

# Adelic Cohomology Groups for Arithmetic Varieties and Ind-Pro Topology in Dimension Two

菅原, 弘太郎

<https://doi.org/10.15017/1500519>

---

出版情報 : 九州大学, 2014, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	菅原 弘太郎
論 文 名	Adelic Cohomology Groups for Arithmetic Varieties and Ind-Pro Topology in Dimension Two (算術的多様体に対するアデリック コホモロジー群と 2 次元算術的アデール環の Ind-Pro 位相)
論文調査委員	主 査 九州大学 教授 翁 林 副 査 佐賀大学 教授 市川 尚志 副 査 熊本大学 教授 加藤 文元

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

<背景> アデール環, もしくはより一般にアデリック群とは代数的多様体上の各点の情報を含むアーベル群である. すなわち, これらアデリック群は各点の形式的近傍上で定義される函数を含む代数的構造を持っている.

アデールの起源は Chevalley が類体論の道具として導入したイデール群である. Weil はこのイデール群を乗法群に持つような環を各代数的曲線上で定義した. これがアデール環と呼ばれるものである. Weil はこのアデール環の部分群や商群を使って代数的曲線上の Riemann-Roch の定理を記述し, 証明を行った. このとき導入された部分群や商群がアデリック コホモロジー群と呼ばれるものである.

Parshin や Beilinson はより高次元の多様体上でもアデリック コホモロジー群を構成した. このアデリック コホモロジー群は関連する層のコホモロジー群と一致することが示されている.

アデリックなアプローチを用いる理論には関連するアデリック群が持つ位相群構造が重要な役割を果たしていることも多い. 例えば, Tate の学位論文の中アデリック群を用いて定義されるゼータ函数や, アデリック代数群に付随する玉河数は関連する位相群構造の中で定義される測度を用いて計算される.

一方で算術的多様体に対するアデリックなアプローチも行われている.

Weng (翁) は算術的曲線に対するアデリック コホモロジー理論を発展させると共に算術的曲線上の Riemann-Roch の定理を算術的曲線上のアデリック コホモロジー群を使って記述し, 証明を行った.

また Osipov-Parshin らは各算術的曲面上でアデール環を構成している.

<目的> 本文の目的は一般の算術的多様体上の各準連接層に対しアデリック群やアデリック コホモロジー群を構成し, 構成されたアデリック コホモロジー群の諸性質を研究することであり, 加えて, アデリック コホモロジー群の諸性質を調べるために, アデリック群が持つ位相群構造に関する研究を発展させることである.

<結果> 本論文は Parshin, Beilinson, Weng, Osipov-Parshin らの研究に動機づけられて, 算術的多様体上の各準連接層に対しアデリック群やアデリック コホモロジー群を構成した, 零次元間のアデリック コホモロジー群しか存在しないことも証明した.

アデリック群の構成はアーベル群の射影的極限(Projective limit)と帰納的極限(Inductive limit)の繰り返しによって得られる。そのためアデリック群は Ind-Pro 構造を持っている。この Ind-Pro 構造により、本論文は各算術的多様体に付随するアデール環に Ind-Pro 位相を入れることでアデール環を位相群にすることができる。特に本論文は算術的曲面上のアデール環がこの位相群構造に関して自己双対性を持っていることを示した。

本論文はアデール環が Hausdorff, complete, compact oriented な性質を持っていることを示した。

また、本論文は算術的曲面上の留数理論を用いて算術的曲面上のアデール環に対し留数ペアリングを導入した。この留数ペアリングはアデール環が自己双対性を持っていることにより完全ペアリングとなっている。

本論文は算術的曲面上のアデール環に対する完全ペアリングを用いることで算術的曲面上の可逆層に付随するアデリック コホモロジー群が双対性を持っていることを示した。これは代数的曲面上の可逆層に付随するコホモロジー群が持つ Serre 双対性のアナロジーとなっている。

アデリック群の特別な場合として 01 型, 02 型, 12 型のアデリック群を導入したが、これらが留数ペアリングに対してある双対性を持っていることも示している。ここで 01 型は曲面と曲線に関連する点の情報を含むアデリック群であり、02 型は曲面と閉点に関連する点の情報を含むアデリック群であり、そして 12 型は曲線と閉点に関連する点の情報を含むアデリック群である。

アデリック コホモロジー群はこれらのアデリック群を用いて記述されることから、本論文はアデリック コホモロジー群の双対性が成り立つことを 01 型, 02 型, 12 型アデリック群の双対性を用いて証明している。

簡潔に述べると、本論文では以下 2 点の結果が得られた。

1 点目は、算術的多様体上の各準連接層に対するアデリック群やアデリック コホモロジー群を導入した。

2 点目は、Ind-Pro 位相分野における 2 次元の理論を完成させた。応用として、算術曲面上のアデリック コホモロジー群の双対理論を満たすことを証明した。さらに、高次元への展開に明確な道筋を立てることを可能とさせた。

これらの仕事は共著しているとはいえ、数論幾何分野における基礎的な構成と理論を作り上げている。本論文は数論幾何の分野においては優れた業績であると認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。