A Study on 2D Shape Interpolation Using Affine Maps

松下，昂平

https://doi.org/10.15017/1500513

出版情報：九州大学，2014，博士（機能数理学），課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：　松下昂平

論 文 名　：　A Study on 2D Shape Interpolation Using Affine Maps
（アフィン変換を用いた 2 次元形状補間に関する研究）

区　　分　：　甲

論　文　内　容　の　要　旨

コンピューターグラフィックス（CG）において，形状補間技術は広く用いられている．補間技術の中でも，Alexa らが提案した As-Rigid-As Possible Shape Interpolation (ARAP) と呼ばれる，剛性を保持するような補間を構成するアルゴリズムが知られており，その特性からキャラクターアニメーションに適していることから，様々な応用手法が提案されている．これらの映像表現の数学的特徴づけと，実装する際の計算効率や作り手の意図をより的確に反映できるような扱いやすい数学モデルを構築することが重要な問題であると思われる．具体的には，既存の補間手法を解析・シミュレーションすることで優れた補間手法であるための条件を数学的に定義することが目標の１つである．それらの定義を満たしつつ，かつ実用上（例えば計算速度）においても利用できるような補間手法を提案するための研究も行っている．

第１章では 2 次元形状補間の“良さ”についての考察を行っている．形状補間に関しては多くの補間手法が存在しているが，その補間の良さに関して数学的な議論があまりされていない．そこで補間の“良さ”に対して，面積変化とノルム変化の観点から定義を与え，各補間手法に対して良い補間を満たすような条件式を定義から与えた．ARAP を用いた補間では局所補間と大域補間の 2 つのステップに分かれている．入力データとして，三角形分割された初期状態と目的状態の 2 つの形状データが与えられている．出力として，初期状態と目的状態の間を滑らかに補間するような形状データを生成する．局所補間では，各三角形メッシュを独立に補間する．次に大域補間を局所補間のエネルギーの合成から定義されるエネルギー関数の最小化問題を解くことにより定義する．局所補間に関して，面積変化とノルム変化の 2 つの観点から“良い”補間の定義を与えた．面積変化に関して，アフィン変換Aによって三角形Pから三角形Qに変形する場合，PとQから定まる変換行列の行列式の値の変化に着目した．ここでどのような面積の変化が望ましいのかを考えると，面積が単調に変化することが望ましい．したがって$\det A(t)$が常に正で単調に変化するときに，$A(t)$は面積変化が良い補間と呼ぶことにする．また，三角形の重心と各頂点の距離が時間tに関して単調に変化すれば，これも良い補間と考えることができる．これは任意のS^1上の点vに対して$||A(t)v||$が単調に変化することを示せば良い．ここでは，与えられた初期状態と目的状態の形状を補間が良い補間であるための条件式を具体的に求め，既存の補間手法の差異を明らかにした．既存手法として知られている線形補間，特異値分解（SVD）を用いた補間，極分解を用いた補間の比較を行った．結果として，SVD を用いた補間と極分解を用いた補間について，面積変化に関する定義における良い補間であるための条件は同値であることを示した．また，ノルム変化に関する定義について，SVD を用いた補間より極分解を用いた補間が優れていることを例を用いて示した．大域補間では，仮に一つの局所補間しか行わない場合，局所補間の原点として初期状態の重心を選択している．一方で，便宜

上大域補間のエネルギー関数式内では各局所補間をすべて同じ原点に取っている．ここで問題となるのは，原点の取り方にとって異なる補間結果を引き起こすのではないのかという問題である．ARAP の手法のなかでそのための条件を明らかにしたい．そこで，2 つの三角形メッシュからなる簡単な形状について，原点を 0 にした場合と原点を 0 以外にした場合のエネルギー関数の最小値を考察行っている．そのとき，原点が 0 の場合と一致する原点の軌跡は 2 次曲線となることを示した．このことは原点の取り方によって補間結果が異なることを示している．

第 2 章では 2 次元の形状補間の高速化手法について考察を行っている．ARAP 手法に関して，2013 年に鍛冶らが行列の指数関数を用いてより効率的なアルゴリズムを提案した．その他にも行列の指数関数は CG の応用として広く用いられている．そこで，行列の指数関数の高速化手法を提案した．一般の$n \times n$行列の指数関数の計算について多くのアプローチが存在している．例えば，Moler と Van Loan らの指数関数の計算手法がある．一方，CG において，特に 3×3 行列が用いられていることが多いので，我々はアフィン変換で用いられている 3×3 実行列の指数関数計算に限定して高速化の考察を行った．本論文ではスペクトル分解を用いた手法を 3×3 実対称行列という特別な場合に限定することで高速化を達成することができたので紹介する．2 次元形状補間では，3×3 回転行列と 3×3 実対称行列の指数関数の計算が必要である．回転行列の指数関数計算については，Rodrigues の手法を用いることとし，本論文では，3×3 実対称行列の指数関数計算の高速化を主に考察した．我々の提案手法は与えられた行列に対して固有値を計算するだけでよく，固有ベクトルを計算する必要がない．対角化を用いた手法では固有値に加えて固有ベクトルを計算する必要があり，提案手法のほうが効率的に指数関数を計算することができる．さらに固有値の計算の高速化の考察を行った．一般に，固有値の計算は固有多項式を解くことで求めることができる．固有値を Viète の公式を用いることで，トレースや行列式，フロベニウスノルムを用いた具体的な演算数の少ない数式で表せることを示す．そして，提案手法について指数関数と固有値の計算を C++言語の関数として実装し，計算速度の比較を行った．さらに，この実装を実際のデフォメーションツール組み込み，与えられたモデルの変形に関する提案手法の計算速度を評価した．固有値の計算速度は QR アルゴリズムより約 3.2 倍の高速化となった．次に，行列の指数関数計算において，提案手法が対角化を用いた手法に比べて約 4.2 倍の高速化を達成した．最後に，Cage-based deformer と呼ばれるデフォメーションツールに組み込んで，与えられたモデルに対して，モデルが変形するのに必要な時間を評価した．その結果，平均実行時間は対角化を用いた手法と比べて約 1.2 倍の高速化となった．