

Kaneko-Zagier type differential equation for Jacobi forms

喜友名, 朝也

<https://doi.org/10.15017/1500516>

出版情報 : 九州大学, 2014, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名 : 喜友名 朝也

論 文 名 : Kaneko-Zagier type differential equation for Jacobi forms
(ヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式に関する研究)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

一変数(楕円)保型形式に対する金子・ザギエ型(保型)微分方程式とは、1998年に金子昌信氏とドン・ザギエ氏によって導入された二階同次線形常微分方程式のことである。この微分方程式の重さ $p-1$ (p は 5 以上の奇素数) の保型形式解は、超特異楕円曲線の j 不変量を根にもつ有限体 F_p 上の多項式と密接に関係している。そしてこの微分方程式の保型形式解や準保型形式解の研究が金子氏や小池正夫氏などを中心に行われていたが、近年この微分方程式が整数論だけでなく数理論(共形場理論)とも関係があることがわかり、大きく研究が進展した。最近の研究成果の中で特に興味深い成果は、ハワイ大学のギェルツォイ氏により証明された「一変数保型形式に対する金子・ザギエ型保型微分方程式は、保型形式や準保型形式だけでなく、モック型保型形式と呼ばれる新しい一変数保型形式を解にもつ」という事実である。

金子氏とザギエ氏の研究以降、様々な種類の金子・ザギエ型微分方程式(例えば低いレベルの合同部分群に関する保型形式に対するもの)が考えられ研究が行われてきた。しかし、これまでの先行研究で扱われていた保型微分方程式は全て一変数保型形式に対するものであって、多変数保型形式に対する保型微分方程式の研究は全く行われていなかった。

本学位論文の主題は、二変数保型形式であるヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式を導出し、一変数保型微分方程式と同様の研究(微分方程式がもつ定性的な性質や保型形式解を調べる)を行うことである。

本論文は全部で 5 つの節からなり、数学的内容は第 2 節から始まる。各章の内容は以下の通りである。

第 2 節と第 3 節は、一変数保型形式と一変数保型微分方程式の理論の復習である。第 2 節で一変数保型形式の定義や本論文で必要となる保型形式を述べる。次に、金子氏とザギエ氏による保型形式の重さを 2 上げるラマヌジャン・セール微分作用素を用いた手法で、一変数保型形式に対する金子・ザギエ型微分方程式を導出する(第 3.1 節)。そして、導出した微分方程式に関する結果を、金子氏や小池氏による保型形式解や準保型形式解に関する結果を中心に紹介する(第 3.2 節)。

第 4 節、第 5 節ではヤコビ形式を扱う。第 4 節でヤコビ形式の理論を復習する。第 5 節が本論文の主題であるヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式に関する結果を纏めた節である。第 5 節の内容を詳しく説明する。

第 5.1 節では、指数 1 のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式を研究する。まず第 5.1.1 節で、指数 1 のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式を第 3.2 節で説明した金子氏とザギエ氏による手法を用いて導出する。しかしそのためには、ラマヌジャン・セール微分作用素に相当するヤコビ形式の微分作用素が必要である。そこで本論文では、リヒター氏によるヤコビ形式の重

さを 2 上げて指数を保つ指数 1 の（修正された）熱作用素を利用した。このようにして得られた金子・ザギエ型微分方程式は四階同次線形偏微分方程式であり、一変数の場合と類似した次の著しい性質 A、B をもつ：

A：金子・ザギエ型微分方程式の解空間がヤコビ群の作用で閉じている（解空間の保型性）。

B：上半平面上の正則関数を係数にもつ四階同次線形偏微分方程式で、自然な二つの条件（解空間の保型性と「微分方程式の係数である正則関数が全て $SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ $i\infty$ で有界である」こと）を満たすものは、本質的には我々の金子・ザギエ型微分方程式しかない（微分方程式の特徴付け）。

本論文の主結果は、重さが 6 を法として 4 である指数 1 のヤコビ形式の関数列で、金子・ザギエ型微分方程式の解となっているものを構成できたことである（第 5.1.2 節）。しかもその関数列は、ヤコビ・アイゼンシュタイン級数 $E_{\{4,1\}}$ と $E_{\{6,1\}}$ 、一変数のアイゼンシュタイン級数 E_4 と E_6 、ラマヌジャンのデルタ関数 Δ 、クラインの保型関数 j と三項間漸化式で定義される四つの多項式を用いて明示的に表示することができる。その証明には、構成したヤコビ形式解がもつ漸化的性質と伊吹山知義氏による（ヤコビ形式と一変数保型形式から新しいヤコビ形式を構成する）ランキン・コーエン型微分作用素を用いる（第 5.1.3 節と第 5.1.4 節）。

第 5 節の残りの 2 節で、一般の指数のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式を考察する。

まず第 5.2 節で一般指数の熱作用素を用いて、金子・ザギエ型微分方程式を導出する。この微分方程式は、第 5.1 節で扱った指数 1 の場合の金子・ザギエ型微分方程式を含む形をしており、さらに上記で述べた二つの性質 A、B も成り立っている。そして第 5.3 節で、一般指数のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式、金子氏とザギエ氏が求めた一変数保型形式に対する金子・ザギエ型微分方程式と古典的な偏微分方程式である熱方程式の間に密接な関係があることを示し、この関係と第 3.2 節で述べた金子氏と小池氏の結果を組み合わせ、次の二つの結果 I、II を証明する：

I：重さが 3 を法として 1 である一般指数のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式は必ず Fourier 級数解をもつ。

II：上半平面上の一変数正則関数を係数とするテータ関数の一次結合が一般指数のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式の解であることとテータ級数の係数である一変数正則関数が全て一変数保型形式に対する金子・ザギエ型微分方程式の解であることは必要十分である。

本論文の結果は、多変数保型形式の中で最も簡単な場合であるヤコビ形式に関するものであるが、一変数保型形式に対する保型微分方程式と類似した理論が多変数保型形式に対しても存在する可能性を示唆した初めての論文である。従って、将来ジューゲル保型形式や直行群上の保型形式などの様々な多変数保型形式に対して保型微分方程式の研究が行われる際にモデルとなる研究である。また、上記で述べたギュルツォイ氏の結果のように、新しい保型形式、例えばザギエ氏などが最近盛んに研究しているモック型ヤコビ形式が、本論文のヤコビ形式に対する金子・ザギエ型微分方程式の解として現れたとしても不思議ではなく、もし現れた場合、多変数保型形式研究において保型微分方程式が有益であることの何よりの証拠になると思われる。以上の理由により、本論文の結果が今後の保型形式研究の進展に果たした役割は少なくないと考えられる。