[03_06]九州大学大型計算機センター広報 : 3(6)

https://doi.org/10.15017/1467971

出版情報：九州大学大型計算機センター広報. 3 (6), pp.1-70, 1970-12-18. 九州大学大型計算機センター
バージョン：
権利関係：

CPMの計算

須永照雄 *

1. まえがき

最近、日程計画の管理にネットワークが応用されている。ここではまずCPMの基礎となるPERTの説明を行ない、次にCPMを解説する。

2. PERT

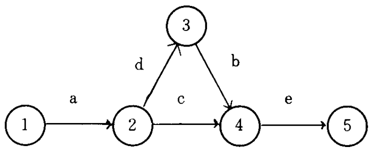
PERTとは、Program Evaluation and Review Techniqneの約で、1958年に米国で実用化された。

例としてはいま5つの工程よりなる計画がある。各工程に対し事前にしておくべき心要充分な工程を調べたものが、第1表である。

工程	事前の工程
a	
b	d
c	a
d	a
e	c，b

第 1 表

これをネットワーク（network）に書くと第1図となる。この図で各ノードに番号がつけられている。この番号付けは、アローの方向と矛盾していない。これをトポロジカル・オーダーリング(topological ordering)という。実際の計画を表わす回路では必ずこれができる。



第 1 図

次に第2表のように、所要日数が与えられたとき、最低何日でこの計画が遂行できるかを計算しよう。

工程	i	j	日数Dij
a	1	2	5
b	3	4	8
c	2	4	18
d	2	3	5
e	4	5	5

第 2 表

1970−12

そのために、各ノードを最も早く出発できる時刻を計算する。これを各ノードの最早時刻(eavliest node time)といい

t_i^E

で表わす。

$t_o^E = 0$

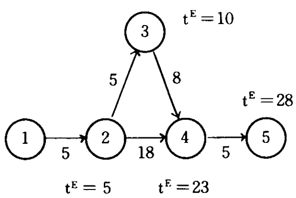
$t_i^E = \max\limits_R \, [t_R^E + D_{Ri}]$

で計算できる。ここD_{Ri}はノード(i)に入る工程の所要日数である。第2図のような結果となる。

次に最低の28日で計画を終了させるために、あるノードが遅くとも完了しなくてはならない時刻を最遅時刻(latest node time)といい

$t_n^R = t_n^E$

$t_i^L = \min \, [t_k^L - D_{iR}]$

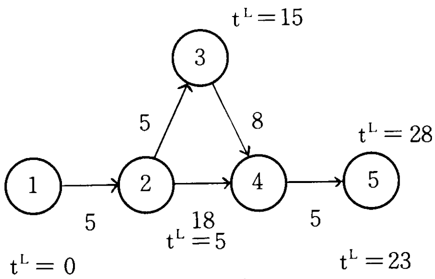


第 2 図

* 九州大学 工学部 生産機械工学科

より計算できる。

さて、最低28日かかることが分ったが、そのとき、全然余裕のない工程がある。①→②、②→④、④→⑤ 等がそうである。これらは１つのパス(path、道)を作り、クリティカル・パス(critical path)といい、PERTで重要な概念である。



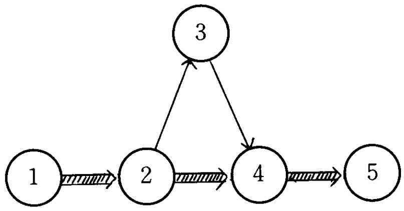
第 3 図

各工程の余裕に次のものがある。

トータルフロート (total float)　：$TFij = t_j^L - (t_i^E + Dij)$

フリーフロート (free float)　：$FFij = t_j^E - (t_j^E + Dij)$

TFはその工程が許される最大の余裕である。クリテイカル・パス上の工程のTFは零であり、逆も真である。FFは計画が最早時刻で進行したときの余裕である。



第 4 図

第３表にTF、FFとクリテイカルなものを示す。

topological orcleringは大きいネットワークではやっかいな仕事である。計算機のプログラムではデータとしてノード番号は区別さえつけば、任意のものでよいことになっている。次にT.O.しない一計算法を述べる。ここでのプログラムはこの方法を使っている。

i）すべてのt^Eを０とおく。

ii）a工程が５日かかるからノード②のt^Eは５以上。

iii）b工程は８日より　　　ノード④のt^Eは８以上。

iv）c工程は18日より　　　ノード④は23日以上。

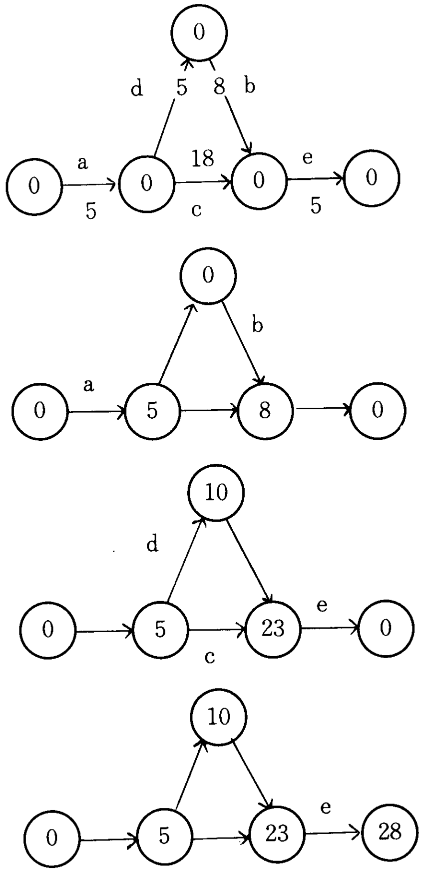
v）dは５日より　　　ノード③は10日以上。

vi）eは５日より　　　ノード⑤は28日以上。

その他は変化しない。

工程	TF	FF	CP
a	0	0	*
b	5	5	
c	0	0	*
d	5	0	
e	0	0	*

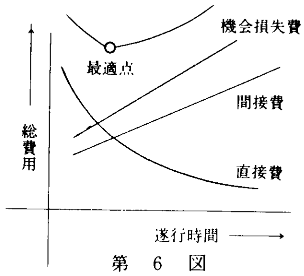
第 3 表



第 5 図

3．CPM

Critical Path Methadの略でPERTに費用を考慮するものである。PERTをPERT／TIMEということに対し、CPMをPERT／COSTということもある。

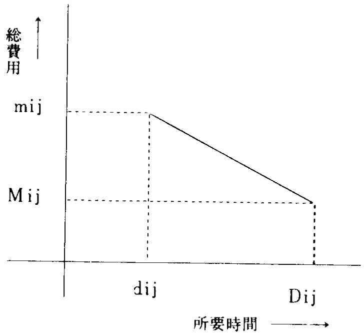


第 6 図

工期を短かくすると、工事費（直接費）はあがるが、一方、短縮による利益のあがることもある。

CPMの目的は第6図のように最適工期を求めることである。

一つの工程についてみると、費用と所要時間との関係は、第7図のように近似的に直線で表わせる。



第 7 図

Dij＝標準時間

dij＝特急時間

yij ＝所要時間

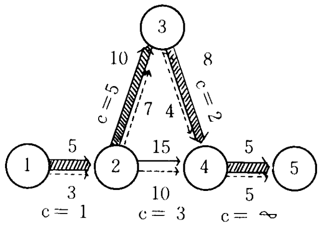
dij≦y ij≦Dij

なる関係がある。

Cij＝(mij－Mij)／(Dij－dij)

を費用勾配という。

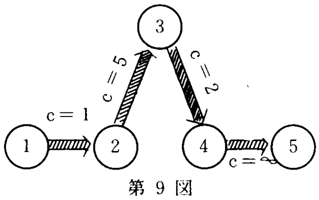
CPMは各工程の費用勾配が与えられたとき、工期を短縮するには、どこの工程をどの位短縮したらよいかを論ずる。



第 8 図

前例の第1図に示すアローダイアグラムで、第4表のように、費用勾配を付加えたものについて、CPM計算をする。標準時間では28日かかり、費用はそのとき100万円とする。

右の表を第8図に図示した。28日を短くしようとしたら，クリテイカル・パス(CP)を短くしなければならぬ。最も経済的な短縮は①—②で、ここで2日短縮できる。短縮する所をみつけるには、CPを第9図のように書き、各アローにフローの限界Cijが与えられていると考える。そのとき①から⑤へフローを最大どの程度流せるかという問題にする。これをMin cut−Max flowの定理と言う。次に③—④を短縮するのが経済的である。ここは3日以上短縮すると、他に影響がある。

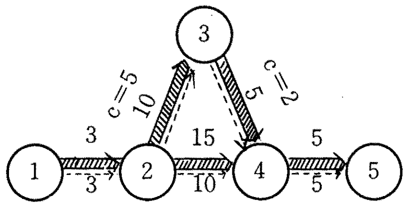


第 9 図

工程	j	i	Dij	dij	Cij
a	1	2	5日	3日	1 5/日
b	3	4	8	4	2
c	2	4	15	10	3
d	2	3	10	7	5
e	4	5	5	5	∾

第 4 表

かくて第10図を得る。このときCPは第11図となり、この場合のMax−flowは５で③―④、②―④がMin−cutとなる。第10図より②―④、③―④は１日短縮できる。かくて第12図のCPを得る。かくて第13図のCPを得る。Min−cutは②―③、②―④であり、第12図よりここは３日短縮できる。



第 10 図

以上の結果を図示すると第14図となる。

このようにCPMの手法は次の如くなる。

i）CPをみつける。

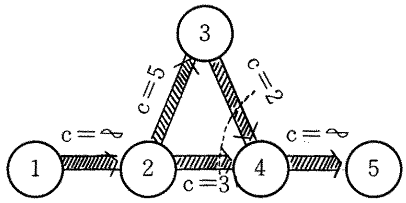
ii）CP上で費用勾配のMin−cutをみつける。

iii）最小カットの所要時間をその費用勾配で縮められる限界まで縮めた日程を作る。

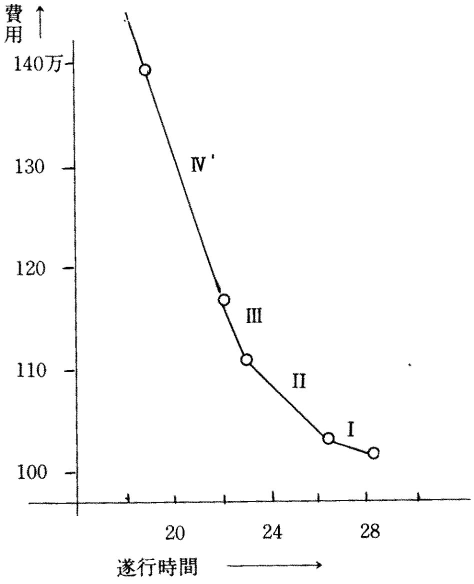
iv）費用増分を計算する。

v）新しくできた日程をもとにして(i)にもどる。

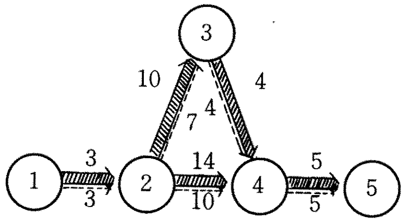
これを短縮可能になるまで続ける。



第 11 図

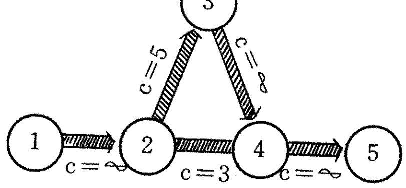


第 14 図



第 12 図

今度、このCPMの計算のプログラムをライブラリプログラムとして登録しました。使い方、その他については資料の欄を参照ください。



第 13 図