ある種の巡回形結合行列をもつニューラルネットワークの平衡点の個数と引き込み領域について

高橋, 規一
九州大学大学院システム情報科学研究院情報工学専攻

西, 哲生
九州大学大学院システム情報科学研究院情報工学専攻

https://doi.org/10.15017/1474975

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 1, pp.101-104, 1996-09-27. 九州大学大学院システム情報科学研究院

九州大学大学院
システム情報科学研究科報告
第1巻 第1号 平成8年9月

Research Reports on Information Science and
Electrical Engineering of Kyushu University
Vol.1, No.1, September 1996

ある種の巡回形結合行列をもつニューラルネットワークの平衡点の個数と引き込み領域について

高橋規一* ・ 西 哲生*

The Number of Equilibrium Points and Their Basins of Attraction of Neural Networks with a Kind of Cyclic Connection Matrix

Norikazu TAKAHASHI and Tetsuo NISHI

(Received June 24, 1996)

Abstract:A method of synthesis of mutually coupled neural networks possessing many equilibrium points whose basins of the attraction are of almost the same size is given. The connection matrix of the network is a cyclic matrix with all diagonal elements vanishing.

Keywords: Hopfield neural networks, Basin of attraction, Memory capacity, Cyclic matrix

1. はじめに

相互結合型ニューラルネットワーク（以下ネットワークと略す）において，平衡点の個数や引き込み領域の広さおよび両者の関係は，連想記憶等の種々の応用において基本的かつ重要な問題であり，また非線形回路理論的にも興味ある問題である．

従来，この問題はネットワークの応用の一つである連想記憶回路構成に関連して盛んに研究されており，Hebb則[1)]，射影学習則[2)]，固有構造法[6)]等の連想記憶回路構成法に対して，多くの結果が報告されている[3),4),5)]．しかしながら，非線形回路理論的立場から言えば，これらの結果はいずれも特殊な構成法に対して得られたものであり，一般論としての結果ではない．また，最も簡単な構成法であるHebb則については，統計力学や符号理論を用いた理論的結果が得られているが，いずれも確率的なものであり，具体的なネットワークに対してどの程度適用できるかが問題である．さらに，射影学習則および固有構造法については，理論的考察が難しく，現在のところ計算機シミュレーションに頼らざるを得ない状況である．

一方，非線形回路理論の分野においては，回路が一意解をもつための条件についてはかなり優れた結果が得られているが，解の個数に関する研究は少ない．

著者らは以前，非線形回路理論的立場から，結合行列が特殊な巡回行列（ただし対角項はすべて零）である相互結合型ニューラルネットワークの平衡点の個数について考察し，ニューロン数とともに指数関数的に増加することを示した[9)]．このことは，文献3)の結果とも合致する．本稿では，文献9)の結果を拡張することにより，引き込み領域の広さが互いにほぼ等しい（後で定義する直接引き込み半径に関しては完全に等しい）平衡点が多数存在するネットワークの具体的構成法を与える．さらに，平衡点の個数と引き込み領域の広さの関係式を決定論的に与え，Hebb則に対して確率論的立場から得られた結果と比較する．

平成8年6月24日受付
* 情報工学専攻

2. 諸定義

ニューロンの個数を n とし，第 i ニューロンの時刻 t における状態を $x_i(t) \in \{1,-1\}$，第 j ニューロンから第 i ニューロンへの結合の係数を w_{ij} とする．また，しきい値はすべて0とする．各ニューロンが同期して動作するとすれば，ネットワークの動作は次式によって表される．

$$x_i(t+1) = \mathrm{sgn}(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j(t)) \ \ (i=1,\cdots,n) \qquad (1)$$

但し，sgn(0)は定義しない．また，$x(t) = [x_1(t),\cdots,x_n(t)]^T \in \{1,-1\}^n$ をネットワークの時刻 t における状態とし，$n\times n$ 行列 $W=[w_{ij}]$ をネットワークの結合行列とすると，(1)式は次のように書き換えられる．

$$x(t+1) = \mathrm{sgn}(Wx(t)) \qquad (2)$$

したがって，ネットワークの平衡点は，方程式：

$$x = \mathrm{sgn}(Wx) \qquad (3)$$

の解であり，平衡点集合はネットワークの動作が同期式であるか非同期式かに関わらず，W から一意的に決定さ

れる.

以下に，本稿で用いる定義を示す.

定義 1 2 つの 2 値ベクトル $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$ と $x'=[x'_1,\cdots,x'_n]^T$ の間の距離 $D(x,x')$ を

$$D(x,x')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i-x'_i|$$

とする.

定義 2 ネットワーク(1)の各平衡点 x^* に対して以下の(i)，(ii) を満足する整数 $r(\geq 0)$ を x^* の直接引き込み半径[10]といい，$R(x^*)$ で表す.

(i) $D(x^*,x)\leq r$ であるすべての x が $\mathrm{sgn}(Wx)=x^*$ を満足する.

(ii) $D(x^*,x)=r+1$ である x のなかに，$\mathrm{sgn}\,(Wx)=x^*$ を満足しないものが存在する.

定義 3 結合行列 $W=[w_{ij}]$ が

$$|w_{ij}|=\begin{cases}0,\ i=j\\1,\ i\neq j\end{cases}$$

を満足するとき，W は零対角 2 値行列であるという. 特に零対角 2 値行列 W が巡回行列であるとき，W は巡回零対角 2 値行列であるという.

本来，ある平衡点の引き込み領域とは，十分時間が経てばその平衡点に収束するような初期状態の集合をいう. しかし，本稿では簡単のため，専ら定義 2 の直接引き込み半径を用いて議論する.

以下では，W が零対角 2 値行列の場合を扱う. 前節で述べたように，本稿の目的はある種のネットワークの存在を示すことであるから，簡単のため次を仮定する.

仮定 1 ニューロン数 n は偶数である.

ニューロン数 n が偶数であるとき，$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j(t)$ は必ず奇数になる. よって，(1) において $\mathrm{sgn}(0)$ が定義されていなくとも以降の議論では問題はない.

3. 主　結　果

はじめに，次の補題を与える.

補題 1 ネットワーク (1) の平衡点 x^* が

$$Wx^*=(2k+1)\,x^*\quad(0\leq k)\tag{4}$$

を満足するならば，

$$R(x^*)=k\tag{5}$$

が成り立つ.

(証明) はじめに，$D(x,x^*)\leq k$ を満足するあらゆるベクトル x に対して $\mathrm{sgn}(Wx)=x^*$ が成立することを示す. 今，$D(x,x^*)=l\ (\leq k)$ とする. x と x^* において異なる要素の個数が l であること，および $|w_{ij}|=1\ (i\neq j)$ より，

$$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j^*-2l\leq\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j\leq\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j^*+2l$$

が成立し，さらに (4) より

$$(2k+1)\,x_i^*-2l\leq\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j\leq(2k+1)\,x_i^*+2l\tag{6}$$

を得る. もし $x_i^*=1$ ならば，(6)の左側の不等式より，

$$\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j\geq(2k+1)-2l=2(k-l)+1\geq 1$$

が成立するので，$\mathrm{sgn}(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j)=1$ となる.

$x_i^*=-1$ の場合も上と同様な議論で，$\mathrm{sgn}\,(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j)=-1$ となる. したがって，$D(x^*,x)=l\ (\leq k)$ を満足する x に対して次式が成立する.

$$\mathrm{sgn}(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j)=x_i^*\quad(i=1,\cdots,n)$$

次に $D(x^*,x)=k+1$ であるベクトル x の中に $\mathrm{sgn}(Wx)=x^*$ を満足しないものが存在することを示す. そのためには，$\sum_{j=1}^{n}w_{1j}x_j\neq x_1^*$ を満足する x の存在を示せば十分である. (4) の第1式：

$$w_{11}x_1^*+w_{12}x_2^*+\cdots+w_{1n}x_n^*=(2k+1)\,x_1^*$$

において，左辺の第 1 項以外はそれぞれ 1 または -1 の値をとる. 右辺はx_1^* の値に依って $2k+1$ または $-(2k+1)$ の値をとる. これらのことから，左辺の第 2 項から第 n 項の $(n-1)$ 項のうち，$(\frac{n}{2}+k)$ 項が x_1^* と同符号であり，$(\frac{n}{2}-k-1)$ 項が x_1^* と異符号であることがいえる. いま，一般性を失うことなく，

$$w_{1j}x_j^*=\begin{cases}0,\ j=1\\x_1^*,\ j=2,\cdots,\frac{n}{2}+k+1\\-x_1^*,\ j=\frac{n}{2}+k+2,\cdots,n\end{cases}$$

と仮定する. このとき，

$$x = [x_1^*, -x_2^*, \cdots, -x_{k+2}^*, x_{k+3}^*, \cdots, x_{n/2+k+1}^*, x_{n/2+k+2}^*, \cdots, x_n^*]^T$$

で与えられるベクトル x は明らかに $D(x^*, x) = k+1$ を満足する．また，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} w_{1j}x_j &= \sum_{j=1}^{n} w_{1j}x_j^* - 2\sum_{j=2}^{k+2} w_{1j}x_j^* \\ &= (2k+1)x_1^* - 2(k+1)x_1^* \\ &= -x_1^*,\end{aligned}$$

が成り立つから，x は $\mathrm{sgn}(Wx) = x^*$ を満足しない．□

一般的には，平衡点が (4) を満足することはまれであるが，補題 1 は本稿の主結果である定理 1 の導出には有用である．

定理 1　$n = 2lm$ を満足する自然数 $l\ (\geq 2)$, m が存在するとする．ある $l-1$ 次の 2 値行ベクトルを α とおき，巡回零対角 2 値行列 W の第 1 行を

$$[\overbrace{0, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}, \overbrace{1, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}, \cdots, \overbrace{1, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}] \tag{7}$$

で与える（巡回行列であるから第 1 行目を与えると行列全体が決まる）ならば，$R(x^*) = m-1$ である平衡点が 2^l 個存在する．

(証明) W の第 1 行を (7) で与えるとき，W と

$$x = [\beta, \beta, \cdots, \beta\,]^T \tag{8}$$

(β は任意の l 次 2 値行ベクトル)

で表される x の積を計算すると，

$$Wx = (2m-1)x = \{2(m-1)+1\}x \tag{9}$$

となる．$2(m-1)+1 \geq 1$ であるから，(8) の形のあらゆる x は平衡点である．(8) の形の x は全部で 2^l 個存在する．また(9) および補題 1 より，それぞれの平衡点の直接引き込み半径は $m-1$ である．□

定理 1 の W に対する平衡点の一つを

$$x^* = [\beta^*, \cdots, \beta^*\,]^T$$

とおく．x^* の周りには，$D(x^*, x) = 2m$ であるような平衡点 x が l 個存在する．(すべての β^* において，ある決まった要素を一つだけ反転したものはやはり平衡点であり，β^* が $2m$ 個あることから，$D(x^*, x) = 2m$ となる．また，β^* の次数が l であるので，そのような平衡点は l 個存在する.) 定理 1 より，各平衡点の直接引き込み半径は $m-1$ であり，隣接する平衡点との距離のほぼ半分であることがわかる（図 1 参照）．上の意味で各引き込み領域はほぼ等しい広さをもつといえる．

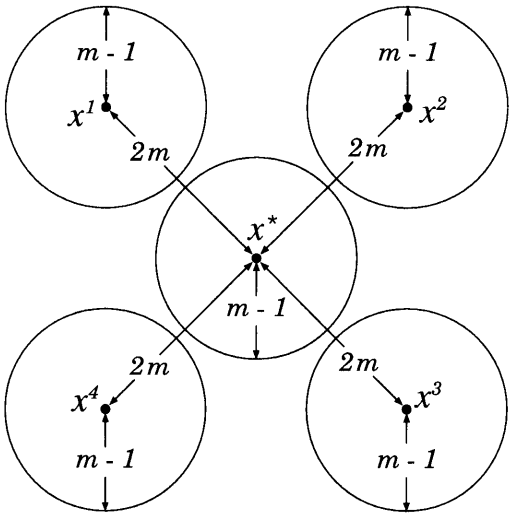

Fig.1　直接引き込み半径と平衡点間の距離

平衡点の個数と直接引き込み半径の関係が定理 1 よりただちに次のように得られる．

補題 2　巡回 2 値結合行列 W の第 1 行を (7) で与えるとき，(8) を満足する平衡点の個数を $p\ (= 2^l)$ とおけば，それらの p 個の平衡点の直接引き込み半径は，

$$\frac{n}{2\log_2 p} - 1 \ \left(= \frac{n}{2l} - 1\right) \tag{10}$$

である．□

参考のため，平衡点の個数と直接引き込み領域に関して確率論的立場から得られた結果の一つを次に示す．

定理 2[5]　$1, -1$ が等確率で現れる p 個のベクトルから Hebb 則によってネットワークを構成するとき，p が

$$p < \frac{(1-2\rho)^2 n}{4\log_e n} \quad (0 \leq \rho < 1/2) \tag{11}$$

を満足するならば，p 個の平衡点それぞれについて，それからの距離が ρn 以内にあるすべての状態が一度の更新でその平衡点に収束する確率は n が大きくなるにつれて 1 に近付く．□

ここで，1 つの特徴的な例を用いて補題 2 と定理 2 を比較してみる．いま，$n = 2000$, $l = 8$ として，巡回零対角 2 値行列 W の第 1 行を (7) で与えるとする．このとき，(8) の形の平衡点は $256 (= 2^8)$ 個存在し，それらの直接引き込み半径は 124 である．一方，定理 2 によれば，すべての平衡点の直接引き込み半径を 124 にしようとすると，(11) 式に $\rho = 124/2000 = 0.062$ を代入して $p < 50.4\cdots$ を得る．すなわち，たかだか 50 個の平衡点しか与えることができない．これは，我々の構成法で与えることのできる 256 個に比べてかなり少ない．

4. む　す　び

本稿では，巡回零対角2値行列を用いることにより，ほぼ等しい広さの直接引き込み領域をもつ平衡点が多数存在するようなネットワークの具体的構成法を与えた．平衡点の個数と引き込み領域の関係に関する従来の研究では，確率論的立場からの考察がほとんどであり，具体的なネットワークを与えるものはほとんど見当たらない．

結合行列の決め方の違いや決定論と確率論という立場の違いがあるため，従来の結果と単純に比較することはできないが，ある場合には，従来の構成法に比べてかなり優れた性質をもつネットワークが存在することを示した．

本稿のネットワークの結合行列は非対称であるから，大域的安定性は保証されていない（実際には対称行列への拡張は容易にできる）．最近では，結合が非対称なネットワークの動的特性に関する研究も行なわれており[7),8)]，ネットワークが大域的に安定であるための十分条件などが得られている．非対称結合ネットワークの動的性質の解析，特に大域的に安定であるための条件について検討することは今後の課題である．

参　考　文　献

1) J.J. Hopfield : "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **79**, pp.2554–2558 (Apr. 1982).

2) L. Personnaz , I. Guyon and G. Dreyfus : "Collective computational properties of neural networks: New learning mechanisms", Phys. Rev. A, **34**, pp.4217–4228 (Nov. 1986).

3) J. Bruck and V.P. Roychowdhury : "On the number of spurious memories in the Hopfield model", IEEE Trans. Information Theory, **IT-36**, 2, pp.393–397 (Mar. 1990).

4) Y.S. Abu-Mostafa and J.S. Jacques : "Information capacity of the Hopfield model", IEEE Trans. Information Theory, **IT-31**, 4, pp.461–464 (Jul. 1985).

5) R.J. McEliece , E.C. Posner , E.R. Rodemich and S.S. Venkatesh : 'The capacity of the Hopfield associative memory", IEEE Trans. Information Theory, **IT-33**, 4, pp.461–482 (Jul. 1987).

6) J.H. Li , A.N. Michel and W. Porod : "Analysis and synthesis of a class of neural networks: Variable structure systems with infinite gain", IEEE Trans. Circuits Syst., **CAS36**, 5, pp.713–731 (May 1989).

7) L.O. Chua and T. Roska : "Stability of a Class of Nonreciprocal Cellular Neural Networks", IEEE Trans. Circuits Syst., **CAS37**, 12, pp.1520–1527 (Dec. 1990).

8) E. Kaszkurewicz and A. Bhaya : "On A Class Of Globally Stable Neural Circuits", IEEE Trans. Circuits Syst. I, **CAS41**, 2, pp.171–174 (Feb. 1994).

9) T. Nishi and N. Takahashi : "On the Number of Solutions of a Class of Nonlinear Equations Related to Neural Networks with Tapered Connections", IEICE Trans. Fundamentals, **E78-A**, 10, (Oct. 1995).

10) Y. Kamp and M. Hasler : "Recursive Neural Networks for Associative Memory", pp.6, John Wiley & Sons, 1990.