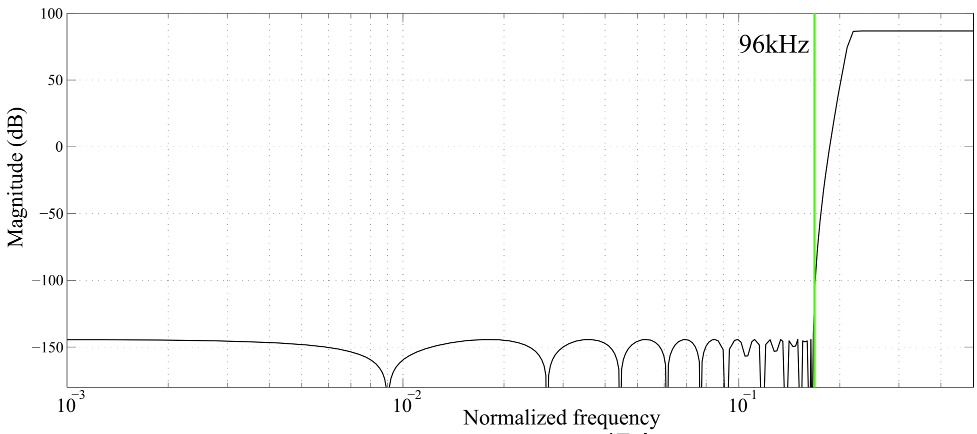
DVD オーディオの 1ch あたりの伝送容量 4608kbps と比較し 3 倍の圧縮ができることになる。しかし，OSR を小さくすることで可聴域での SNR が低下する。OSR64 の場合と同程度の SNR を得るためにはループフィルタのさらなる高次化が必要である。ループフィルタの高次化が難しい場合は，システムの規模は大きくなるが MASH 変調器に代表される多段変調器を使うことで解決できる可能性がある。なぜならば，高次のループフィルタの特性を低次のループフィルタの安定性で実現できるからであり，２段の MASH 変調器では２２次のループフィルタを特性を１１次のループフィルタの安定性で実現でき，OSR を小さくしても信号帯域での SNR を高くすることができる可能性がある。

8.4.2 デルタシグマ変調を用いたロスレス圧縮

さらに，デルタシグマ変調器を使って D-D 変換でロスレス圧縮することも考えられる。DVD オーディオをロスレス圧縮する場合は，OSR を小さくし，かつ，信号帯域の 96kHz まで十分な SNR が得られるノイズフロアもつ安定なループフィルタの設計やデルタシグマ変調器のシステム設計が必要になる。Fig. 8.6 にその NTF の様子を示す。Fig. 8.6(a) は OSR32 で 96kHz まで



(a) OSR32 の場合



(b) OSR12 の場合

Fig. 8.6: 96kHz まで 144dB の SNR を得るための NTF

144dB 程度の SNR を得るための NTF の例である。この場合，圧縮前の 192kHz のサンプリング周波数を 8 倍でオーバーサンプリングし，48kHz×OSR32 のデルタシグマ変調器で D-D 変換すればよい。デルタシグマ変調器では第 2 章で示したように，fs/6 を境界にしてそれ以下の周波数で量子化雑音を低減できる。そのため，D-D 変換を考えるときには fs/6 と信号周波数の上限が等しくなるまで，デルタシグマ変調器の OSR を下げることができる。192kHz まで信号周波数が含まれているときは 48kHz×OSR12 まで OSR を下げられる。Fig. 8.6(b) は OSR12 で 96kHz まで 144dB 程度の SNR を得るための NTF の例である。この場合，圧縮前の 192kHz のサンプリング周波数を 3 倍でオーバーサンプリングし，48kHz×OSR12 のデルタシグマ変調器で D-D 変換すればよい。このときの 1ch あたりの伝送容量は 576kbps となり 8 倍の圧縮 (元データの 12.5%) が可能となる。

このロスレス圧縮は DVD オーディオだけでなく CD 音質（ここでは 48kHz,16bit とする）を圧縮することも可能である。デルタシグマ変調器のデータ圧縮される範囲でサンプリング周波数と OSR の選択できるが，ここではサンプリング周波数 12kHz と OSR を組み合わせることを考える。Fig. 8.7 に 24kHz まで 100dB の SNR を得るための NTF の様子を示す。Fig. 8.7(a) は OSR32 で 24kHz まで 100dB 程度の SNR を得るための NTF の例である。この場合，圧縮前の 192kHz

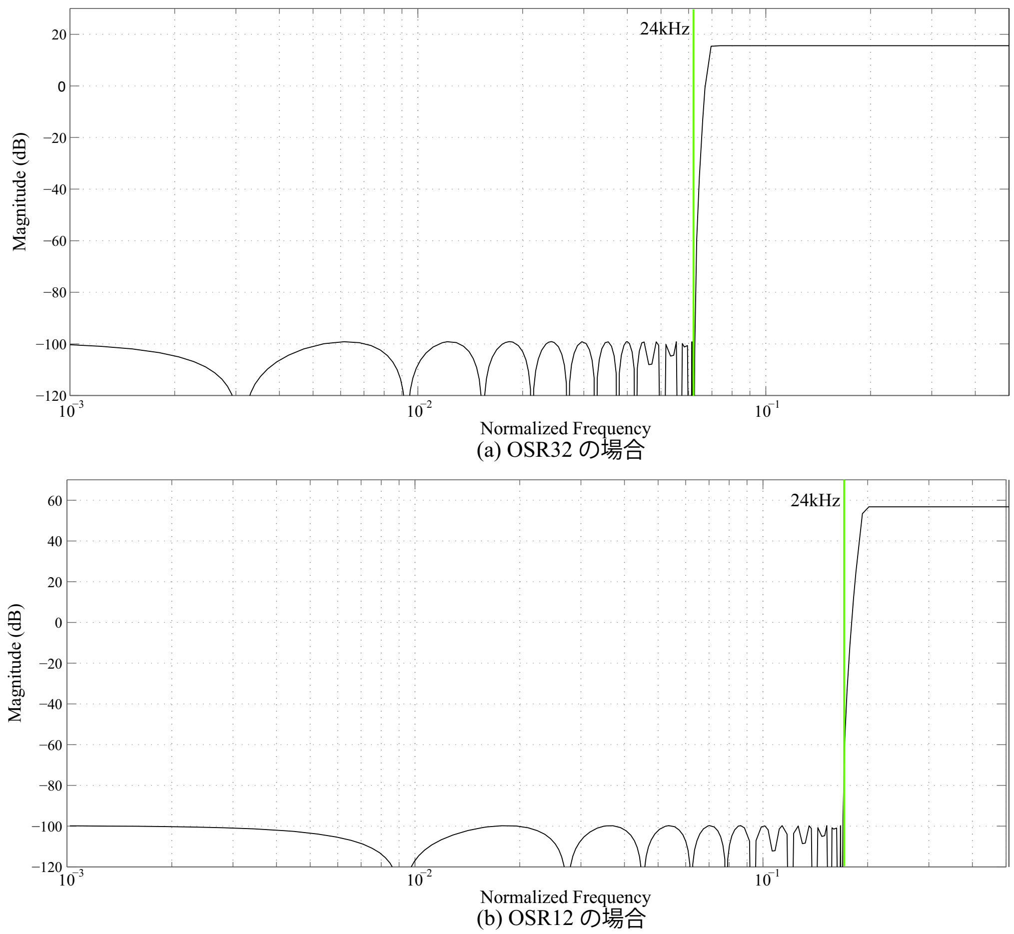


Fig. 8.7: 24kHz まで 100dB の SNR を得るための NTF

のサンプリング周波数を 8 倍でオーバーサンプリングし，24kHz×OSR32 のデルタシグマ変調器で D-D 変換すればよい。Fig. 8.7(b) は OSR12 で 24kHz まで 100dB 程度の SNR を得るための NTF の例である。この場合，圧縮前の 48kHz のサンプリング周波数を 3 倍でオーバーサンプリングし，24kHz×OSR12 のデルタシグマ変調器で D-D 変換すればよい。このときの 1ch あたりの伝送容量は 288kbps となり 16/3 倍の圧縮 (元データの 18.75%) が可能となる。以上の DVD オーディオと，CD 音質のデータをデルタシグマ変調器を用いてロスレス圧縮の例を Table. 8.1 と Table. 8.2 まとめる。

Table.8.1: DVD オーディオをデルタシグマ変調器でロスレス圧縮した場合

入力信号	デルタシグマ変調器の仕様	圧縮率（元データ比）
192kHz × 8	48kHz × 32	33%
192kHz × 6	48kHz × 24	25%
192kHz × 4	48kHz × 16	16%
192kHz × 3	48kHz × 12	12.5%

Table.8.2: CD をデルタシグマ変調器でロスレス圧縮した場合

入力信号	デルタシグマ変調器の仕様	圧縮率（元データ比）
48kHz × 8	12kHz × 32	50%
48kHz × 6	12kHz × 24	37.5%
48kHz × 4	12kHz × 16	25%
48kHz × 3	12kHz × 12	18.75%

現在，音楽データのロスレス圧縮技術としては，Free Lossless Audio Codec（FLAC）形式，Apple Lossless Audio Codec（ALAC）が普及している。これらを用いて PCM 音源をロスレス圧縮した場合の圧縮率は，元データに対して 50% 前後であり圧縮率は音源に依存する。一方，デルタシグマ変調器を用いたロスレス圧縮では今回示した例では 20% 以下まで圧縮可能であり，さらに音源に関係なく元データの伝送容量に対して一定の圧縮率を保つことができる。

しかし現在，デルタシグマ変調器を用いたロスレス圧縮を実現するための安定したループフィルタや，デルタシグマ変調器のシステムは研究の途中であり実現できていない。考えられる要因として，超高次のループフィルタの実現ができていないこと，ノイズシェイピングの影響で高周波数帯域でのノイズ量が多くなっていることが考えられる。例えば，192kHz×3 の場合で高周波数領域の利得が 70dB を超えており，量子化信号をフィードバックしたときにすぐにデルタシグマ変調器が発散してしまう。これらの対応と対策として，μ 設計法や線形ロバスト制御理論を用いて超高次ループフィルタを実現し，スライディングモード制御理論などの非線形ロバスト制御理論をデルタシグマ変調器の構造に適用することで，超高圧縮率のロスレス圧縮技術を得られるのではないかと考えている。

8.5 まとめ

本章ではデルタシグマ変調器の応用例と可能性について述べた。まずはじめに，ナイキスト型A-D 変換器では符号化不可能な周波数帯域までデルタシグマ変調器は符号化可能であることを示し，同じ伝送容量でも広帯域まで符号化可能であることを示した。

次に，SACD の企画である DSD64 方式を例に挙げ，現在一般に使用されている 5 次のループフィルタから１１次のループフィルタへと高次化することによって SNR が高くなり，より高周波数帯域までフラットなノイズフロアを実現できることを示した。

そして，データ圧縮に関する可能性について述べ，DVD オーディオ形式から DSD64 方式への変換での圧縮，そしてロスレス圧縮での超高圧縮率の可能性について述べた。

以上のようにデルタシグマ変調器には多くの可能性があり，その可能性を実現するためにはループフィルタの高次化と安定性向上を欠かすことはできないと考える。線形ロバスト制御理論の μ 設計法や，非線形ロバスト制御理論のスライディングモード制御理論，さらには他のロバスト制御理論を適用し，ループフィルタの高次化と安定性を実現する必要がある。

第 9 章

総括

本論文は，デルタシグマ変調器の入力振幅に対する安定性向上を目的とし，そのために，線形・非線形ロバスト制御理論をループフィルタの設計に適用した。以下に本論文で得られた成果を示す。

1. 線形ロバスト制御理論である μ 設計法をループフィルタの設計に適用し，11 次のデルタシグマ変調器の設計手法を示し，synthesizeNTF 関数を用いて設計した 11 次のデルタシグマ変調器と比較し，同程度の SNR を確保し，入力振幅に対する安定性を高められることを確認した。
2. 線形利得を用いたループフィルタ切り替え法を提案し，μ 設計法を用いて SNR が高いループフィルタと安定性が高いループフィルタを設計することで，先行研究にある振幅切り替え法と同等の安定性を得ながら，SNR が高いループフィルタで駆動する割合を多くできることを確認した。
3. μ 設計法を用いて設計されたループフィルタを有するデルタシグマ変調器において，量子化器の直前で高域集中ディザを付加することで，入力振幅に対する安定性を高められることを確認した。
4. 非線形ロバスト制御理論の 1 つであるスライディングモード制御を用い，切り換え超平面を設計することで，既存の設計方法で設計されたループフィルタの安定性を高められることが確認できた。

以上の成果により，デルタシグマ変調器の入力振幅に対する安定性向上のための対応策を示すことができた。

今後の展望として，第 8 章のデルタシグマ変調器の可能性でも示したが，ループフィルタをさらに高次化することが考えられる。また，デルタシグマ変調器を用いてロスレス圧縮を実現するために，低いオーバーサンプリング比で，高周波数帯域まで高い SNR を実現する必要がある。デルタシグマ変調器にディザを適用する場合，様々なディザの設計方法があるので，それらのディザを用いることで安定性が変化するのか検討する必要がある。本研究では正弦波入力に関してディザを適用したが，実際の音声信号に適用しても効果があるのかも検討する必要がある。スライディングモード制御理論を適用する場合にも，マッチング条件を満たす場合の効果がほとんど無かったため，マッチング条件を満たさない場合の理論を適用し，デルタシグマ変調器にあった定式化を試み

る。さらには，ロバスト制御理論全体を見ても，デルタシグマ変調器に適した制御理論があると考えるので，多くの制御理論についてもデルタシグマ変調器に応用できるよう研究していきたい。

最終的には，ハードウェアを作り検討しロバスト制御理論を適用したデルタシグマ変調器の実用化に向けて研究を続けて行く所存である。

参考文献

[1] 貴家仁志，“デジタル信号処理,” 昭晃堂, ，東京，1997.

[2] 岩田彰，“ディジタル信号処理,” コロナ社，東京，1995.

[3] 宇津宮孝一，兼田護，“デジタル信号処理の基礎,” 森北出版，東京，2000.

[4] 山崎芳男，“AD/DA 変換器とディジタルフィルタ,” 日本音響学会誌 第 46 巻 3 号，pp.251-257, 1990.

[5] 岡島寛, 澤田賢治, 松永信智, “通信容量制約に基づく動的量子化器の統合設計,” 計測自動制御学会論文集, Vol.47, No.2, pp. 126-133, 2011.

[6] P.Cusinato, D. Tonietto, F. Stefani and A. Baschirotto, “A 3.3-V CMOS 10.7-MHz sixth-order bandpass Σ Δ modulator with 74-dB dynamic range,” Solid-State Circuits, IEEE Journal, Volume 36, Issue 4, pp.629-638, 2001

[7] “ハイレゾオーディオの呼称について（周知）,” 電子情報技術産業協会，25JEITA-CP 第 42 号，2014.

[8] W. L. Lee, “A novel higher order interpolative modulator topology for high resolution oversampling A/D converters,” Master’s Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. June 1987.

[9] K.C.H. Chao, S. Nadeem, W.L. Lee, and C.G. Sodini, “A higher order topology for interpolative modulators for oversampling A/D conversion,”

[10] R. Schreier, “The delta-sigma toolbox version 7.1,” Matlab code and documentation, 2006.

[11] R. Carley and J. Kenney, “A 16-bit 4’th order noise-shaping D/A converter,” Custom Integrated Circuits Conference, pp. 21.7/1 - 21.7/4, 1988.

[12] J. Lota, M. Al-Janabi and I. Kale, “Nonlinear Stability Prediction of Multibit Delta-Sigma Modulators for Sinusoidal Inputs,” Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions, Volume 63, Issue 1, pp.18-26, 2014.

[13] T. C. Leslie and B. Singh, “An improved sigma-delta modulator architecture,” Proceedings of the 1990 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol. 1, pp. 372-375, May 1990.

[14] G. Fischer and A. J. Davis, “Alternative topologies for sigma-delta modulators-a comparative study,” Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, IEEE

Transactions, Vol. 44, Issue. 10, pp. 789-797, 2002

[15] M. Keskin, Un-Ku Moon and G. C. Tems, "A 1-V 10-MHz clock-rate 13-bit CMOS ΔΣmodulator using unity-reset opamps," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 37, no. 7, pp. 817-824, July 2002.

[16] 王軍, 松岡俊匡, 谷口研二, "CMOS インバータ積分器を用いた 0.5V フィードフォワード型デルタ・シグマ変調器," 映像情報メディア学会技術報告 33(39), pp.87-91, 2009.

[17] Richard Schreier, Gabor C. Temes, "Understanding Delta-Sigma Data Converters," John Wiley & Aons, Canada, 2005.

[18] 和保孝夫，安田彰，"ΔΣ 型アナログ/デジタル変換器入門，" 丸善，東京，2007.

[19] D. A. Johns and K. Martin, *Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley & Aons, NewYork, New York, pp. 450-451, 1997.

[20] T. Ritoniemi, T. Karema and H. Tenhunen, "The design of stable high order 1-bit sigma-delta modulators," *Proceedings of the 1990 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 4, pp. 3267-3270, May 1990.

[21] S. Hein and A. Zakhor, "On the stability of interpolative sigma delta modulators," *Proceedings of the 1991 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 3, pp. 1621-1624, June 1991.

[22] S. Hein and A. Zakhor, "On the stability of sigma delta modulators", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 7, pp. 2322-2348, July 1993.

[23] T. Hayashi, Y. Inabe, K. Uchimura and A. Iwata, "A multistage delta-sigma modulator without double integration loop," ISSCC Digest of Technical Papers, pp. 182 - 183, February 1986.

[24] Y. Matsuya, K. Uchimura, A. Iwata, T. Kobayashi, M. Ishikawa and T. Yoshitome, "A 16-bit over sapling A-to-D conversion technology using triple-integration noise shaping," IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 22, pp. 921-929, December 1987.

[25] J.C. Candy and A. Huynh, "Double integration for digital-to-analog conversion," IEEE Transaction on Communications, vol. 34, no. 1, pp.77-81, January 1986.

[26] 美多勉，"H ∞ 制御，" 昭晃堂，東京，1994.

[27] 細江繁幸，荒井光彦，"制御系設計- H ∞ 制御とその応用，" 朝倉書店，東京，1994.

[28] 野波健蔵，西村秀和，平田光男，"MATLAB による制御系設計，" 東京電機大学出版局，東京，1998.

[29] 野波健蔵，田宏奇，"スライディングモード制御ー非線形ロバスト制御の設計理論ー，" コロナ社，東京，1994.

[30] 美多勉，陳芸峰，"スライディングモード制御とロボットアームの軌道制御，" システム制御情報，Vol,34, no.1, pp.50-55, 1990.

[31] R. Scott Erwin, Andrew G. Sparks, Dennis S. Bernstein, "Fixed-structure robust controller synthesis via decentralized static output feedback," International Journal of Robust and Nonlinear Control，8(6), pp.499-522, 1998.

[32] J.V. Burke, D. Henrion, A.S. Lewis, M.L. Overton, “HIFOO-A MATLAB package for fixed-order controller design and H infinity optimization,” IFAC Symposium on Robust Control Design, France, 2006.

[33] J. Cho, J. Choi, H. Park and Y. Kim, “Stability-improved higher order delta-sigma modulator for Hi-Fi docking audio system,” *IEEE International Conference on Consumer Electronics*, pp. 71-72, 2012.

[34] J. Choi, J. Cho and H. Park, “A delta-sigma modulator using dual NTF for 1-bit digital switching amplifier,” *Audio Engineering Society 132nd Convention*, Paper Number 8649, 2012.

[35] M. O. Hawksford, “Parallel Look-Ahead Digital SDM with Energy-Balance Binary Comparator,” *J. Audio Eng. Soc.*, Vol. 56, No. 12, pp. 1069-1089, 2008.

[36] Richard Schreier, “On the Use of Chaos to Reduce Idle-Channel Tones in Delta-Sigma Modulators”, IEEE, Vol.41, No.8, pp539-547, 1994.

[37] 沖村文靖，山崎芳男，伊藤　毅，福原康二，原田正親, “量子化雑音のスペクトル制御と平均化を併用した AD,DA 変換,”日本音響学会春季講演論文集, pp.375-376, 3 月,1989.

[38] 和田 生久真， 佐伯 勝敏，“カオス信号を用いた多ビット $\Delta\Sigma$ A/D 変換器のディザリング効果に対する検討,” 電子情報通信学会東京支部学生会研究発表会, pp127, 3 月,2012.

[39] S. Plekhanov, I.A. Shkolnikov, Y. B. Shtessel, “High Order Sigma-Delta Modulator Design via Sliding Mode Control,” Proceedings of the American Control Conference Denver, Colorado pp.897-902,June 4-6, 2003.

[40] J. Lota, M. Al-Janabi,and I. Kale, “Nonlinear-Stability Analysis of Higher Order Δ-Σ Modulators for DC and Sinusoidal Inputs,” IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, Vol. 57, No. 3, pp.530-542, March, 2008.