Cup and cap products in real moment-angle manifolds

蔡, 力

https://doi.org/10.15017/1470520

出版情報：九州大学, 2014, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

モーメント・アングル複体$(D^2,S^1)^K$は，一般の抽象的単体複体Kに付随して2次元円板とその境界である円周の直積から構成される複体であり，自然なトーラス作用を持つ．その位相的性質はこれまでにかなり詳しく研究されてきており，特に与えられた単体複体Kの組合せ的性質を強く反映することが知られているほか，Coxeter群との深い関係も知られている．

本学位論文では，そうしたモーメント・アングル複体の実数版に相当する，**実モーメント・アングル複体**を考え，その種々の位相的性質，微分トポロジー的性質について調べている．実モーメント・アングル複体$(D^1,S^0)^K$は，円板の代わりに閉区間を考え，その直積である立方体的単体から構成される複体であり，有限アーベル群$(Z_2)^m$による自然な作用を持つ．本学位論文ではまず，そうした複体のコホモロジー環について詳しく調べ，その新しい記述法を提案している．一般の多面体的積で記述される位相空間のコホモロジー環については，その懸垂のホモトピー的分解定理の手法を用いてBahri, Bendersky, Cohen, Gitlerにより計算がなされている．本学位論文では，そうした手法を用いず，各（コ）チェイン群の基底をうまく選ぶことで加群構造をまず決定し，さらにチェインレベルでの積を，Alexander-Whitneyチェイン写像を用いて定式化することで，カップ積構造のStanley-Reisner環を用いた記述に成功している．なお，実モーメント・アングル複体は，直積空間の和集合ではあるが，それ自身は直積空間ではないため，Alexander-Whitneyチェイン写像を直接的に使うだけでは不十分であり，そのため著者は圏と函手のcolimitの議論を巧みに使って証明している．こうしたチェインレベルからのコホモロジー環の具体的記述は，これまでにない新しい結果であり，これにより実モーメント・アングル複体のコホモロジー環の計算が，単体複体Kの組合せ的構造のみから実行できることになる．なお，本学位論文の付録において，既存の結果も含めてこうした代数トポロジーの議論に詳細な証明が付けられており，この部分だけでも非常に興味深い論文となっている．さらに，キャップ積についても，チェインレベルでのStanley-Reisner環上の加群を用いて記述した後，その系として，一般化されたホモロジー球面におけるAlexander双対定理の新しい証明を与えている．こうした証明はこれまでに知られておらず，実モーメント・アングル複体のコホモロジー環に関する今回の結果の応用範囲の広さを示唆していると言える．

さて，実モーメント・アングル複体は一般に位相多様体になるとは限らないが，本学位論文では，実モーメント・アングル複体が，位相多様体，PL多様体，可微分多様体，あるいは一般化されたホモロジー多様体となるための，単体複体Kの満たすべき条件についても考察している．こうした特徴づけ定理はDavisにより特別な場合に得られていたが，その手法は一般の場合にも適用できることが知られている．しかし本学位論文では，Davisとは異なる，より直接的な手法を用いることにより，特徴づけ定理を独自に証明している．特に可微分構造が入る場合についても考察しているのは，微分トポロジーの観点から非常に興味深い．このように，本学位論文は既存の結果にも著者独自の証明が付けられており，論文をself-containedにするための努力が最大限になされている．そうした点でも本論文の学術的価値は非常に高い．

また，本学位論文では，単体複体Kと正の整数列$J=(n_i)_{i=1}^m$に対し，次元n_iの球体とその境界である球面の対(D^{n_i},S^{n_i-1})に付随した多面体的積$((D^{n_i},S^{n_i-1})_{i=1}^m)^K$についても考察している．これは，与えられた単体複体Kに単体的ウェッジ構成を繰り返し行い，そうして得られる単体複体$K(J)$に付随した実モーメント・アングル複体$(D^1,S^0)^{K(J)}$として構成されることがまず示される．特に，$J=(2,2,...,2)$の場合として，モーメント・アングル複体が，実モーメント・アングル複体の特別な場合として構成されることになる．本論文では，実モーメント・アングル複体のコホモロジー環の

Stanley-Reisner 環による記述を用いて，上述した多面体的積 $((D^{n_i}, S^{n_i-1})_{i=1}^{m})^K$ のカップ積・キャップ積構造を K と J に付随した別の Stanley-Reisner 環を用いて記述している．モーメント・アングル複体について知られていた既存の結果を拡張する結果である．さらに，多面体的積が位相多様体，PL 多様体等になるための特徴づけ定理も得られている．その帰結としてモーメント・アングル複体が位相多様体や一般化されたホモロジー多様体となるための特徴づけ定理も得られており，これはこれまでにない新しいオリジナルの結果である．さらに，モーメント・アングル複体が，対応する実モーメント・アングル複体から出発し，オープン・ブック構成を繰り返すことで得られることも示されている．

以上のように本学位論文では，重要な概念の新しい定式化を提唱し，さらにその本質的な性質についての結果を独自のアイデアに基づいて得ている．さらに，具体的計算も可能であり，重要な幾何学的結果も得られている．こうした結果は，代数トポロジー，微分トポロジー，変換群論，幾何学的群論等において大変価値のある結果であり,将来の大きな発展も期待できる重要な業績である．よって，本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．