

Uniqueness and stability for double crystals

新川, 恵理子

<https://doi.org/10.15017/1500517>

出版情報 : 九州大学, 2014, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	新川 恵理子		
論 文 名	Uniqueness and stability for double crystals (ダブルクリスタルの一意性と安定性)		
論文調査委員	主 査 九州大学	教授	小磯 深幸
	副 査 九州大学	教授	勝田 篤
	副 査 九州大学	准教授	大津 幸男

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の研究課題は、 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間において、区分的に滑らかな境界で囲まれ与えられた $(n+1)$ 次元体積を持つコンパクトで連結な二つの $(n+1)$ 次元多様体が接している時、それらの境界の非等方的エネルギーの総和を極小にする形状を決定するという問題である。本論文では、より一般に、このような非等方的エネルギーの総和の臨界点をダブルクリスタルと呼び、ダブルクリスタルを研究する問題をダブルクリスタル問題と呼んでいる。エネルギーが等方、即ち、境界の n 次元体積の場合は、ダブルクリスタルは二つのシャボン玉が接している時の形状の数理モデルを与えており（ダブルバブルと呼ばれている）、互いに120度の角を成す3つの球面帽子（標準球面の部分集合）の和集合がエネルギー最小解である（Hutchings-Morgan-Ritore-Ros、2002年）。本研究課題はこの問題の拡張であり、非等方性を持つ二つの結晶が接している場合の数理モデルを与えている。このような多結晶の形状は、数学や物理学においてまだ解明されておらず、鉄を始めとする結晶への応用という観点からもその解析が熱望されている。本論文では、主として変分法を用いることにより、エネルギーの臨界点が満たすべき幾何学的条件、及び、臨界点がエネルギー極小であるための解析的条件を求め、特に $n=1$ でエネルギー密度関数がある種の対称性を持つ例については臨界点の対称性及びエネルギー極小であるか否かを解析した。ダブルクリスタルに関する先行研究としては、Frank Morgan 他による平面図形を扱った研究があるだけであり、変分法的な先行研究は皆無である。したがって、本研究は、ダブルクリスタルの研究として先駆的なものであるとすることができる。以下に、本論文の各章の内容の概要を記す。

第1章では、研究の背景及び概要が述べられている。 γ を n 次元単位球面上の正值関数とする。 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間内の滑らかな超曲面 M に沿う単位法ベクトル場を N とする。 M 上での $\gamma(N)$ の積分を M の非等方的エネルギーと呼び、 γ を非等方的エネルギー密度関数と呼ぶ。同じ $(n+1)$ 次元体積を囲む閉超曲面の中で非等方的エネルギーを最小にするものがただ一つ存在することが知られており、ウルフ図形と呼ばれている。エネルギーが等方の場合、即ち γ が定数の場合は、ウルフ図形は通常の等周問題の解であり、標準球面である。

第2章、第3章では、ウルフ図形が滑らかな狭義凸閉超曲面となる場合が扱われている。

第2章では、 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間内の超曲面に対する非等方的エネルギーと非等方的平均曲率についての基本事項が述べられた後に、特に $n=1$ の場合は非等方的平均曲率一定曲線は直線とウルフ図形に限ることが証明されている。この結果は、第3章において、平面内のダブルクリスタルの例を研

究する際に用いられる。さらに、ダブルクリスタル問題の定式化が行われている。

第3章では、ダブルクリスタル問題に対する第1変分公式が導かれ、超曲面がダブルクリスタルとなるための必要十分条件が求められている。さらに、ダブルクリスタルに対する非等方的エネルギーの第2変分公式が導かれている。これは、ダブルクリスタルの安定性（非等方的エネルギーの極小解となっているか否か）を研究するために必要である。次に、 $n=1$ 、即ち、平面内のダブルクリスタル問題に課題を制限し、エネルギー密度関数として、特別な例を与えている。これは、ウルフ図形が「滑らかな正方形」になるようなエネルギー密度関数である。ここで、先行研究との著しい相違が現れる。すなわち、Morgan 他(1998)はウルフ図形が正方形の場合を扱っており、ダブルバブルの場合はウルフ図形が円である。本論文で扱われているウルフ図形が「滑らかな正方形」である場合は、ウルフ図形が円の場合よりもダブルクリスタル達の種類がより豊富である。たとえば、二つの与えられた面積に対して、それらを囲むダブルバブルは一つしか存在しないが、ウルフ図形が「滑らかな正方形」になるようなエネルギー密度関数に対するダブルクリスタルが3つ存在する場合がある。また、Morgan 達によるウルフ図形が正方形の場合についての研究ではエネルギー最小解のみしか扱われなかったのに対し、本論文の方法ではエネルギー極小解や不安定解をも扱うことが可能であり、やはりより豊富なダブルクリスタル達が現れる。本論文では、これらの豊富なダブルクリスタル達の形状が対称性を用いることにより分類される。対称性に着目したということは優れたアイデアである。さらに、各々のダブルクリスタルについて安定か否かが、幾何学的な考察を用いることにより研究されている。いくつかのダブルクリスタルについては不安定であることが証明され、また、いくつかのダブルクリスタルについては安定であることが予想されている。ここで、二つの与えられた面積に対し、二つの安定なダブルクリスタルと一つの不安定なダブルクリスタルが存在する可能性が予想されているが、今後、これを踏まえて不安定解から安定解への変形のあり方が解析されればより一層興味深い研究として発展するであろう。この章では、さらに、いくつかの特別なエネルギー密度関数に対する非等方的平均曲率一定曲線の形状が考察されている。

第4章では「ウルフ図形がなめらか」という仮定をはずし、第3章とは異なる方法でダブルクリスタル問題が研究されている。Morgan 達による平面図形についての研究を3次元ユークリッド空間内の図形に拡張したものである。滑らかでない点を扱うために、通常の方法ベクトルを拡張した概念が定義されている。ウルフ図形が立方体となるような非等方的エネルギー密度関数に対しては、いくつかの付加的仮定のもとではあるが、非等方的エネルギー最小なダブルクリスタルの形状が決定されている。

以上の結果は、特異点を持つ多様体に対する変分問題や多結晶の数理モデルについての研究において先駆的なものであり、これらの分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。