[04_04]九州大学大型計算機センター広報表紙奥付等

出版情報：九州大学大型計算機センター広報. 4 (4), 1971-08-02. 九州大学大型計算機センター
バージョン：
権利関係：

ライブラリプログラムの紹介

No. 250 C 3／QU／F／DRPGMA 登録年月日 昭和46年6月28日

Reciprocal of Gamma Function

実変数ガンマ関数の逆数

作成	作成者 塩川浩三 作成年月日 昭和46年5月1日
形式	a. コンプリートプログラム b. サブルーチン ⓒ. 関数 d. 手続き e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN b. ALGOL c. FASP d. PL／I e. その他（ ）
使用機種	FACOM 230−60
使用メモリ数	ⓐ. コア(0.2)K語 b. ディスクパック( )K語 c. その他( )
使用機器構成	ⓐ. カードリーダ ⓑ. ラインプリンタ c. カードパンチ d. 紙テープリーダ e. 紙テープパンチ f. 磁気テープ( )ユニット g. ディスクパック h. その他（ ）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する ⓑ. 明記する必要はない
公表	ⓐ. ソースプログラムを公表する b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する（ 年 月 日まで）

§1. 概要

1.1 目的

実変数ガンマ関数の逆数を倍精度で計算する。

1.2 計算方法

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

を用いて変数の範囲を $2\leqq x<3$ に変え、この範囲ではガンマ関数の多項式展開を用いる。

多項式展開の係数はWernerとCollingeの値を用いた。

〔参考文献〕

H. Werner and R. Collinge "Chebyshev Approximations to the Gamma Function" Math. Comput. 15 195(1961)

§2. 使用法

2.1 呼び出し方法

ガンマ関数の逆数が必要なところに次のように書けばよい。

DRPGMA (X)

2.2 パラメータ

X： 倍精度実数型定数または変数名。

2.3 制限

Xのとる範囲に制限はないが、Xが絶対値の大きな負の数であるとoverflowを起こす。

(X>－50位までは使える)

2.4 精度・使用時間

1回の呼び出しに約 0.5ms 位。精度は16～17桁程度。

§3. 備考

(1) 関数名DRPGMAはこれを使うプログラム単位内で倍精度実数型の宣言を必要とする。

(2) 内部でのエラー処理は一切行なっていない。

No. 296　D6／QC／F／FFTCS　　登録年月日　昭和46年6月28日

FAST FOURIER TRANSFORM (COMPLEX TRANSFORM)

高速フーリエ変換（複素変換）

作成	作成者　久原由美子　　作成年月日　昭和46年3月10日
形式	a. コンプリートプログラム　ⓑ. サブルーチン　c. 関数　d. 手続き　e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN　b. ALGOL　c. FASP　d. PL／I　e. その他（　）
使用機種	FACOM 230−60
使用メモリ数	ⓐ. コア(1.27)K語　b. ディスクパック(　)K語　c. その他(　)
使用機器構成	ⓐ. カードリーダ　ⓑ. ラインプリンタ　c. カードパンチ　d. 紙テープリーダ　e. 紙テープパンチ　f. 磁気テープ(　)ユニット　g. ディスクパック　h. その他（　）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公表	ⓐ. ソースプログラムを公表する　b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する(　年　月　日まで)

§1. 概　要

1.1　目的

N個の時系列複素データX(0), X(1), …, X(N−1)が与えられているとき、複素フーリエ変換は次式で表わすことができる。

$$C(j)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{jk},\quad j=0,1,\cdots,N-1 \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに　$W=e^{2\pi i/N}$ である。　……(2)

(1)式の逆変換は

$$X(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}C(j)W^{-jk},\quad k=0,1,\cdots,N-1 \quad \cdots\cdots (3)$$

と表わされる。

上式の形のままでC(j), $j=0,\cdots,N-1$ を求めようとすると、N^2~~個~~回の演算（1回の

演算は１回の複素数の乗算と加算）を必要とし非常に時間がかかる。さらに４Ｎ個（２×２Ｎ（実数部N，虚数部N））の記憶場所を必要とする。この方法では、標本数が増加するにつれてその計算量は大変なものとなる。そこで最近Cooley と Tukey によって複素フーリエ変換の新しい算法が工夫されて、[1] 飛躍的に計算量を減らすことができるようになった。これを一般に高速フーリエ変換（Fast Fourier Transform，略してFFT）と呼ばれている。ＦＦＴにもいろいろ工夫されたものがあるが、ここでは文献２）によっている。このプログラムは文献３）のＡＬＧＯＬの手続きをＦＡＣＯＭ 230－60　ＦＯＲＴＲＡＮに書き換えたものである。

1.2　計算方法

$N=2^m$ のとき、(1)式の j，k を次のように表わす。

$$\left.\begin{aligned} k &= j_{m-1}\cdot 2^{m-1} + \cdots\cdots + j\cdot 2 + j_o \\ j &= k_{m-1}\cdot 2^{m-1} + \cdots\cdots + k\cdot 2 + k_o \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

但し、j_{m-1}，…，j_o，　k_{m-1}，…，k_oはそれぞれ０，１をとる。即ち j，k の２進表現となっている。（以下normal order と呼ぶ）。

これを用いると(1)式は

$$C(j_{m-1},\ \cdots,\ j_o) = \sum_{k_o}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}} X(k_{m-1},\ \cdots,\ k,\ k_o)\, W^{jk_{m-1}\cdot 2^{m-1}\cdots\cdots jk_0} \cdots (5)$$

となる。(2)と(4)式より

$$W^{jk_{m-1}\cdot 2^{m-1}} = W^{j_o k_m \cdot 2^{m-1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

したがって一番内側の k_{m-1} についての和は j_o，k_{m-2}，　……，k_o のみの関数となるから

$$X_1(j_o,\ k_{m-2},\ \cdots,\ k_o) = \sum_{k_{m-1}} X(k_{m-1},\ \cdots,\ k_o)\, W^{j_0, k_{m-1}\cdot 2^{\cancel{m-1}}\ m-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となる。(7) 式は$k_{m-1}=0$，　$k_{m-1}=1$についての和であるから２Ｎ回の演算を必要とする。

同様に(2)と(4)式より

$$W^{jk_{m-l}\cdot \cancel{2^{m-l}}\ 2^{m-l}} = W^{(j_{l-1}\cdot 2^{l-1} + \cdots\cdots + j_o)k_{m-l}\cdot 2^{m-l}} \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

であるから

$$X_l(j_o,\ \cdots,\ j_{l-1},\ k_{m-l-1},\ \ldots,\ k_o)$$
$$= \sum_{k_{m-l}} X_{l-1}(j_o,\ \cdots,\ j_{l-2},\ k_{m-l},\ \cdots,\ k_o)\, W^{(j_{l-1}\cdot 2^{l-1} + \cdots\cdots + j_o)k_{m-l}\cdot 2^{m-l}} \cdots\cdots\cdots (9)$$

この計算を ℓ を１からmまでくり返し計算すると

$$C(j_{m-1},\ \ldots,\ j_o) = X_m(j_o,\ \ldots,\ j_{m-1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

が得られる。(10)式からわかるように最終結果は初めの２進表現の各ビットが逆順となっている（以下 reverse binary order と呼ぶ）。

すなわち

$$j=j_0\cdot 2^{m-1}+\cdots\cdots+j_{m-2}\cdot 2+j_{m-1} \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

で表わされる。したがって最後に(4)の形に並べかえを行なう必要がある。

この場合の演算回数は

$$2\,Nm=2\,N\log_2 N \quad \cdots\cdots \quad (12)$$

となる。

(9)式において X_l を X_{l-2} で表現することもできる。すなわち k_{m-l} と k_{m-l-1} に対する和で表わす。以下に述べるサブルーチンはこの方法を用いている。

(3)式で表わされる逆変換の場合、(1)と(3)式をマトリックス表現で

$$\mathbf{C}=\frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{T}\,\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}=\frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{T}^{*}\mathbf{C}$$

と表わす。ただし、$\mathbf{T}^{*}$ は $\mathbf{T}$ の複素共役行列である。

(14)式は

$$\mathbf{X}=\frac{1}{\sqrt{N}}\,(\mathbf{T}\,\mathbf{C}^{*})^{*}$$

と表わすことができるから、最初にCの複素共役ベクトルを作り、すでに述べた解法と同様の方法を用いる。次にその結果の複素共役ベクトルを作ることにより求まる。

〔参考文献〕

1) Cooley, J. W.,　Tukey, J. ~~N.~~ W.

An algorithm for the machine calculation of complex Fourie series.

Math. Comput. 19, 90, (Apr. 1965),　297−301.

2) Singleton, R. C.

On computing the fast Fourie Transform.

Comm.　ACM 10 (Oct. 1967),　647−654.

3) Singleton, R. C.

ALGOL procedure for the Fast Fourie Transform.

Comm.　ACM 11 (Nov. 1968),　773−776.

§ 2.　使用方法

2.1　呼び出し名

CALL　FFTCS (C, N, M, INVERS, ILL)

2.2　パラメータ

C　　単精度複素数型配列名。添字域の上限はN。

入力としてN個の複素型データが与えられねばならない。出力として複素フーリエ変換の結果が与えられる。

N, M　　整数型変数

N＝2＊＊M

INVERS　論理型変数　.TRUE. または　.FALSE. を与える。

INVERSが　.TRUE. のとき（1）式が計算される。

INVERSが　.FALSE. のとき（3）式が計算される。

ILL　　整数型変数名。

0……入力パラメータが正常なときにこの値が与えられる。

1……入力パラメータに誤りがあり演算できないときに与えられる。

即ち　N≠2＊＊Mのとき、またはM≧20のとき。

2.3　使用しているサブルーチン及び組込み関数

FFT2, REORDER

CMPLX

§3.　備　考

FFTS（富士通提供）との計算時間及び使用語数の比較

テストデータとして、実部$=f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$，虚部＝0　なる関数を用いた。

N		FFTCS	FFTS
32		29 ms	60 ms
64		67	165
128		159	327
256		349	853
512		780	1739
1024		1630	3783
使用語数	プログラム	1270	394
	変　　数	2 N	4 N

註）FFTCSとFFTSとでは配列に与えられる結果の順序が異る。

No. 297　D 6／QC／F／FFTRS　　　　登録年月日　昭和46年6月28日

FAST FOURIER TRANSFORM (REAL DATA TRANSFORM)

高速フーリエ変換（実数データの変換）

作　　成	作成者　久原由美子　　作成年月日　昭和46年3月10日
形　　式	a. コンプリートプログラム　ⓑ. サブルーチン　c. 関数　d. 手続き　e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN　b. ALGOL　c. FASP　d. PL／I　e. その他（　　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ. コア(2.4)K語　b. ディスクパック(　)K語　c. その他(　)
使用機器・構成	ⓐ. カードリーダ　ⓑ. ラインプリンタ　c. カードパンチ　d. 紙テープリーダ　e. 紙テープパンチ　f. 磁気テープ(　)ユニット　g. ディスクパック　h. その他（　　）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公　　表	ⓐ. ソースプログラムを公表する　b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1. 概　要

1.1　目　的

COMPLEX TRANSFORM を参照。

2個の実数データに対し、フーリエcosine, sine 係数

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} X_j \cos(\pi jk/N), \qquad k=0, 1, \cdots\cdots, N$$
$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} X_j \sin(\pi jk/N), \qquad k=0, 1, \cdots\cdots, N \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を計算する。または、N個のcosine係数、N個のsine係数が与えられているとき

$$Xj = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}\left[a_k\cos(\pi jk/N) + b_k\sin(\pi jk/N)\right] + \frac{a_N}{2}\cos(\pi j), \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$j=0, 2, \cdots\cdots, 2N-1$$

を計算する。

1.2　計算方法

2N個の実数データがX(0),…, X(2N－1)に与えられているとき、虚数部を0として複素フーリエ変換を行なう。その後で実数データの場合、複素フーリエ係数 $C(j)$, $j=1, 2, \cdots\cdots, 2N-1$ の間に

$C(2N-j)=C^*(j)$,　$j=1, 2, \cdots\cdots, N-1$　(但し＊は複素共役を表わす)

が成り立つことを用いて、cosine 係数

$$A(j)=\begin{cases} C(0)+C^*(0) \\ C(j)+C^*(2N-j), & j=1,2,\cdots, N \end{cases}$$

sine 係数

$$B(j)=\begin{cases} i(C^*(0)-C(0)) \\ i(C^*(2N-j)-C(j)), & j=1,2,\cdots, N \end{cases}$$

を求める。逆の場合はこの逆をたどって変換する。

〔参考文献〕

No. 296　D6／QC／F／FFTCSの項を参照

§2.　使用方法

2.1　呼び出し名

CALL　FFTRS (C, NN, M, INVERS, ILL)

2.2　パラメータ

C　　単精度複素数型配列名。添字域の上限はNN。

INVERSが.TRUE. のとき、入力として最初のNN個のデータがCの実部に、残りのNN個がCの虚部に与えられねばならない。出力として最初のN個の結果がCの実部に、残りのN個の結果がCの虚部に与えられる。

INVERSが.FALSE. のとき、入力として最初のN個のデータがCの実部に、残りのN個のデータがCの虚部に与えられねばならない。出力として最初のNN個の結果がCの実部に、残りのNN個の結果がCの虚部に与えられる。

NN, M　　整数型変数。N＝2＊＊M, NN＝N＋1

INVERS　論理型変数。.TRUE. または .FALSE. を与える。

INVERSが.FALSE. のとき(1)式が計算される。結果は a_k がCの実部に、b_k

がCの虚部に与えられる。

INVERSが .TRUE. のとき(2)式が計算される。

結果は最初のN個がCの実部に、残りのN個がCの虚部に与えられる。

ILL　　整数型変数名。

0……入力パラメータが正常なときにこの値が与えられる。

1……入力パラメータに誤りがあり、演算できないときに与えられる。即ち

NN≠2＊＊M＋1のとき、またはM≧20のとき。

2.3　使用しているサブルーチン、組込み関数及び基本外部関数

FFT 2, REVFFT, RTRAN, REORDER

CMPLX

SIN

§3.　備　考

計算時間及び使用語数

テストデータとして　矩形波　$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$　を用いた。

N		FFTRS
32		34 ms.
64		77
128		170
256		362
使用語数	プログラム	2400
	変　　数	2 (N+1)

No. 298　C3／QU／F／GAMMAD　　登録年月日　昭和46年6月28日

GAMMA FUNCTION

ガンマ関数

作成	作成者　田村英之　　作成年月日　昭和46年4月1日
形式	a．コンプリートプログラム　ⓑ．サブルーチン　c．関数　d．手続き　e．関数手続き
使用言語	ⓐ．FORTRAN　b．ALGOL　c．FASP　d．PL／I　e．その他（　　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ．コア(0.7)K語　b．ディスクパック(　　)K語　c．その他(　　)
使用機器構成	ⓐ．カードリーダ　ⓑ．ラインプリンタ　c．カードパンチ　d．紙テープリーダ　e．紙テープパンチ　f．磁気テープ(　　)ユニット　g．ディスクパック　h．その他（　　）
利用者の義務	a．プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ　明記する必要はない
公表	ⓐ．ソースプログラムを公表する　b．ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1．　概　要

1.1　目的

ガンマ関数：　$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}dt$　（ただし z は実数）

を、ベキ級数、漸近展開の最適併用条件により、誤差と計算時間を最小にする条件で計算する。

〔参考文献〕

森口ほか：　数学公式III，　P．1（岩波全書）

田村：九大工学集報，第43巻　第4号，P．556（昭45．6）

§2．　使用法

2.1　呼び出し方法

CALL GAMMAD (Z, G, ILL)

2.2 パラメータ

Z………Γ（z）のZを与える。倍精度実数型変数名または倍精度実定数。

G………結果のΓ（z）がセットされる倍精度実数型変数名。

ILL……整数型変数名。サブルーチンからもどったときの状態がセットされる。

0……正常に解が求まったとき。

1……Γ（Z）が極であるときセットされる。

$|Z|<10^{-50}$および$|Z-$（負整数））／ $Z|<10^{-16}$のとき。

2.3 制限

$|Z|<10^{-50}$および$|Z-$（負整数））／$Z|<10^{-16}$は計算不可能（±∞，1位の極）。

この場合の結果は ILL＝1，$G=10^{50}$。

2.4 使用ルーチン

組込み関数 DABS, DSQRT, DLOG, DEXP

2.5 所要時間

Z＝1～2に対して一回の呼び出しで 約10msec. |Z|の増大とともにや丶大となる。

2.6 精度

相対誤差 $10^{-16}\times(1+|Z-1.5|)$以下。 Z＝1～2では約$10^{-17}$程度。

2.7 備考

プログラムの一部を変更することにより、使用する計算機の語長に応じて、誤差と計算時間を最小にする条件で計算できる。語長（1語のビット数）が与えられると相対誤差の下限はおよそ $2^{-(\text{仮数ビット数}-1)}$（相対誤差の上限はこの値より小さくならない）で、このプログラムによるΓ（z）（z＝1～2）の相対誤差は、この値よりや丶大となる。

No. 299　C3／QU／F／PRESNL　　　登録年月日　昭和46年6月28日

Generalized Fresnel Integral

一般化されたフレネル積分

作　　成	作成者　田　村　英　之　　作成年月日　昭和46年4月28日
形　　式	a．コンプリートプログラム　ⓑ．サブルーチン　c．関数　d．手続き　e．関数手続き
使用言語	ⓐ．FORTRAN　b．ALGOL　c．FASP　d．PL／I　e．その他（　　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ．コア（　）K語　b．ディスクパック（　）K語　c．その他（　）
使用機器構成	ⓐ．カードリーダ　ⓑ．ラインプリンタ　c．カードパンチ　d．紙テープリーダ　e．紙テープパンチ　f．磁気テープ（　　）ユニット　g．ディスクパック　h．その他（　　）
利用者の義務	a．プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公　　表	ⓐ．ソースプログラムを公表する　b．ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1．概　要

1.1　目的

積分：$\int_0^x exp\,(jt^p)\,dt = \mathrm{Cp}\,(x) + j\,\mathrm{Sp}\,(x)$,　$j=\sqrt{-1}$,　$\mathrm{p}=1\sim\infty$

を（かりに）一般化されたフレネル積分と呼ぶ（p＝2が通常のフレネル積分であるが、定義の仕方で変数と積分値は定数倍だけ異る）。

この計算を、ベキ級数、漸近展開の最適併用条件により計算する。

1.2　計算方法

$x\to0$ ではベキ級数を、$x\to\infty$ では漸近展開を使い、両方法の誤差が等しくなるxで切りかえを行なう。詳細は下記文献を参照してください。

〔参考文献〕

森口ほか：　数学公式III，P. 22, 261（岩波全書）

田村：　九大工学集報，vol. 43　No. 4，　P. 550（昭45．6）

富士通：　FACOM　230－60　FORTRAN 解説編（II），（EX－061－3－4），P. 134

§ 2.　使用法

2.1　呼び出し方法

CALL　PRESNL (P, X, C, S)

2.2　パラメータ

P……指数p（1～∞）を与える倍精度実数型変数名または倍精度実定数。

X……独立変数x（>0）を与える倍精度実数型変数名または倍精度実定数。

C……結果の積分値の実数部がセットされる。倍精度実数型変数名。

S……結果の積分値の虚数部がセットされる。倍精度実数型変数名。

2.3　制限

$1 > P < \infty$, $X \geqq 0$

2.4　使用ルーチン

組込み関数：　DABS, DLOG, DCOS, DSIN, DSQRT

2.5　所要時間

1回の呼び出しで約20msec.

2.6　精度

P, Xによって異なるが、FACOM 230−60 倍精度の場合、10^{-10}以上が保証される。

20で最も誤差が大であるが、$x^p \geqq 32$、$x^p \geqq 9$では10^{-15}程度であろう。

2.7　備考

(i) プログラムの一部を変更することにより、計算機の語長に応じて精度最良の条件で計算ができる。

(ii) 通常のフレネル積分の定義：　$\int_0^x \exp\left(j\frac{2}{\pi}t^2\right)dt = C(x) + jS(x)$

による$C(x)$, $S(x)$はそれぞれ、

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\right),\quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, S_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\right)$$

である。

また、富士通ライブラリ　FRESD (X, C, S, ILL) の定義

$$\int_0^x \frac{e^{-jt}}{\sqrt{2\pi t}}\,dt = C(x) - jS(x)$$

による$C(x)$、$S(x)$との関係は

$$C(x) = C_2\left(\sqrt{2x/\pi}\right),\quad S(x) = S_2\left(\sqrt{2x/\pi}\right)$$

である。

No. 300　D1／QU／F／CGJQ　　　登録年月日　昭和46年6月28日

Coefficients of Gauss-Jacobi Quadrature

Gauss-Jacobi積分公式の係数

作　成	作成者　塩川浩三　　作成年月日　昭和46年5月1日
形　式	a. コンプリートプログラム　ⓑ. サブルーチン　c. 関数　d. 手続き　e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN　b. ALGOL　c. FASP　d. PL／I　e. その他（　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ. コア（ 1 ）K語　b. ディスクパック（　）K語　c. その他（　）
使用機器構成	ⓐ. カードリーダ　ⓑ. ラインプリンタ　c. カードパンチ　d. 紙テープリーダ　e. 紙テープパンチ　f. 磁気テープ（　）ユニット　g. ディスクパック　h. その他（　）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公　表	ⓐ. ソースプログラムを公表する　b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1.　概　要

1.1　目的

$(1-x)^r(1+x)^s$ を重み関数とするGauss Jacobi 積分公式（1）

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^r(1+x)^s f(x)\,dx = 2^{r+s+1}B(r+1.\ s+1)\sum_{k=1}^{n}H_k f(ab)$$

の分点a_k、重みH_kを求める。

(1)で$B(\alpha,\beta)$ はベータ関数である。

1.2　計算法

分点a_kはn次のJacobi polynomial　$G_n^{r,s}(x)$ の零点であることを利用し、適当な近似値をNewtonの方法により修正して求める。

重みH_k は次式で与えられる。

$$H_k = \frac{4^{n-1}B(r+n,\ s+n)\ B(r+s+n,n)(r+s+2n-1)}{B(r+1,s+1)\ G_{n-1}^{r,s}(a_k)\ \frac{d}{dx}(G_n^{r,s}\ a_k)}$$

〔参考文献〕

A. H. Stroud and D. Secrest

"Gaussian Quadvature Formulas" Prentice－Hall, Inc.

§2. 使用法

2.1 呼び出し方法

CALL CGJQ (N, R, S, A, H, B, C, O, ILL)

2.2 パラメータ

N　整数型定数または変数名。分点の数を与える。

R　倍精度実数型定数または変数名。

(1)式における重み関数の$(1-x)$のベキを与える。R≧－0.999でなければならない。

S　倍精度実数型定数または変数名。

(1)式における重み関数の$(1+x)$のベキを与える。S≧－0.999でなければならない。

A　倍精度実数型配列名。大きさN以上の一次元配列。

分点が値の大きい方から順にセットされて戻る。A (K)＞A (L)　(K＞L)

H　倍精度実数型配列名。大きさN以上の一次元配列。

分点に対応する重みがセットされて戻る。

B, C　倍精度実数型配列名。いずれも大きさN以上の一次元配列。作業領域として用いる。

O　実数型定数または変数名。分点の収束判定値を与える。

O≦0.0 であれば10^{-16}が与えられたものとして計算する。

ILL　整数型変数名。

このサブルーチンが呼ばれる時：　分点の近似値の選び方を指示するパラメータ。(注)

戻ってきた時：　エラー処理のパラメータ。(エラー処理参照)

ILL＝0　正しく処理されている

ILL＞0　異常

注) このサブルーチンを呼ぶとき、ILL＜0であれば分点の近似値がA (K)　(K=1,2,…N)に与えられているものとして計算を行なう。

2.3 制限

N≧1, R2≧－0.999, S≧－0.999であれば計算を行なうが、Nがあまり大きいとoverflow を起す。たとえばN＝100, R＝－0.998, S＝30でoverflow が起きた。

2.4　エラー処理

次の場合はILLパラメータにそれぞれの値をセットして戻る。

a）$N \leqq 0$のとき　ILL＝1000

b）$R < -0.999$　または$S < -0.999$のとき　ILL＝2000

c）a_kが40回反復修正しても収束しないとき　ILL＝R

d）$\sum_{k=1}^{n} A(K)$が論理値$\dfrac{N\cdot(S-R)}{2N+S+R}$と異なるとき　ILL＝3000

いずれもエラーメッセージは出さない。

2.5　使用ルーチン

DABS

2.6　使用時間、精度

たとえば　R＝S＝0，N＝10　で64msec. 15桁以上の精度（O＝0.0とした場合）。

§3.　備　考

R. Sがあまり大きいとき、Nが小さい場合、また大きすぎる場合に正しい解が得られないことが多い（この場合、ILLが3000になることが多い）。

次の場合、いずれもILL＝3000となった。

R＝－0.998,　S＝30,　N＝50

R＝－0.998,　S＝50,　N＝2

R＝－0.9　,　S＝20,　N＝50

R＝－0.9　,　S＝50,　N＝2

No. 301　D 1／QU／F／CGLQ　　　登録年月日　昭和46年6月28日

Coefficients of Gauss Laguerre Quadrature

Gauss Laguerre 積分公式の係数

作　成	作成者　塩川浩三　　作成年月日　昭和46年5月1日
形　式	a. コンプリートプログラム　ⓑ. サブルーチン　c. 関数　d. 手続き　e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN　b. ALGOL　c. FASP　d. PL／I　e. その他（　）
使用機種	FACOM 230−60
使用メモリ数	ⓐ. コア(0.6)K語　b. ディスクパック(　)K語　c. その他(　)
使用機器構成	ⓐ. カードリーダ　ⓑ. ラインプリンタ　c. カードパンチ　d. 紙テープリーダ　e. 紙テープパンチ　f. 磁気テープ(　)ユニット　g. ディスクパック　h. その他（　）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公　表	ⓐ. ソースプログラムを公表する　b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1. 概　要

1.1　目的

$x^s e^{-x}$ を重み関数とする Gauss Laguerre 積分公式(1)

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)\,dx \fallingdotseq \Gamma(S+1)\sum_{k=1}^{n} H_k f(a_k) \qquad (1)$$

の分点 a_k と重み H_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ を求める。

1.2　計算方法

分点 a_k は n 次のLaguerre Polynomial $L_n^s(x)$ の零点であることを利用し、適当な近似値をNewtonの方法により修正して求める。重み H_k は次式を用いて求める。

$$H_k=\frac{\Gamma(n+s+1)\cdot a_k}{n!\,\Gamma(s+1)\{(n+s)\,L_{n-1}^s(a_k)\}^2}$$

〔参考文献〕

A. H. Stroud and D. Secrest

“Gaussian Quadrature Formulas” Prentice−Hall, Inc.

§2.　使用法

2.1　呼び出し方法

CALL　CGLQ (N, S, A, H, O, ILL)

2.2　パラメータ

N　　整数型定数または変数名。分点の数を与える。

S　　倍精度実数型定数または変数名。(1)式における重み関数のベキを与える。

S≧－0.999でなければならない。

A　　倍精度実数型配列名。大きさN以上の一次元配列。

分点が値の小さいものから順にセットされて戻る。A(K)＜A(L)　(K＜L)

H　　倍精度実数型配列名。大きさN以上の一次元配列。

分点に対応する重みがセットされて戻る。

O　　実数型定数または変数名。分点の収束判定値を入れておく。

O≦0.0 であれば10^{-16}が与えられたものとして計算する。

ILL　　整数型変数名。

サブルーチンが呼ばれるとき、分点の近似値のえらび方を指示するパラメータを与える。

戻ってくるときはエラー処理のパラメータをセットして戻る。

ILL＝0　正しく処理されている

ILL＞0　　エラーがあった（エラー処理参照）

注）このサブルーチンを呼ぶとき　1≦ILL＜Nであれば、分点a_k (k≧ILL) の近似値がA(k)に与えられているものとして計算する。またILLが負であれば、すべての分点の近似値がAに与えられているものとして計算する。

2.3　制限

N≧1，S≧－0.999であれば計算を行なうが、Nがあまり大きいとoverflowを起こす。

たとえば　S＝－0.998のとき、N＝100ではoverflowが起きた。

2.4　エラー処理

次の場合はILL パラメータにそれぞれの値をセットして戻る。

a) N≦0のとき　ILL＝1000

b) S＜－0.999のとき　ILL＝2000

c) a_kが40回反復修正しても収束しないとき　ILL＝k

d) $\sum_{k=1}^{n}$A(K) が理論値　N·(N＋S) と一致しないとき　ILL＝3000

2.5　使用ルーチン

DABS

2.6　使用時間、精度

N, Oによって異るが、たとえばS＝0、N＝10で55msec. 精度15桁以上。

§3.　備　考

（1）Sが大きいときは、Nが大きい場合またはNが小さすぎる場合に正しい解が得られない。

たとえば次の場合、ILL＝3000となった。

S＝20.0　　N＝2, N＝50

S＝50.0　　N＝5, N＝40

（2）$\int_0^\infty x\, e^{x^2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha-1}{2}}\, e^{t} f(t^{\frac{1}{2}})\,dt$

であるから、このサブルーチンを使って Gauss－Hermite 積分公式の分点、重みが計算できる。

No. 302　D1／QU／F／ROMBGS　　登録年月日　昭和46年6月28日

No. 303　D1／QU／F／ROMBGD

Numerical Integration using Romberg's Algorithm

数値積分　Romberg法

作　成	作成者　塩川浩三 作成年月日　昭和46年5月1日
形　式	a. コンプリートプログラム　b. サブルーチン　ⓒ. 関数 d. 手続き　e. 関数手続き
使用言語	ⓐ. FORTRAN　b. ALGOL　c. FASP d. PL／I　e. その他（　　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ. コア(0.4)K語　b. ディスクパック(　　)K語　c. その他(　　)
使用機器構成	ⓐ. カードリーダ　ⓑ. ラインプリンタ　c. カードパンチ d. 紙テープリーダ　e. 紙テープパンチ f. 磁気テープ(　　)ユニット g. ディスクパック h. その他（　　）
利用者の義務	a. プログラム名と作成者名を明記する　ⓑ 明記する必要はない
公　表	ⓐ. ソースプログラムを公表する b. ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

§1.　概　要

1.1　目的

有限区間の定積分を計算する。

1.2　計算方法

Romberg法を用いる。

〔参考文献〕

H. Rutishauser

"Ausdehnung des Rombergshen Prinzips"

Numer. Math. 5 48 (1963)

§ 2. 使用法

2.1 呼び出し方法

関数副プログラムであるから積分値の必要な所に

ROMBGS (N, XI, XF, FUNC, T, EPS, ILL)　　　(単精度)

または

ROMBGD (N, XI, XF, FUNC, T, EPS, ILL)　　　(倍精度)

と書けばよい。

2.2 パラメータ

N	整数型定数または変数名。最大反復回数を与える。
XI	実数型定数または変数名。積分領域の下限を与える。
XF	実数型定数または変数名。積分領域の上限を与える。
FUNC	文関数または関数副プログラム名。被積分関数を与える。 FUNC (x) の形で定義されていること。
T	実数型配列名。大きさN以上の一次元配列。作業領域として用いる。
EPS	実数型変数名。相対誤差の収束判定値を与えておく。絶対誤差がセットされて戻る。
ILL	整数型変数名。 ・0以下の値を与えておく。 ・エラー処理のパラメータをセットして戻る。 ILL≦0　　正常 ILL＞0　　異常

注)

①倍精度副プログラムROMBGDの場合、XI, XF, FUNC, T, EPS は倍精度実数型でなければならない。

②FUNCが関数副プログラムのときは、EXTERNAL宣言が必要である。

③k 回目の反復で得られた積分値を I_k とすると

$|I_k - I_{k-1}| \leqq I_k \cdot EPS$ で収束したとみなし、EPSに $|I_k - I_{k-1}|$ をセットして戻る。

2.3　エラー処理

次の場合はILLにそれぞれの値をセットして戻る。

N＜0のとき、ILLにN以上の値が与えられているとき	ILL＝10000
2^{-k}（kは反復回数）がEPSより小さくなったとき	ILL＝1000＋k
N回反復しても収束しないとき	ILL＝N＋1

2.4　使用ルーチン

ROMBGS………ABS

ROMBGD………DABS

§3．備　考

3.1　収束しないため　ILL＞0で戻った場合、次のように計算を続行できる。

```
      DIMENSION  T(10)
      ⋮
      EPS=1.0E-6
      SEKIBN=ROMBGS (5,0.0,FUNC,EPS,ILL) ………… (1)
      IF (ILL.LE.0)  GO  TO   100        …………( 2)
      EPS=1.0E-6                         ………… (2)
      SEKIBN=ROMBGS (10,0.0,FUNC,EPS,ILL) ………… (3)
  100 …………
      …………
      …………
```

このとき(2)でEPSを大きくしてもよいが、ILLの値を与えてはいけない。

3.2　使用時間・精度

$\int\frac{1+x+x^3}{(1+x^2)^{3/2}}e^x\,dx$を、$x$が0.5から0.5きざみで10まで変えていろいろな精度で計算した。

結果は以下の通りである。なお、精度は±2×EPS程度である。

EPS	ROMBGS	ROMBGD	SIMPD
	秒	秒	秒
10^{4}	0.3	—	—
10^{6}	0.07	1.0	2.3
10^{12}	—	6.9	75.0
10^{15}	—	13.9	389.0
10^{-17}	—	18.8	

No. 304　Y3／QC／Z／DB01　　登録年月日　昭和46年6月28日

CLEBSCH－GORDAN COEFFICIENT

クレブシュ・ゴルダン係数

No. 305　Y3／QC／Z／DB02

RACAH COEFFICIENT

ラカー係数

No. 306　Y3／QC／Z／DB03

NINE－J SYMBOL

9－J 係数

作　成	作成者 田　村　太　郎
改　訂	改訂者1　板倉　守　　改訂年月日　昭和44年4月23日 改訂者2　上村　正康*　　昭和46年5月1日
形　式	a．コンプリートプログラム　b．サブルーチン　ⓒ．関数 d．手続き　e．関数手続き
使用言語	ⓐ．FORTRAN　b．ALGOL　c．FASP d．PL／I　e．その他（　）
使用機種	FACOM 230－60
使用メモリ数	ⓐ．コア(1.3 / 1.4 / 1.0)K語　b．ディスクパック（　）K語　c．その他（　）
使用機器構成	ⓐ．カードリーダ　ⓑ．ラインプリンタ　c．カードパンチ d．紙テープリーダ　e．紙テープパンチ f．磁気テープ（　）ユニット g．ディスクパック h．その他（　）
利用者の義務	ⓐ．プログラム名と作成者名を明記する　b　明記する必要はない
公　表	ⓐ．ソースプログラムを公表する b．ソースプログラムの公表は一定期間保留する（　年　月　日まで）

*登録されたプログラムは、上村氏が東大ライブラリを九大FACOM 230－60用に書き換えられたものです。

§1.　概　要

Clebsh-Gordan係数、Racah係数及び9－j　Symbolを計算する関数型サブプログラムである。これらのコードは出来るだけ手短かに、また理解し易いように組んだつもりである。
これらのコードは、Argumentが非常に大きい場合（大体200程度まで）に使えるようにしてある。従って、重い粒子による散乱・反応とか、High-energy projectilesによる反応、散乱の場合にも使用することができる。

§2.　使用法

2.0　使用方法

¥LIED, ¥DAFILEのマクロを用い、自分でLIEDの御御文を書いてください。

¥DAFILEのパラメータで指定するファイル名は、QU. RB. A. LIBです。

〔例〕

```
¥NO
¥QJOB
¥FORTRAN
┌──────────────────────────┐
│ FORTRAN  ソースプログラム │
└──────────────────────────┘
¥LIED
NAME  EXQTPRGM, ENTRY= (PRG. MAIN)
CALL  SYSLIB
SGMT  SEG1
SELECT  RELBIN, FDNAME1
FIN
¥DAFILE    FDNAME=FDNAME1,
           FLNAME=QU.RB.A.LIB
┌──────────────────────────┐
│ データ                    │
└──────────────────────────┘
¥JEND
```

なお、コントロールカードの詳細については「センターニュース　No.14」及びセンター受付プログラム相談室に備えてある「ファイル利用のための手引き」を参照ください。共用ボリューム、私用ファイルの使い方と同様です。

2.1　田村太郎氏作成のCLEB, RAC 7, NINEJ'は、Subroutine型のSubprogram　であったが、使用頻度、及び使用上の便利のためにFunction型のSubprogramに書き直した。また、Argumentが適当でない場合には、Error Messageを書き出して、その値を 0.0 と出力するようにした。

これらのProgramは夫々Function Typeであるから、計算式の途中にArray nameと同じように使用出来、1語長実数型の正しい値をそのまま使用することが出来る。

次にArgumentの並べ方を説明する。

1) FUNCTION　CLEB (FJ 1, FM 1, FJ 2, FM 2, FJ 3, FM 3)

このProgramは、Clebsh-Gordan係数 (FJ 1, FM 1, FJ 2, FM 2, |FJ 3, FM 3) 即 (j, m_1, j, m_2, $|j_3$, m_3) の値を計算するものである。夫々のArgument の順序とTypeは

Arguments	Type	Physical meaning
F J 1	1語長実数型	j_1
F M 1	〃	m_1
F J 2	〃	j_2
F M 2	〃	m_2
F J 3	〃	j_3
F M 3	〃	m_3

2) FUNCTION　RAC 7 (FJ 1, FJ 2, FJ, FJ 3, EJ12, FJ23)

このProgramはRacah係数W (FJ 1, FJ 2, FJ, FJ 3, FJ12, FJ23) 即W (j_1, j_2, J, j_3; j_{12}, j_{23}) の値を計算するものである。夫々のArgumentsの順序とType は

Arguments	Type	Physical meaning
F J 1	1語長実数型	j_1
F J 2	〃	j_2
F J	〃	J
F J 3	〃	j_3
F J 12	〃	j_{12}
F J 23	〃	j_{23}

3）FUNCTION　U9J（FJ1, FJ2, FJ3, FJ4, FJ5, FJ6, FJ7, FJ8, FJ9）

このProgramは 9J 係数

$$\begin{Bmatrix} FJ1, & FJ2, & FJ5 \\ FJ3, & FJ4, & FJ6 \\ FJ7, & FJ8, & FJ9 \end{Bmatrix} \text{即} \begin{Bmatrix} j_1, & j_2, & j_5 \\ j_3, & j_4, & j_6 \\ j_7, & j_8, & j_9 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} j_1, & j_2, & j_{12} \\ j_3, & j_4, & j_{34} \\ j_{13}, & j_{24}, & J \end{Bmatrix}$$

の値を計算するものである。それぞれArgument の順序とType は

Arguments	Type	Physical meaning
FJ1	1語長実数型	j_1
FJ2	〃	j_2
FJ3	〃	j_3
FJ4	〃	j_4
FJ5	〃	j_{12}
FJ6	〃	j_{34}
FJ7	〃	j_{13}
FJ8	〃	j_{24}
FJ9	〃	J

2.2　エラーメッセージ

これらのProgramはArgumentの入れ方が適当でないときに次のError Message を書き出し、出力を0.0としてRETURNする。

I）FUNCTION　CLEB（FJ1, FM1, FJ2, FM2, FJ3, FM3）

（イ）ERROR * THERE ARE SOME NEGATIVE A. M. IN CLEB * J1 =……J2 = ………J3 =………

j_1, j_2, j_3 のどれかの値に負の実数が入っている場合

（ロ）ERROR * SUM OF MAGNETIC QUANTUM NUMBER IS NOT ZERO IN CLEB * M1 =……　M2 =……　M3 =……

$m_1+m_2-m_3$ の値が0にならない場合

（ハ）ERROR * SUM OF ANGULAR MOMENTUM IS NOT INTEGER IN CLEB * J1 =……　J2 =……　J3 =……

$j_1+j_2+j_3$ が整数にならない場合

(ニ) ERROR * TRIANGULAR CONDITIÓN IS BIOLATED IN CLEB * J1=…
J2=……　J3=……

j_1, j_2, j_3 が三角条件を満さない場合

(ホ) ERROR * ABS (M. Q. N). GT. A.M IN CLEB * J1=……, M1=……, J2=…,
M2=……, J3=……, M3=……

$m_i > j_i$ なる Arguments が入っていた場合

(へ) ERROR * INVALID USE OF (J.M) PAIRS IN CLEB * J1=……, M1=……,
J2=……, M2=……, J3=……, M3=……

$(j_i + m_i)$ が整数にならないものがある場合

II) FUNCTION RAC7 (FJ1, FJ2, FJ, FJ3, FJ12, FJ23)

(イ) ERROR * SOME ARGUMENTS ARE NEGATIVE IN RAC7 * J1=……,
J2=……, J=……, J3=……, J12……, J23=……

Arguments のどれかに負の実数が入っている場合

(ロ) ERROR * INVARID TRIANGULAR CONDITION IN RAC7 * J1=……, J2=
……, J=……, J3=……, J12=……, J23=……

Arguments の組に三角条件を満さないものがある。

III) FUNCTION U9J (FJ1, FJ2, FJ3, FJ4, FJ5, FJ6, FJ7, FJ8, FJ9)

(イ) ERROR * SOME ARGUMENTS ARE NEGATIVE IN UNINJ ***** J1=……,
J2=……, J3=……, J4=……, J5=……, J6=……, J7=……, J8=……, J9=……

Arguments のどれかに負の数が入っている場合

(ロ) ERROR * TRIANGULAR CONDITION IS INVALID IN UNINEJ ***** J1=
……, J2=……, J3=……, J4=……, J5=……, J6=……, J7=……, J8=……,
J9=……

Arguments の組に三角条件を満さないものがある。

2.3　所要時間：Arguments の大きさに依るが Test に使用した程度の Argument について

$　CLEB で平均約1/40秒

$　RAC7 で　　1/20秒

$　U9J で　　1/10秒

程度かかるものと思われたい。

2.4　精度：有効数字6桁以上

2.5 制限事項

これらのProgram は核反応の計算に使用されることを念頭においてあるので Arguments の最大値は 200近くまで使用出来るが、Argument の値が大きい場合多少精度は落ちるようである。テストの項参照。

2.6 使用ルーチン

U 9 J を使用する場合にはRAC 7 を同時に使用すること。RAC 7, CLEB は夫々単一、独立のルーチンである。

2.7 備 考

〈注 1〉"CLEB, RAC 7 の計算には、$\log_e(n!)$ の和の計算が分子・分母のそれぞれに入るので、Argumentsが大きすぎる場合には、Overflowする危険がある" と田村氏は注意しているが、普通の使い方をする場合にはほとんどその危険性はないものと思われる。

〈注 2〉CLEB と RAC 7ではそれぞれ$\log_e(n!)$を計算を始める前につくっているが、ここでHITAC 5020の計算機では、JOB の最初には Initial Clearance を行なうが、JOBの途中ではClear しない特性を生かしてFACLOG (3) の値が計算されたか、されていないかを判定して計算されていない場合には、FACLOG ($\log_e n!$) をつくる。

即、最初にCLEBなり RAC 7 なりを呼んだ時にだけこれらの値を計算してStore しておくようにしてある。従ってInitial Clearance を行わない計算やSubprogram からReturnする度にClearanceを行う計算機では、これらの値をMAIN Routine で計算しておいてCommon で受け渡すようにすればよい。

参考文献

1. M. E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum"
2. A. R. Edmond, "Angular Momentum in Quantum Mechanics"
3. A. De-Shalit and I. Talmi, "Nuclear Shell Theory"
4. T. Inoue, "Table of the Clebsch-Gordan Coefficients"
5. T. Ishidzu et al, "Table of the Racah Coefficients"
6. K. Smith and J. W. Stevenson, "A Table of Wigner 9 j Coefficients for integral and half integral values of the parameters", ANL−5776, and 5886

§3.　使用例

1）$(j_1,\ m_1,\ j_2,\ m_1,\ |\ j_3,\ m_3)=(2,\ 1,\ 3,\ -2\ |\ 4,\ -1)$

の値が必要な場合には、この値の必要な箇所に於て

CLEBSH＝CLEB(2.0, 1.0, 3.0, −2.0, 4.0, −1.0)

とおいてCLEBを呼べばCLEBSHには 0.59160817 の値が返ってくる。

2）$W(a, b, c, d; e, f)=W(2,\ 3, 3/2,\ 5/2;\ 3,\ 1/2)$

の値が必要な場合には、この値の必要な箇所に於て

RACAH＝RAC 7(2.0, 3.0, 1.5, 2.5, 3.0, 0.5)

とおいてRAC 7 を呼べば

RACAH＝−0.4638501 の値が返ってくる。

3）$P=(2,\ 1,\ 3,\ -2\ |\ 4,\ -1)\cdot W(2,\ 3,\ 3/2,\ 5/2;\ 3,\ 1/2)$

の値が必要な場合、この値の必要な箇所に於て

P＝CLEB(2.0, 1.0, 3.0, −2.0, 4.0, −1.0)*
　RAC 7 (2.0, 3.0, 1.5, 2.5, 3.0, 0.5)

とおいてCLEBとRAB 7 を呼べばPには−0.08660257 の値が返ってくる。

4）
$$Q=\begin{Bmatrix} 1/2 & 2 & 3/2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 1/2 & 2 & 3/2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 3 & 3 \end{Bmatrix}$$

の値が必要な場合には、この値の必要な箇所に於て

Q＝U 9 J (0.5, 2.0, 1.5, 3.0, 1.5, 2.5, 2.0, 3.0, 4.0)*
　U 9 J (0.5, 2.0, 1.5, 3.0, 1.5, 2.5, 2.0, 3.0, 3.0)

とおいてU 9 J を呼べばQには−0.00001283 の値が返ってくる。

5）
$$R=W(2,\ 3,\ 3/2,\ 5/2;\ 3,\ 1/2)\cdot\begin{Bmatrix} 1/2 & 2 & 3/2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$$

の値が必要な場合にはこの値の必要な箇所に於て

R＝RAC 7 (2.0, 3.0, 1.5, 2.5, 3.0, 0.5)*
　U 9 J (0.5, 2.0, 1.5, 3.0, 1.5, 2.5, 2.0, 3.0, 4.0)

とおいてRAC 7 とU 9 J を呼べばRは0.00058451 の値が返ってくる。