

# Arithmetic of certain nilpotent extensions and multiple residue symbols

天野, 郁弥

<https://doi.org/10.15017/1470519>

---

出版情報 : 九州大学, 2014, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

## 論文審査の結果の要旨

天野郁弥氏の博士論文は、代数的整数論、特に、平方剰余ないしべき剰余記号の多重化に関するものである。

平方剰余記号の多重化の試みは、1939年のL. Rédeiによる研究に始まる。Rédeiは、Gaussによる平方剰余の数論、2次形式の種の理論を一般化する試みとして、あるトリプル記号を導入した。Rédeiのトリプル記号は、有理数体上のある8次2面体拡大における素数の分解法則を記述する。しかしながら、平方剰余記号、2次体の数論の拡張として、Rédeiのトリプル記号、8次2面体拡大の数論が自然で正しい方向であるかどうかは不明のまま、長らく忘れられてきた。

長い沈黙の後、2000年に、森下昌紀は、Rédeiのトリプル記号は位相幾何学におけるトリプルまつわり数の数論的類似として解釈できることを見出し、より一般のMilnorの高次まつわり数の数論的類似物を導入した。長さが $n$ の数論的Milnor不変量は、有理数体上のあるべき零拡大 $K(n)$ における素数の分解法則を記述し、 $n = 2, 3$ の場合が各々平方剰余記号、Rédeiのトリプル記号を与える。しかしながら、森下の研究は概念的で、拡大体 $K(n)$ の具体的な構成や数論的Milnor不変量の具体的な計算には役に立たなかった。また、例えば、拡大体 $K(3)$ がRédeiの8次2面体拡大体と一致するか？ という基本的な問題すら解かれずに残された。さらに、多重べき剰余記号を有理数体以外の代数体へ拡張することは、コホモロジー的な障害があるため、困難な問題であった。

このような歴史的背景のもと、天野郁弥氏は、まず、Rédeiの8次2面体拡大の数論的特徴付けを与え、拡大体 $K(3)$ がRédeiの8次2面体拡大と一致することを証明した。この結果は、Rédeiの研究が自然で正しい方向であったことを初めて明らかにしたものといえる。次いで、天野氏は、有理数体上64次のべき零拡大 $K(4)$ の具体的な構成を与えた。そして、この64次のべき零拡大における素数の分解法則を記述する4重べき剰余記号を導入し、数論的4重Milnor不変量と一致することを証明した。この研究は、真にGauss、Rédeiの研究を凌ぐ、代数的整数論における歴史的快挙といえる。さらに、天野氏は、円の3分体においてトリプルキュービック剰余記号を導入した。この研究は、有理数体以外の代数体において、初めて数論的Milnor不変量と関係する多重べき剰余記号を構成したブレークスルーである。また、天野氏は、Rédei記号と保型形式のFourier係数の関係についても共同研究を行っている。

以上の天野郁弥氏の結果は、代数的整数論における歴史的快挙、価値ある業績と認められる。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。