The module of lowerable vector fields for a multigerm

溝田, 裕介

https://doi.org/10.15017/1500520

出版情報：九州大学, 2014, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	溝田　裕介
論　文　名	The module of lowerable vector fields for a multigerm （多重写像芽に対する降下可能ベクトル場のなす加群）
論文調査委員	主　査　九州大学　教授　佐伯修 副　査　九州大学　教授　岩瀬則夫 副　査　九州大学　准教授　高田敏恵 副　査　横浜国立大学　教授　西村尚史

論文審査の結果の要旨

可微分写像の特異点論において、写像の局所的な振る舞いを調べることは重要であり、特に、ある程度良い性質を持つ写像の局所的な分類は最も重要な問題の一つである。そのため、写像や写像芽全体のなす無限次元空間が考察の対象となるが、その接空間とみなされるものが、写像に沿ったベクトル場で記述されることが知られている。一つの写像芽 f が与えられたとき、定義域上のベクトル場で、その f の微分による像が、値域上のあるベクトル場と f の合成として表されるものは降下可能であるといわれる。同様に、値域上のベクトル場で、その f との合成が、定義域上のあるベクトル場の、 f の微分による像となっているものはリフト可能であるといわれる。これらの概念は、写像芽全体のなす空間の f における接空間、 f の右左同値類のなす空間（すなわち、定義域と値域での座標変換により f に一致する写像芽全体のなす空間）の接空間を考える上で非常に重要な役割を果たす。こうした降下可能、リフト可能ベクトル場の概念そのものは、1970 年代に Arnol’d が提唱したものであるが、その後いくつかの状況において、特異写像芽の分類問題に対して本質的役割を果たしている。しかしながら、これまでこうした降下可能ベクトル場、リフト可能ベクトル場についての系統だった研究はほとんどなく、特にそれら全体のなす加群構造の研究はあまりなかった。

本学位論文では、実 C^∞級（$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき）、あるいは複素解析的（$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき）多重写像芽 f : $(\mathbf{K}^n, S) \to (\mathbf{K}^p, 0)$ に対し、それに付随する降下可能ベクトル場全体のなす加群が有限生成であるか、という非常に基本的で重要な問題を考え、特に f が左有限確定（L-有限確定）であるときに、その問題に肯定的な解答を与えている。なお、環としては写像芽 f を通した $(\mathbf{K}^p, 0)$ 上の関数環 $f^*C_{p,0}$ を考え、降下可能ベクトル場全体 $\mathrm{Lower}(f)$ は $f^*C_{p,0}$ 上の加群と考えている。本論文ではさらに、そうした有限生成加群の具体的な生成元の構成方法も同時に与えている。これらはこれまでに知られていなかった新しい結果であり、今後の特異点理論に影響を及ぼす重要な結果である。（なお、これらは西村尚史氏との共同研究の結果である。）

論文ではまず、左有限確定な多重写像芽の定義とその性質について述べられている。多重写像芽 f が与えられたとき、ある自然数 k があり、k 階までの Taylor 展開が f のそれと一致するどんな写像芽も f の左同値類に含まれるならば、左有限確定であるという。こうした有限確定性の概念は特異点理論において自然で重要なものであり、多くの研究がある。本論文ではまず、そうした事柄を整理するとともに、与えられた多重写像芽が左有限確定となる十分条件が述べられ、それを用いて具体例が数

多く挙げられている。特に、写像芽 f に付随して、値域上のベクトル場に f を合成することによって、 f に沿ったベクトル場を作る、ωf なる加群の準同型を考え、さらにその i 次項を取り出す縮約として、有限次元ベクトル空間の間の線形写像を導入し、それが全射であれば f が左有限確定であることを示している。こうした線形写像はこれまでの降下可能ベクトル場、リフト可能ベクトル場の数少ない研究の中でも効果的に用いられてきたものである。

次に、左有限確定である多重写像芽 f の拡張された右接空間と左接空間の共通部分 $TR_e(f) \cap TL_e(f)$ が $f^*C_{p,0}$ 上の加群として有限生成であることが、Mather の予備定理等を巧みに用いて証明される。この証明における巧妙な議論が本論文の最も独創的な部分である。（なお複素解析的写像芽の場合、結果自体はネーター環の性質からただちに従うが、生成元を具体的に与えることは非自明な問題である。さらに、実 C^∞ 級写像芽のときは、有限生成性でさえ非自明であることに注意する。）そして、 f が左有限確定であれば重複度有限であること、重複度有限であれば f の微分が導くベクトル場のなす加群の間の準同型写像 tf が単射となること、そして、降下可能ベクトル場全体のなす加群 $\mathrm{Lower}(f)$ の tf による像が $TR_e(f) \cap TL_e(f)$ に一致することから、$\mathrm{Lower}(f)$ が $f^*C_{p,0}$ 上の加群として有限生成であるという、本学位論文の主結果が従う。この証明は構成的であるという特長を持っており、具体的な場面で生成元を実際に構成する際に威力を発揮する。本論文ではそうした具体例も豊富に挙げられており、今回の結果の強力さを物語っている。

本論文ではさらに、多重写像芽 f が左有限確定でない場合にも、$\mathrm{Lower}(f)$ が有限生成となる具体例がいくつか挙げられており、またその生成元も与えられている。こうした例は新しいものであり、この方向で今後の進展も期待される。

なお、本研究者は西村尚史氏との別の共同研究の中で、多重カスプと呼ばれる多重写像芽に対するリフト可能ベクトル場の研究も行っているほか、多項式写像芽に対して、計算機によってリフト可能ベクトル場を具体的に求める研究も単独で行っているなど、当該分野において重要な研究を活発に行っており、今後の発展の可能性を大きく秘めていることも補足しておく。

以上のように本学位論文では、重要な多重写像芽のクラスについて、その降下可能ベクトル場のなす加群についての重要な新しい結果を証明し、さらにその具体的な生成元の計算方法を、豊富な例とともに提示している。こうした結果は、微分トポロジー、写像の特異点論、環論等において大変価値のある結果であり、将来の発展も期待できる重要な業績である。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。