

毎木調査による材積の誤差について(第1報)：理論

高田, 和彦

<https://doi.org/10.15017/14963>

出版情報：九州大学農学部演習林報告. 24, pp.85-97, 1955-01-10. 九州大学農学部附属演習林
バージョン：
権利関係：



毎木調査による材積の誤差について

第 1 報 理 論

高 田 和 彦

Kazuhiko TAKATA: On the Error of Volume
by Every Tree Measurement

(I) Theory

目 次

I 緒 論	(2) 測高器により測定する場合
II 理 論	(b) 目測を回帰により修正して用い ることによる分散
(α) 毎木調査による材積調査のための各 因子の誤差 (分散)	(c) 樹高曲線による分散
(A) 材積表について	(1) 目測樹高を回帰により修正し て用いる場合
(B) 胸高直径測定について	(2) 実測樹高を用いる場合
(a) 任意方向の直径を測定すること による分散	(i) 伐倒して(又は樹木に登り) 測定する場合
(b) 測定高による分散	(ii) 測高器により測定する場合
(c) 輪尺をあてる角度による分散	(β) 毎木調査による材積の誤差
(C) 樹高測定について	
(a) 実測による分散	
(1) 伐倒して(又は樹木に登り) 測定する場合	

参 考 文 献
Résumé

I 緒 論

森林の材積測定において、一番正確な方法は毎木調査であり、これにより得られる数値は正確なものであるとの概念は、今迄の森林調査を支配して来た。しかし今ここで、今迄用いられて来た毎木調査の方法を吟味してみると、森林の材積測定における毎木調査とは、材積表を用いて森林のすべての樹木につき材積表材積を出し、これらの和をもつて全森林材積としているわけである。この操作においては、次の様な誤差 (広義) が考えられる。すなわち、材積表をあてはめるべき全森林の樹木をすべて調査し得ない調査もれの誤差、又は一度調査した樹木を再び調査する重複調査の誤差、すなわち誤謬 (mistake) と、あてはめるべき材積表がこの森林の樹木によく適合していないために起る誤差、すなわち機械的誤差、及び材積表自身の誤差と材積表をひくための因子の測定上の誤差、すなわち偶然誤差に分けられる。第 1 の誤差については、注意深い調査によつて避けることを得、第 2 の誤差については、毎木調査を実施する前に、用いる材積表が当該森林によく適合しているか否かを検定し、適合度が悪い時にはそれを用いないで他のよく適合する材積表を用

いるか、又は修正して用いることにより避けられる。故にこれらの誤差については問題にせず、ここでは第3の誤差、すなわち偶然誤差についてのみ考える。これらの誤差は用いる材積表の種類及び毎木調査の方法により変化する。材積表の種類には多種あるが、現在最も普通に用いられているのは、材積を胸高直径のみの函数とした2変数材積表と、材積を胸高直径と樹高との函数とした3変数材積表である。従つて毎木調査とは森林のすべての樹木について、2変数材積表が用いられる時には胸高直径のみの調査（測定）となり、3変数材積表が用いられる時には胸高直径及び樹高の調査（測定）となる。つまり材積調査のための毎木調査とは、森林のすべての樹木についての胸高直径のみの測定か、又は胸高直径及び樹高の測定になるわけである。前者の測定は後者の測定の中に含まれる故に、本稿では3変数材積表を用いる毎木調査のみに限定して論を進める。

胸高直径測定において同一方向、同一箇所での測定値には、実測する故誤差はないものと仮定した。しかし、実際の森林調査においてすべての樹木につき、同一箇所の直径を測定する事は実行困難であり、普通は胸高を主観で判断し、大体幹軸に直角になる様に輪尺をあてて直径を測定している。そこで、ここでは主観による測定高は、胸高を中心として上又は下の或る範囲を等頻度でとり、輪尺をあてる角度は幹軸と或る角($\angle R + \alpha$)を中心として $\angle R \sim \angle R + 2\alpha$ の範囲内の角度を等頻度でとつているものと仮定して、それらの測定値と胸高で輪尺を幹軸と直角にあてた測定値との誤差を偶然誤差とみなした（勿論後者の場合には後述の bias を生ずるが）。胸高直径の測定方向については、あらゆる方向の直径は最大直径と最小直径との間に一様に分布しているものと仮定すると、任意方向の直径を測定する事が妥当な方法と考えられるので、任意方向の直径測定値と真の直径との誤差を偶然誤差とみなした。樹高測定においては、伐倒して（か又は樹木に登り）tapeで樹高を測定する場合には、その読みと真値（標本平均値）との誤差を偶然誤差と見なし目測する場合には推定値をより正確な測定値とするために、全森林より所要本数の標本木を抽出し、これらにつき実測して目測と実測との回帰を作り、これにより修正した値が樹高として用いられるが、この回帰式からの誤差を目測の偶然誤差とみなし、又樹高曲線による場合には樹高曲線からの誤差を偶然誤差とみなした。又材積表においては、上記の胸高直径と樹高とを材積表に入れて出された材積表材積と真の材積との誤差を偶然誤差とみなした。

結局、現在行われている毎木調査における誤差としては次のものが考えられる。

- (A) 材積表の誤差
- (B) 胸高直径測定上の誤差
 - (a) 任意方向の直径を測定する誤差
 - (b) 測定高による誤差
 - (c) 輪尺をあてる角度による誤差
- (C) 樹高測定上の誤差
 - (a) 実測の誤差
 - (1) 伐倒して（又は樹木に登り）測定する場合
 - (2) 測高器により測定する場合
 - (b) 目測を回帰により修正して用いる誤差

(c) 樹高曲線による誤差

(1) 目測樹高を回帰により修正して用いる場合

(2) 実測樹高を用いる場合

(i) 伐倒して(又は樹木に登り)測定する場合

(ii) 測高器により測定する場合

故に上の各場合についての誤差を究明して、最後にこれら (A), (B), 及び (C) の組み合わせによる毎木調査の誤差について論ずることにする。なお本稿においては胸高直径測定における括約の問題については取り扱わなかつた。第1報としては理論についてのみのべ、第2報として実例についての数値計算例をのべる。

II 理 論

(α) 毎木調査による材積調査のための各因子の誤差(分散)

材積表及び、胸高直径、樹高の測定値の誤差(分散)は次の如くなる。

(A) 材積表について

3変数材積式にも種々の式が発表せられているが、ここでは対数表示材積式を用いる。今、胸高直径を d 、樹高を h とすると、材積 v は

$$v = a d^b h^c \quad (1)$$

なる式で表わされる。ここで a, b , 及び c は常数である。ここで $V = \log v$, $A = \log a$, $D = \log d$, 及び $H = \log h$ とおくと、(1) 式は

$$V = A + bD + cH \quad (2)$$

なる重回帰式で表わすことが出来る故に、(1) 式は対数表示材積式とよばれる。或る樹木の真の材積 v' の対数を V' とすると

$$V' = A + bD + cH + \epsilon \quad (3)$$

となる。ここで ϵ は平均値 0、分散 σ^2 に従う確率変数である。(3) 式の分散は

$$\begin{aligned} V(V') &= [V(A) + D^2 V(b) + H^2 V(c) + 2D \text{Cov}(Ab) + 2H \text{Cov}(Ac) + 2DH \text{Cov}(bc) + \sigma^2] \\ &\quad + [b^2 V(D) + c^2 V(H)] \\ &= [\sigma^2 \{C_{11} + C_{22} D^2 + C_{33} H^2 + 2C_{12} D + 2C_{13} H + 2C_{23} DH + 1\}] \\ &\quad + [b^2 V(D) + c^2 V(H)] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで σ^2 は (2) 式の最小二乗法解による $\min. S/n-3$ であり、 C_{11} , C_{22} , C_{33} , C_{12} , C_{13} , 及び C_{23} は夫々 C 乗数である。(4) 式において右辺の第1の [] 内は個樹についての材積表自身に基づく分散であり、第2の [] 内は個樹についての、胸高直径及び樹高の測定に基づく分散である。個樹についての胸高直径と樹高の繰返し測定の間には相関がないから、 D と H との共分散は消失する。 $V(V')$, $V(D)$, 及び $V(H)$ は夫々材積、胸高直径及び樹高の対数における分散であるので、これを材積、胸高直径及び樹高の真数の分散に変換するには Brigg's modulus を用いて、

$$V(V') = 0.434^2 \frac{V(v')}{v'^2}, \quad \therefore V(v') = \left(\frac{v'}{0.434} \right)^2 V(V') \quad (5)$$

$$V(D) = 0.434^2 \frac{V(d)}{d^2} \quad (6)$$

$$V(H) = 0.434^2 \frac{V(h)}{h^2} \quad (7)$$

となる。(4) 式に (5), (6), 及び (7) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} V(v') = & \left(\frac{v'}{0.434} \right)^2 \left\{ \sigma^2 [C_{11} + C_{22}D^2 + C_{33}H^2 + 2C_{12}D + 2C_{13}H + 2C_{23}DH + 1] \right. \\ & \left. + \left(\frac{0.434}{d} \right)^2 b^2 V(d) + \left(\frac{0.434}{h} \right)^2 c^2 V(h) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。(8) 式は単木についての分散であるので, 全森林材積の分散を導くためには, (8) 式による分散を全森林樹木数だけ合計せねばならない。すなわち, 今, 全森林樹木本数が N 本であつたとすると全森林材積の分散は各樹木の分散が互いに独立であると仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [V(v'_i)] = & \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{v'_i}{0.434} \right)^2 \left\{ \sigma^2 (C_{11} + C_{22}D_i^2 + C_{33}H_i^2 + 2C_{12}D_i + 2C_{13}H_i \right. \right. \\ & \left. \left. + 2C_{23}D_iH_i + 1) + \left(\frac{0.434}{d_i} \right)^2 b^2 V(d_i) + \left(\frac{0.434}{h_i} \right)^2 c^2 V(h_i) \right\} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

(B) 胸高直径測定について

胸高直径は前述の様に輪尺を用い, 測定方向は任意方向を, 測定高は胸高を中心として或る範囲内を, 輪尺をあてる角度は幹軸と或る角度を中心として或る範囲内を等頻度で測定するものとする, 測定値は真の直径とは異なり誤差を生ずることになる (但し第3の場合は後述の如き bias を伴い, 不偏推定値ではないが, 他の2つは不偏推定値とみなされる)。故にこれらに基づく分散を導く。

(a) 任意方向の直径を測定することによる分散

樹木の最大直径と最小直径との偏差を R とし, 前述の様に各方向の直径は最大直径と最小直径との間に一様に分布しているものと仮定すると, 任意方向の胸高直径 d_b の分散は

$$V(d_b) = \frac{1}{12} (R^2) \quad (10)$$

となる。

(b) 測定高による分散

胸高附近における幹曲線を直線とみなし, 胸高における幹曲線と幹軸とのなす角を α , 胸高より距離 h だけ上又は下の高さにおける直径を d_h , 胸高における直径を d_b とすると,

$$d_h = d_b \pm 2h \tan \alpha$$

となる。故に d_h の分散は

$$V(d_h) = V(d_h) + 4 \tan^2 \alpha V(h)$$

となる。h は胸高を中心として上又は下に l cm 以内を等頻度でとるものと仮定すると、

$$V(h) = \frac{1}{3} (l^2)$$

となる故上式は、

$$V(d_h) = V(d_h) + 4 \tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{3} (l^2) \quad (11)$$

となる。(a) と (b) とを組合わすと、すなわち胸高を中心として或る範囲内 (l cm) 上下の高さで任意方向の直径を等頻度で測定する時の分散は、

$$V(d_h) = \frac{1}{12} (R^2) + 4 \tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{3} (l^2) \quad (12)$$

となる。

(c) 輪尺をあてる角度による分散

(b) と同様な仮定のもとで、幹軸と $\perp R - \mu$ なる角度で輪尺をあてた時の直径測定値 d_n は、

$$d_n = d_h \cos^2 \alpha \cos \mu \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1} \right) \quad (13)$$

となり、その分散は、

$$\begin{aligned} V(d_n) = & \left[\frac{(\cos^2 \alpha)^2 (\cos \mu)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^2} \right] V(d_h) \\ & + \left[\frac{d_h^2 (\cos^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \mu - 1)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^4} \right] \sin^2 \mu V(\mu) \end{aligned}$$

となる。輪尺をあてる角度 μ は 0 から G radian 迄の間を等頻度でとるものと仮定すると、

$$V(\mu) = \frac{1}{12} (G^2)$$

となる故上式は

$$\begin{aligned} V(d_n) = & \left[\frac{(\cos^2 \alpha)^2 (\cos \mu)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^2} \right] V(d_h) \\ & + \left[\frac{d_h^2 (\cos^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \mu - 1)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^4} \right] \sin^2 \mu \cdot \frac{1}{12} (G^2) \quad (14) \end{aligned}$$

となる。(a), (b) 及び (c) を組合わすと、すなわち胸高を中心として或る範囲内 (l cm) 上下の高さで任意方向の直径を、しかも輪尺をあてる角度は 0 より G radian 迄を等頻度で測定する時の分散は (12) 式を (14) 式の $V(d_h)$ に代入することにより、

$$V(d_n) = \left[\frac{(\cos^2 \alpha)^2 (\cos \mu)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^2} \right] \left[\frac{1}{12} (R^2) + 4 \tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{3} l^2 \right] \\ + \left[\frac{d_h^2 (\cos^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \mu - 1)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^4} \right] \sin^2 \mu \frac{1}{12} (G^2) \quad (15)$$

となる。

前述の様に、(a) 及び (b) の場合は不偏推定値であるが、(c) の場合、すなわち輪尺をあてる角度が平均して $G/2$ radian だけ傾く場合には bias を生ずる。この場合には bias 量は、(13) 式の μ に $G/2$ radian に相当する角度 g を挿入したものより d_b を差引いたもの、すなわち

$$\left[\cos^2 \alpha \cos g \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha + \cos^2 g - 1} \right) - 1 \right] d_b \quad (16)$$

である。

(C) 樹高測定について

樹高測定については前述の様に、(a) 実測する場合、(b) 目測を回帰により修正して用いる場合、及び (c) 樹高曲線を利用する場合の 3 つに分けて考えられるのでこれらについての分散を導く。

(a) 実測による分散

ここで云う実測とは、樹木を伐倒し又は樹木に登り tape により測定する場合と測高器により測定する場合との 2 つに分けて考える。

(1) 伐倒して (又は樹木に登り) 測定する場合

実際の樹高測定において樹木を伐倒して tape により測定することは、材積表作製、及び目測樹高の回帰利用の修正を行う場合、樹高曲線を描く場合等の外には通常用いられないが、精密測定の際樹木に登り、tape で測定することは屢々行われるので、tape による樹高測定の立場から本項をとりあげた。勿論樹木に登り tape で測定する時は、伐倒して測定する時よりその測定値の分散は大になる傾向があることはいなめない事実であるが、

単一樹高を tape で測定する時の誤差は偶然誤差にのみ支配され、その分布は正規分布に従うものと思われる。故に若しも tape による測定値の最大値と最小値との範囲 H_R が 3σ であると仮定すると (正規分布の場合は $-\infty$ より $+\infty$ 迄の分布であり極限値はないが、 3σ をとると全体の 99.73% が入る故にここでは 3σ と仮定した)。樹高測定値の分散は

$$V(h) = \frac{H_R^2}{9} \quad (17)$$

となる。この分散は七ツ石国有林 (直方営林署管内) のスギの伐倒木調査における data では、樹高の如何にかかわらず略一定であり (但し樹高の範囲は 12 ~ 24 m である)、略 0.0002 以下で平均して 0.00005 であり、その標準偏差は 0.014 m 以下で平均して 0.006 m であり negligible と認められる。

(2) 測高器により測定する場合

各種測高器による樹高測定は原理的には樹高の不偏推定値を与えるが、個人的誤差、機

械的誤差、及び梢頭の確認の不確かさ等の原因の重畳することにより bias することが一般に認められている。しかし測定値はこれらの bias した値を中心として正規分布していると考えられるので、測高器による測定値の分散は (1) と同様な仮定のもとでは (17) 式と同様に

$$V(h) = \frac{H_R^2}{9}$$

で表わされる。そして

$$\frac{\text{bias}}{D(h)} = \frac{3 \text{ bias}}{H_R} \quad (18)$$

が 0.1 より小であれば、この bias はさほど測定値には影響しないが、若しも 0.1 より大であれば、この bias は問題になる。今 (1) と同じ資料を用いて、3 人の測定者により Weise 測高器で同一の樹高を 10 回測定した場合の $V(h)$ の性質及び bias の影響を吟味してみると、 $V(h)$ については (1) と同様に樹高の如何にかかわらず一定であり、大体において 0.386 以下で平均して 0.083 であり、その標準偏差は 0.62 m 以下で平均して 0.26 m であつた。又 $\text{bias}/D(h)$ が 0.1 より小さい場合は、77 回の測定中唯 1 回で、他の 76 回は 0.1 より大であつた。すなわち Weise 測高器で樹高を測定する場合は、その bias は問題になり、従つてその bias の起る原因を追求してこれを除去すべく調整する必要がある。(但しこの場合には測定値の平均と真値との差を単に bias としているが、その外に抽出変動も含まれているから bias と抽出変動を分離した上で上の議論は成り立つものである)。

(b) 目測を回帰により修正して用いることによる分散

樹高の目測推定には如何に熟練した測定者であつても、その人の個性により過大推定、過小推定又は一定樹高以下の樹木では過大推定(過小推定)、それ以上の樹木では過小推定(過大推定)の傾向がみられるので、目測推定をより合理的ならしめるためには、目測した樹木中より所要本数の標本木を抽出して、その標本木について実測し(この場合に Weise 測高器による実測はその測定値の bias が問題になるので行わずに、事情が許すならば伐倒して tape により測定することが望ましい)。しかし、それがかなわぬ時は樹木に登つて tape により測定するか、又は測高器を用いる時は三脚を有するもの、例えば麻生式測高器等を用いて bias を消去せねばならぬ、実測値と目測値を回帰により結びつけて目測値の修正を行わなくてはならぬ。

y の x に対する 1 次回帰式

$$y = \alpha + \beta x \quad (19)$$

の普通の最小二乗法解を行う条件としては、(1) 独立変数 x には誤差があつてはならない、(2) 従属変数 y の分散はすべての x に対して等しくなくてはならない、という 2 つの条件に立脚している。今、目測推定と実測値との各々の分散を考えてみよう。目測推定値の分散とは、同一の樹高を同一の測定者が何回も目測を行つた時には、各回の測定値は或る値を中心として(この或る値は真の樹高と一致しないで真の値との偏量が bias となる)正規分布をなすと仮定した時のその分布の分散であるが、この様に同一の樹高を同一の測定者が何回も目測を繰返す時は、次の測定値は前回の測定値に左右されて各測定値は独

立変数でなくなる傾向があるので、実際にこの分散を把握することは困難である。故にここではこの代りに正確さは欠くが木梨助教授が霧島国有林（小林営林署管内）で調査された 30 本のスギ（樹高は 10.13 m ～ 23.20 m）を 5 人の測定者によつて目測した例において、前述の様に同一樹高の繰返し目測値の分布は正規分布であると仮定し、そして更に目測値と回帰による修正値との偏差は一応その分布の範囲を示すという仮定を立てると、分布の範囲と分散との間には関係がある故それを以て目測推定値の分散とみなした。この偏差は樹高にかかわらず略一定とみなされるので、目測推定値の分散はすべての樹高について一定であることを認めた。実測樹高についての分散は伐倒して tape により測定する時は前述の如く約 0.0002 以下程度で非常に小であるので、ここでは一応誤差がないものと仮定した。以上の実例から目測と実測との回帰式において実測樹高は条件 (1) に、目測樹高は条件 (2) にかなうことがわかる。そこで今 x を目測樹高、 y を実測樹高とすると、(19) 式に相当する式は

$$x = a + by \quad (20)$$

となる。今、実測高に対する或る目測値を x' とすると

$$x' = a + by + \varepsilon \quad (21)$$

となる。ここで ε は平均値 0、分散 σ^2 に従う確率変数である。しかし目測樹高より実測樹高を推定するには、 x' が独立変数で y が従属変数にならねばならぬ。故に (21) 式は

$$y = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}x' - \frac{\varepsilon}{b} \quad (22)$$

となる。ここで

$$a = \bar{x}' - \bar{y} \frac{S(x'y) - \frac{1}{n} S(x') S(y)}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} (= \bar{x}' - b \bar{y}) \quad (23)$$

$$b = \frac{S(x'y) - \frac{1}{n} S(x') S(y)}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} \quad (24)$$

である。(22) 式の分散 $V(y)$ は

$$\begin{aligned} V(y) = & \frac{1}{b^2} V(a) + \left(\frac{x'^2 + 2ax' + a^2}{b^4} \right) V(b) \\ & + \frac{2(a + x')}{b^3} \text{Cov}(ab) + \frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} V(x') \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n-2} \right) \left[S(x'^2) - \frac{1}{n} [S(x')]^2 - \frac{\{S(x'y) - \frac{1}{n} S(x') S(y)\}^2}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} \right] \quad (26)$$

$$V(a) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{y}^2}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} \right] \quad (27)$$

$$V(b) = \sigma^2 \left[\frac{1}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} \right] \quad (28)$$

$$\text{Cov}(a b) = -\sigma^2 \left[\frac{\bar{y}}{S(y^2) - \frac{1}{n} [S(y)]^2} \right] \quad (29)$$

であり、 $V(x')$ は単一樹高の目測推定値の分散であり、単一樹高の目測推定値の分布は正規曲線に従うものと思われる故、目測推定値の最大値と最小値との範囲 H_R が 3σ であると仮定すると、前述の様に、

$$V(x') = \frac{H_R^2}{9} \quad (30)$$

となる。

(c) 樹高曲線による分散

経営案調査等において毎木調査をなす時、各樹木について樹高を一々測定することは、例えそれが目測であつても繁雑であるので、精度は悪くなるが普通は胸高直径のみを正付けして、樹高曲線により胸高直径に対する樹高を推定している。樹高曲線を画く方法は free hand による方法と、数式(実験式)にて表わす方法の2つがあるが、ここでは数式で表わす式について考え、しこうして数式にも拋物線式 ($h = a d^b$; $h = m + a d + b d^2 + c d^3$; $h = m + a d + c d^3$), 指数曲線式 ($h = a e^{-b/d}$, $h = m + a e^{-d/b}$, $h = m + a e^{(a-d)/(c/d)}$), 双曲線式 ($h = (d + c)/(a d + b)$), 及びその他の式 ($h = a d^b + c \sqrt{d} + m$) 等があるが(ここで h は樹高, d は胸高直径, m は胸高, a, b, c , は常数である), ここでは $h = m + a d + b d^2$ なる樹高曲線式についてのみ論ずる。

(1) 目測樹高を回帰により修正して用いる場合

標本木の胸高直径に対する樹高の測定に目測樹高が用いられるのが現場で行われる最も普通の方法であるが、前述の様に目測樹高は正確さの点で非常に劣る故に回帰により修正する必要がある。すなわち(22)式により修正せねばならない。そこである樹高を h' とすると h' は

$$h' = m + a d + b d^2 + \varepsilon \quad (31)$$

で表わされる。ここで ε は前述の様に、平均値 0, 分散 σ^2 に従う確率変数である。(31)式における h' の測定値の分散は(25)式における $V(y)$ であり、これは x , すなわち目測樹高により変化し、しこうして x は胸高直径 d により変化するから、 $V(y)$ は d 毎に変る。これに反し樹高曲線作製上において測定される胸高直径は正確に測定される故に誤差を含まない。故に Deming の最小二乗法において $W = V(y)$ となり、これは d 毎に変ることを考慮しての最小二乗法解により b 及び c は決定される。(31)式における h' の分散は m には誤差がない故、

$$\begin{aligned} V(h') &= d^2 V(a) + d^4 V(b) + 2d^3 \text{Cov}(a b) + \sigma^2 + (a^2 + 4d^2 b + 4d a b) V(d) \\ &= \sigma^2 (C_{11} + d^4 C_{22} + 2d^3 C_{12} + 1) + (a^2 + 4d^2 b + 4d a b) V(d) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで σ^2 は最小二乗法解による (min.S.)/($n-3$) で、 C_{11} , C_{12} , C_{22} は C 乗

数であり、 $V(d)$ は単一胸高直径の測定誤差であり、胸高直径の測定方法により (10), (11), (12), (14), 及び (15) 式に相当するものである。

ここで考えねばならぬことは、樹高を目測してもその目測を回帰により修正するために樹木を伐倒するか又は樹木に登り実測しているから、どうせ実測するならばその実測値のみで (2) の (i) のべる方法で樹高曲線が画かれる筈である。しかしこの場合に目測推定を修正するために要する実測本数から得られた樹高曲線は、どの程度の精度を得ることが出来るかということを検討せねばならない。若しも目測を修正するために要する実測本数で高精度の樹高曲線が得られるならば、上述の操作による目測樹高に基づく樹高曲線の作製は意義を失うであろう。しかしこれは目測推定の巧拙にかかっている。

(2) 実測樹高を用いる場合

ここでも (a) についてのべたのと同様に伐倒して (又は樹木に登り) tape により測定する場合と、各種測高器により測定する場合との2つに分けて考える。

(i) 伐倒して (又は樹木に登り) 測定する場合

伐倒して又は樹木に登り tape にて樹高を測定する場合には、その分散は非常に小さいので一応誤差はないものと考えられる故、weight を考える必要なしに普通の最小二乗法により (31) 式が得られ、そしてその分散は (32) 式で示されるが、(1) の場合にはすべての計算過程に weight が入っており、この場合には weight が入っていない点が異っている。

(ii) 測高器により測定する場合

測高器により測定する場合には一応その bias が問題になる。これを考慮しないで得られた樹高曲線は bias したものとなる故に正確ではない。しかし高性能の測高器を用いる時には bias は negligible になるので使用される。測高器による単一樹高の繰返し測定値の分散は樹高の如何にかかわらず略一定である故、すべての直径に対して樹高の weight は一定となるので普通の最小二乗法により計算され、樹高曲線式及びその分散は (i) の場合と同じ結果になる。

(β) 毎木調査による材積の誤差

以上の如く (α) において毎木調査による材積調査のための各因子の誤差について論じて来たので、ここではこれらの因子を用いての材積毎木調査についての総括的誤差について論じる。毎木調査における胸高直径測定は、任意方向の直径を、測定高は胸高を中心として或る範囲を等頻度で、そして輪尺をあてる角度は幹軸と直角方向と直角 $+2\alpha$ の範囲内で等頻度で測定しているものと考えられるので、すべての場合においての胸高直径測定上の分散は (15) 式で表わされる。そしてその測定値の bias は (16) 式で表わされるが、一般に (16) 式を (15) 式の平方根、すなわち標準偏差で除した商は negligible に小さいと考えられるので、その bias は無視され得るであろう。又樹高測定は、毎木調査の要求する精度により、前述の様に種々の方法が行われるが、その分散は実測する時には (17) 式で、目測樹高を回帰により修正して用いる時には (25) 式で、樹高曲線による時には (32) 式となる。これらの分散をそれぞれ (9) 式の右辺の $V(d_i)$ 及び $V(h_i)$ に代入して $\sum_{i=1}^N [V(v_i)]$ を求めると、これが毎木調査による全森林材積測定の分散になる。すなわち、毎木調査を樹高測定の方法により分類してその分散を求めると次の如くなる。

(1) 実測する場合

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [V(v_i')] &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{v_i'}{0.434} \right)^2 \left\{ \sigma^2 (C_{11} + C_{22} D_i^2 + C_{33} H_i^2 + 2C_{12} D_i + 2C_{13} H_i + 2C_{23} D_i H_i + 1) \right. \right. \\ &\quad + \left(\frac{0.434}{d_i} \right)^2 b^2 \left[\left(\frac{(\cos^2 \alpha)^2 (\cos \mu)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^2} \right) \left(\frac{1}{12} R^2 + 4 \tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{3} l^2 \right) \right. \\ &\quad + \left. \left. \left(\frac{d_h^2 (\cos^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \mu - 1)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^4} \right) \sin^2 \mu \frac{1}{12} G^2 \right] \right\} \Bigg] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{v_i'}{0.434} \right)^2 c^2 \frac{H_R^2}{9} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

(2) 目測樹高を回帰により修正して用いる場合

(33) 式の右辺の第1の $\sum_{i=1}^N [\] = A$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [V(v_i')] &= A + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{v_i'}{0.434} \right)^2 c^2 \left\{ \frac{1}{b^2} V(a) + \left(\frac{x'^2 + 2ax' + a^2}{b^4} \right) V(b) \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. \frac{2(a+x')}{b^3} \text{Cov}(a, b) + \frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \frac{H_R^2}{9} \right\} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

但しこの場合右辺の第2項の $\{ \}$ 内の a, b 等の常数及び σ^2 は第1項のものとは別のものである。

(3) 樹高曲線を用いる場合

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [V(v_i')] &= A + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{v_i'}{0.434} \right)^2 c^2 \left\{ d^2 V(a) + d^4 V(b) + 2d^3 \text{Cov}(a, b) + \sigma^2 \right. \right. \\ &\quad + (a^2 + 4d^2 b + 4da b) \left[\left(\frac{(\cos^2 \alpha)^2 (\cos \mu)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^2} \right) \left(\frac{1}{12} R^2 \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. 4 \tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{3} l^2 \right) + \left(\frac{d_h^2 (\cos^2 \alpha)^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \mu - 1)^2}{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \mu - 1)^4} \right) \sin^2 \mu \frac{1}{12} G^2 \right] \Bigg] \end{aligned} \quad (35)$$

但しこの場合にも右辺の第2項 $\{ \}$ 内の a, b 等の常数及び σ^2 は第1項のものとは別のものである。

(33), (34), 及び (35) 式の平方根が毎木調査による全森林材積推定値の標準偏差になる。

最後に本稿に対し種々御教示頂き、また資料を貸与された木梨助教授に対して謝意を表する。
(1954年11月20日)

参 考 文 献

- (1) 高 田 和 彦:
 胸高直径測定上の誤差につて. I. II. III 報. 九大演習林集報 I 号.
- (2) 木 梨 謙 吉・鶴 崎 一 永:
 各種測高器の単一測定誤差に就て. 九大演習林報告第 17 号.
- (3) 粟 屋 仁 志:
 樹高曲線の推計学的研究. 未発表
- (4) K. Kinashi:
 Forest Inventory by Sampling methods. 九大演習林報告第 23 号.
- (5) W. G. Chocran:
 Sampling Techniques.
- (6) W. E. Deming:
 Statistical Adjustment of Data.
- (7) F. Yates:
 Samplig Methods for Censuses and Surveys.
- (8) 木 梨 謙 吉:
 推計学に基く測樹学.

ON THE ERROR OF VOLUME BY EVERY TREE MEASUREMENT (1) Theory

Kazuhiko TAKATA

(Résumé)

When the volume of stand is estimated by the every tree measurement, the following errors are anticipated.

- (1) The error caused by the omiting measurement or remeasurement of trees.
- (2) The error caused by the volume table which does not fit the stand.
- (3) The error of the volume table themselves and error of the single measurement of d. b. h. and their height.

(1) is the mistake, (2) is the mechanical error and (3) is the accidental error. Therefore, as to the error of the volume, only (3) is treated. On my first report, their theoretical equation is described. When the volume equation is expressed by the logarithm, the total variance of volume of stand by the every tree measurement is expressed by equation (9). In this equation, $V(d_i)$ and $V(h_i)$ vary the measuring method of d. b. h. and their height. Inserting $V(d_i)$ and $V(h_i)$ fitted with the various measuring method in equation (9), the total variance of the volume of stand by the various measuring method is derived.