

Kaneko-Zagier type differential equation for Jacobi forms

喜友名, 朝也

<https://doi.org/10.15017/1500516>

出版情報 : 九州大学, 2014, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	喜友名 朝也			
論 文 名	Kaneko-Zagier type differential equation for Jacobi forms (ヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式に関する研究)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	金子昌信
	副 査	大阪大学	名誉教授	伊吹山知義
	副 査	東京理科大学	准教授	青木宏樹
	副 査	九州大学	准教授	権寧魯

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Kaneko-Zagier (1998)は超特異楕円曲線の j -不変量の研究において、一変数楕円モジュラー形式に対するある 2 階の線型微分方程式 (以下 KZ-方程式) を導入した。これは、解空間が $SL(2, Z)$ の作用で閉じているという性質で本質的に特徴付けられる、重さをパラメータとする微分方程式である。その後、Kaneko-Koike は一連の研究で、この微分方程式のモジュラー、および準モジュラー解について詳細な研究を行い、(準)モジュラー解のすべてと思われる解を具体的に記述した。またこの微分方程式は二次元共形場理論の分類などにも現れ、その 3 階の一般化が、頂点作用素代数との関わりの中で Kaneko-Nagatomo-Sakai によって研究されているほか、最近では Guerzhoy によって KZ 方程式の「混合擬モジュラー」解が発見され、新しい展開を見せている。

本学位論文は、その KZ 方程式の類似物を、二変数モジュラー形式である Jacobi 形式に対して導出し、その解を具体的に記述するものである。申請者はまず、Jacobi 形式に対する Ramanujan-Serre 微分作用素の類似をもちいて、重さが適当な合同条件を満たすときの Jacobi 形式 ($SL(2, Z)$ でインデックス 1) の空間の線型変換を、その空間上に働く 4 階の微分作用素として定義、その固有値問題として微分方程式を導出する。一変数の場合は 2 階線型常微分方程式であるが、Jacobi 形式の場合は、上半平面上の変数について 2 階、複素変数について 4 階の線型変分方程式となる。申請者はこの微分方程式の解空間が Jacobi 群の作用で不変であること、そうしてその条件 (といくつかの付帯条件) で本質的にこの微分方程式が特徴付けられることを示した。これはこの微分方程式がある種標準的なものであることを示しており、一変数の場合に超特異楕円曲線、共形場理論の分類や特殊な型の準モジュラー形式 (extremal quasimodular form) など様々な対象と結びついたことを考えると、Jacobi 形式の場合にも何か関係する良い対象があると考えるのが自然ではないかとの推測を裏付ける結果になっている。

そうして申請者は、重さパラメータが $\text{mod } 6$ である合同条件を満たす整数であるときに、導出した微分方程式の解を具体的に構成する。それは漸化的に決まる四つの多項式列によって記述される Jacobi 形式である。構成した Jacobi 形式が解であることを証明するのに、解の漸化的な構造と、伊吹山知義氏による、(Jacobi 形式と一変数モジュラー形式から新しい Jacobi 形式を構成する) Rankin-Cohen 型微分作用素を用いる。またこの解は超幾何級数と密接な関係を持ち、上述の多項式列を決める漸化式の係数は Gauss による超幾何級数の比の連分数展開に現れる数列によって記述される。

さらに申請者はインデックスが一般の場合にも同様の微分方程式を導入し (群は $SL(2, Z)$)、テータ関数を用いて解と目される関数を表示することにより、申請者が導いた Jacobi 形式に対する微分方程式と、もともとの KZ 方程式との間に非常にきれいな関係があることを発見、証明した。その結果は、本論文の二変数偏微分方程式と一変数モジュラー形式に対する KZ 微分方程式、および古典的な偏微分方程式である熱方程式の間に密接な関係があることを示しており、今後のさらなる研究が望まれるところである。

本論文で得られた成果は、一変数の KZ 方程式を多変数保形形式に拡張する初めての試みであり、類似の理論が Siegel モジュラー形式など他の多変数保型形式に対しても存在する可能性を示唆した点でも意義深い。Guerzhoy 氏の研究のように、新しい型の保型形式が解として現れることが示されれば更に興味深い進展が得られると期待される。

本論文の前半の結果は既に英文学術雑誌に公表済みであり、後半部分は現在論文としてまとめているところである。申請者は他にも、参考論文として、修士論文での研究を発展させた、(特定のサイズ、レベルの) Siegel モジュラー形式の空間の構造を決定する研究を行っており、これも既に公表されている。

これらの研究結果は整数論、とくにモジュラー形式の分野において価値あるすぐれた業績と認められる。よって本研究者は博士(数理学)の学位を授与される資格があるものと認める。