

On the cohomological coprimality of Galois representations

ディマバヤオ, ジェローム トマガン

<https://doi.org/10.15017/1500518>

出版情報：九州大学, 2014, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

氏 名	ディマバヤオ ジェローム トマガン		
論 文 名	On the cohomological coprimality of Galois representations (コホモロジー的に互いに素なガロワ表現について)		
論文調査委員	主 査	九州大学	准教授 田口 雄一郎
	副 査	慶應義塾大学	教授 栗原 将人
	副 査	九州大学	教授 金子 昌信
	副 査	九州大学	教授 森下 昌紀

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文に於いて Dimabayao 氏は Coates-Sujatha-Wintenberger の所謂 vanishing cohomology modules についての結果を大幅に一般化すると同時に、その研究の過程で自然に二つのガロワ表現が「コホモロジー的に互いに素 (cohomologically coprime)」であるという概念に到達し、幾つかの典型的なガロワ表現の組についてこの性質が成り立つ事を証明している。

Coates-Sujatha-Wintenberger は岩澤理論に於けるセルマー群等のガロワ表現のオイラー標数を計算する目的で、 p 進体 K の p 進表現 V について、多くの場合にそのガロワコホモロジーが消滅する事を示した。これは特に K 及びその p^∞ 分拡大体のガロワコホモロジーについての結果である。近年の非可換岩澤理論の発展に鑑るに、この様な結果をより大きな p 進リー拡大体 L 上で証明するのは重要な研究課題である。Dimabayao 氏はこの問題に取り組み、特に V が K 上の固有一款滑らかな代数多様体 X の p 進エタールコホモロジー群であり、 L が別の多様体 Y の p 進エタールコホモロジー群へのガロワ作用から得られる p 進リー拡大であるときにガロワコホモロジーの消滅を研究した。その結果、 X と Y とが「性格の異なる多様体」である様な多くの場合、例えば、 X が Bloch-加藤の意味の通常還元を持つ固有一款滑らかな多様体で Y が超特異還元を持つ楕円曲線である場合、等に実際にコホモロジーの消滅を証明している。また、 V が通常型潜クリスタリン表現で適切な条件を満たすものであり L/K の剰余次数が殆ど p と素な場合にも同様の消滅を証明している。これらの結果は Coates-Sujatha-Wintenberger の先行結果を大幅に一般化する大変有意義なものである。さらにこの結果の応用として、基礎体が代数体の場合にも同様の消滅定理を示している。

上の様な結果はしばしば X と Y の役割を交換しても成り立つ、即ち、 Y から来るガロワ表現の、 X から生じる p 進リー拡大体上でのガロワコホモロジーの消滅も成り立つ。対称性に注目し、この様な場合に二つのガロワ表現は コホモロジー的に互いに素 であると言う。本論文ではこの概念が一般の位相群の一般の位相可換環上の二つの連続線型表現 (それらの係数環は異なってもよい) に対して定義されている。Dimabayao 氏は、上の様に、多様体 X, Y が「性格の異なる多様体」である多くの場合に、それらから生じる p 進ガロワ表現がコホモロジー的に互いに素である事を証明している。また、基礎体が代数体の場合には ($X=Y$ であっても) 表現の係数体の位相が異なれば (例えば p 進と q 進で $p \neq q$) コホモロジー的相互素性が成り立つ、という方向の結果も示している。その証明は Serre や Illusie の l 進コホモロジー上のガロワ表現の独立性についての結果を用いるものであり、「表現の族の独立性」について新たな視点から光を投じるものとなっている。

さらに Dimabayao 氏は、代数多様体 X, Y が楕円曲線である場合に詳細な研究を行い、興味深い結

果を得ている。即ち、基礎体 K が p 進体である場合に、楕円曲線 X, Y の p 進 Tate 加群として生じるガロワ表現がいつコホモロジー的に互いに素になるかを、 X, Y の還元型によって場合分けして調べている。実はこの結果の 0 次コホモロジー版は既に小関祥康氏によって数年前に得られており、今回の結果は同様の結論が高次コホモロジーについても成り立つ、という大変興味深いものとなっている。

代数体 K 上の二つの楕円曲線 X, Y の場合にはさらに興味深い結果が得られている。即ち Dimabayao 氏は、次の三つの条件が同値である事を証明した（ここで S, T は素数の集合、 $V_S(X)$ 等は X に伴う S 進 Tate 加群）：(i) X と Y とは K の代数閉包上同種でない、(ii) 任意の S, T に対し $V_S(X)$ と $V_T(Y)$ とはコホモロジー的に互いに素、(iii) 或る素数 p に対し $V_p(X)$ と $V_p(Y)$ とはコホモロジー的に互いに素。この結果は Faltings（楕円曲線の場合は Serre）の「同種定理」と形の上で酷似しており、「 p 進表現の族の独立性」に関する新たな概念を提供するものとなっている。

以上の結果は、それ自体重要なものであるに留まらず、局所体及び大域体のガロワ表現の研究の新しい方向性と可能性を示すものであり、数論の分野に於いて価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。