The module of lowerable vector fields for a multigerm

溝田, 裕介

https://doi.org/10.15017/1500520

出版情報：九州大学, 2014, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：溝田　裕介

論 文 名　：The module of lowerable vector fields for a multigerm
(多重写像芽に対する降下可能ベクトル場のなす加群)

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

以下では特に断らない限り、写像芽は実 C^∞ 級、または複素解析的であるとする。降下可能ベクトル場および持ち上げ可能ベクトル場の概念は、1976 年に Arnol'd によって導入された。多重写像芽 f に対して、f の定義域上のベクトル場が降下可能ベクトル場であるとは、f の微分を合成することにより得られる f に沿うベクトル場が、ある値域上のベクトル場と f の合成として表される時をいう。一方、f の値域上のベクトル場が持ち上げ可能ベクトル場であるとは、f を合成することにより得られる f に沿うベクトル場が、f の微分とある定義域上のベクトル場の合成として表される時をいう。

これらのベクトル場は、様々な分類問題への応用がある。たとえば、持ち上げ可能ベクトル場に関しては、Bruce-West による Whitney の傘上のある種の関数芽の分類において用いられ、降下可能ベクトル場に関しては、Ishikawa による接線曲面に現れる特異点の分類に応用を持つ、多重写像芽の普遍オープニングの構成において用いられている。それにもかかわらず、これらのベクトル場のなす加群の構造に関する一般論はほとんど知られていない。

本論文では、「重複度有限である多重写像芽に対して、降下可能ベクトル場のなす加群は有限生成であるか」という問題に対して、「多重写像芽が左有限確定である時、降下可能ベクトル場のなす加群は有限生成である」という部分的解答を与え、さらにその証明に沿って、左有限確定多重写像芽に対する降下可能ベクトル場のなす加群の生成元の計算方法を具体例を通して説明する。左有限確定性の確認は基本的には難しいが、本論文ではある方法を使って左有限確定である多重写像芽の例も与える。また左有限確定でない多重写像芽に対しても、降下可能ベクトル場のなす加群の生成元が具体的に計算できる場合があることを紹介する。

以下、各章の内容を説明する。

2 章では、本論文で必要となる定義や結果等をまとめる。多重写像芽 f、右左同値、関数芽全体のなす多元環、f の重複度 $\delta(f)$、多重写像芽を通した加群構造、準備定理、f に沿うベクトル場、f の拡張された右接空間および左接空間、持ち上げ可能ベクトル場、降下可能ベクトル場、左有限確定な多重写像芽などの概念について、簡単な例を挙げながら説明する。

写像 tf は、f の定義域上のベクトル場全体のなす集合から、f に沿うベクトル場全体のなす集合への写像で、定義域上のベクトル場に対して、f の微分とそのベクトル場の合成により得られる f に沿うベクトル場を対応させるものとして定義される。f の拡張された右接空間は、写像 tf による f の定義域上のベクトル場全体のなす集合の像として定義される。

一方、写像 ωf は、f の値域上のベクトル場全体のなす集合から、f に沿うベクトル場全体のなす集合への写像で、値域上のベクトル場に対して、そのベクトル場と f の合成により得られる f に

沿うベクトル場を対応させるものとして定義される。f の拡張された左接空間は、写像 ωf による f の値域上のベクトル場全体のなす集合の像として定義される。

多重写像芽 f の左有限確定性は、f の拡張された左接空間を使って定義される。しかし、f の拡張された左接空間は非常に計算しにくいものであり、実際に左有限確定性の確認を行うには準備定理を使った議論が必要になる。そこで、左有限確定な多重写像芽の例については 3 章で与える。

3 章では、多重写像芽 f と非負整数 i に対して、写像 ωf の i 次縮約版が定義される。この写像 ωf の i 次縮約版が全射となるときに、多重写像芽 f は左有限確定になることが証明される。この証明の鍵となるのは準備定理である。その後、写像 ωf の 0 次縮約版が全射になるような多重写像芽 f は非特異な単一写像芽となることが示される。また、写像 ωf の 1 次縮約版が全射となる単一曲線芽 f は、Bruce-Gaffney-du Plessis による左同値の代数的判定法を用いることにより、左同値により完全に分類されることがわかる。実 C^∞ 級の場合、この分類は Nishimura による n 次元球面内の非特異曲線から生成される垂足曲線の特異点の分類と一致しており、この事実自体は Nishimura により言及はされているものの正確な証明は与えられておらず、本論文で初めて正確な証明が与えられたことになる。その他、写像 ωf のより高次の縮約版が全射になる例や、余階数 2 で左有限確定となる例も与える。

4 章では、本学位論文の主題である降下可能ベクトル場に関する結果を述べる。この章の内容は西村氏との共同研究に基づく。

初めに、「重複度有限である多重写像芽に対して、降下可能ベクトル場のなす加群は有限生成であるか」という問題を提起する。この問題は、重複度が有限であれば写像 tf が単射となることを使って、「 f の拡張された右接空間と f の拡張された左接空間の交わりが有限生成であるか」という問題に言い換えられる。複素解析的な場合においては、複素解析的関数芽全体のなす環が Noether 環になるという有名な事実から、f の拡張された右接空間と f の拡張された左接空間の交わりが有限生成であることは明らかである。しかし、実 C^∞ 級の場合は全く自明ではない。この問題への部分的解答として、「多重写像芽 f が左有限確定であるときは、f の拡張された右接空間と f の拡張された左接空間の交わりが有限生成となる」ことを主定理として述べる。この定理は、実 C^∞ 級の場合、複素解析的の場合どちらでも通用する、準備定理、左有限確定性を使った議論により証明される。この証明の議論をたどることによって、あるベクトル空間の基底を求めることができれば生成元を具体的に構成できることもわかる。

左有限確定な多重写像芽は必ず重複度が有限となるので、この定理の系として、「左有限確定な多重写像芽に対する降下可能ベクトル場のなす加群は有限生成である」ということが示されたことになり、これは最初に与えられた問題への部分的解答となる。さらに、降下可能ベクトル場のなす加群の生成元も原理的には構成可能である。実際に、いくつかの左有限確定な多重写像芽に対して降下可能ベクトル場のなす加群の生成元の具体的構成を行う。

5 章では、左有限確定とは限らない多重写像芽に対し、降下可能ベクトル場のなす加群の生成元を具体的に計算できる例をいくつか紹介する。

6 章では、今後の研究課題が述べられる。

今回の結果により、今まで得られていなかった降下可能ベクトル場の一般論がかなり満足のいく形で与えられたことになる。今回のアプローチは、持ち上げ可能ベクトル場の一般論の展開にも繋がるであろう。また、降下可能ベクトル場の理論の発展により、Ishikawa によるオープニングの理論のさらなる発展も期待される。以上のことから、本学位論文の結果は今後の特異点の分類理論の発展へ大きく寄与していくことが期待される。