

遺伝的手法による関数近似を用いた時系列における ジャンプ過程の推定とその予測と最適化への応用

譚, 康融
久留米大学経済学部 : 教授

中西, 一
佐賀大学経済学部 : 准教授

時永, 祥三
九州大学大学院経済学研究院 : 教授

<https://doi.org/10.15017/14637>

出版情報 : 経済学研究. 75 (5/6), pp.93-111, 2009-03-31. 九州大学経済学会
バージョン :
権利関係 :



遺伝的手法による関数近似を用いた時系列における ジャンプ過程の推定とその予測と最適化への応用

譚 康 融
中 西 一
時 永 祥 三

1 まえがき

近年、時系列において発生する急激なジャンプ状の変動（以下ではジャンプ過程と呼ぶ）を含むモデルについて広く応用がなされており、例えば株価や為替レート変動の分析へと適用されている [1]-[8]。また、インターネットトラフィックにおけるバーストを予測する方法を基礎として、入力規制などによるリスク回避手法へと適用されている [9]-[11]。電力市場の自由化により価格の大幅な変動が観測されており、これをモデルとして組み込んだ設備の運用計画が効果的であることが示されている [12][13]。しかしながら、これらの研究ではジャンプ過程生成のモデルはあらかじめ既知とされている問題があり、時系列生成のモデルそのものを推定する方法が必要である。本論文では遺伝的手法である遺伝的プログラミング (Genetic Programming: GP) および遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA) による関数近似を用いた、時系列におけるジャンプ過程の推定とその応用について述べる [14]。

これまでの研究においてジャンプ過程を変動要因に含む時系列生成モデルは、金融ポートフォリオや生産システム、電力システムの運用において注目されており、リスク分析などに適用されている [1]-[8][9]-[13]。また、GPS におけるパルス状のサブ信号を適応フィルタを用いて検出する問題も議論されている [7]。これらの変動を推定する問題に関しては、ジャンプ発生の確率分布を推定する問題あるいは時系列における変動を状態のマルコフ過程のスイッチングとして捉え、拡張されたカルマンフィルタにより状態推定することが行われている [11]。しかしながらこれらは、あらかじめ生成モデルを仮定したものであり、ジャンプ過程の推定を基礎とした予測方法にそのまま用いることはできない。時系列のとり値の分布関数を推定してジャンプ過程を予測する方法論も存在するが、直接的な推定方法ではない [15]。本論文では、遺伝的手法を用いてジャンプ過程の生成を関数近似により推定する方法であり、関数形推定による予測や評価関数の検証に有効である [14]。

本論文ではまず、時系列生成が確定的な関数で記述される部分とジャンプ過程部分、およびブラウン運動による部分からなる加法的なモデルを仮定する。次にこれらのそれぞれの部分に対して、逐次的な近似により時系列の構成部分を生成するモデルの記述関数を推定する。なお、時系列生成のモデルを関数として直接的に推定し、近似する方法は、価格変動などを考慮した生産や投資のシステムにおける最適化問題を解析する場合に、モデル化のための偏微分方程式の導出に極めて有効

であることを述べる. 時系列生成モデルにおける第 1 番目の確定的変動部分の推定においては, 時系列の生成がなされる関数を GP 手法を用いて推定する [16]-[28]. 第 2 番目のジャンプ過程部分は, 時系列の値を変数として含む条件式で記述されると仮定し, その発生確率を規定する関数を GA により推定する. この場合, 同時にこのジャンプの大きさの分布を推定する. 次に, 観測時系列から確定的な部分およびジャンプ過程変動を除去した時系列を求め, 正規乱数にしたがうと仮定した場合の密度関数を推定する. 以上の操作を, 関数近似が満足なレベルに達するまで繰り返す. GP および GA 手法による時系列生成モデルが推定された段階で, 次の時刻における時系列のジャンプ発生を予測する手法などへと応用する [6]-[8][11]-[18]. 応用例として人工的に生成された時系列データに対する予測シミュレーションと, 時系列モデルを埋め込んだ評価関数の最適化問題への適用を示す.

以下, 2. では, ジャンプ過程変動を含む時系列モデルの推定について述べる. 次に 3. においては, 遺伝的手法による関数推定の方法について整理する. また 4. では応用例として, 人工的に生成したジャンプ過程変動を含む時系列からのモデル推定と時系列予測, モデルを含む最適化問題への適用について示す. 5. ではパラメータとモデル推定の関連を考察する.

2 ジャンプ過程変動を含む時系列モデルの推定

2.1 ジャンプ過程を含む時系列のモデル

時系列生成のモデル手法としてブラウン運動を基本とする方法が多く存在するが, 現実の世界では, このような緩やかな変動だけではモデル記述ができないことが見出され, ジャンプ過程などの変動要因を含むモデルで記述する方法への拡張がなされている. これまでの研究において価格にジャンプ過程を変動要因として含む問題が考察され, さらに価格にこのような変動を組み入れた株式ポートフォリオが提案されている [1]-[8][12][13]. これらの成果は価格変動にジャンプ過程を含むモデルとして証券投資などにおいて適用がなされているが, 特に Thompson らの研究では, ジャンプ過程を状態依存にすることで一般化し, 発電事業の評価へと応用している [12]. このようなジャンプ過程は, 一般的な確率微分方程式により記述される. 例えば, 価格 $P(t)$ の挙動は, 次のように記述される.

$$dP(t) = \alpha(P(t), t)dt + \sigma(P(t), t)dz + H(P(t), t) \quad (1)$$

$$H(P, t) = \sum_{k=1}^M \theta_k(P(t), t, J_k) dq_k \quad (2)$$

$$dq_k = \begin{cases} 0, & 1 - \epsilon_k(P)dt \quad \text{の確率で,} \\ 1, & \epsilon_k(P)dt \quad \text{の確率で.} \end{cases} \quad (3)$$

ここで, $\alpha(\cdot), \sigma(\cdot)$ は任意の $P(t), t$ に関する関数であり, dz はブラウン運動の微分値である. また dq_k は 0 あるいは 1 をとるポアソン過程である. dq_k は微小時間 dt におけるジャンプ発生確率に対応し, $\epsilon_k(P, t)$ はこのジャンプ発生の単位時間当たりの確率である. また, $\theta_k(P(t), t, J_k)$ は, $P(t), t$ およびある定められた確率分布 J_k から生成される確率変数の関数である. 最後の項が, ジャンプ状の価格変動に対応している. なお, これらのジャンプ過程は価格 P について種類が M 個存在す

ると仮定しているので、式 (2) において総和をとっているジャンプの種類を示す添え字 k の範囲は、 $k = 1$ から $k = M$ までとなっている。

以下では、この式における第 1 項、第 2 項をそれぞれ確定部分とブラウン運動部分と呼び、第 3 項をジャンプ過程部分と呼ぶことにする。なお、ブラウン運動部分は、株価など典型的な時系列においてはやや単純な形となることを仮定することが多いので、以下の議論では σ を定数とする次の形に限定しておく。

$$\sigma(P, t) = \sigma P \quad (4)$$

以上のようなことを仮定した場合、推定すべき関数やパラメータは次のようになる。

ブラウン運動部分: σP

確定部分: $\alpha(P, t)$ の関数形

ジャンプ過程部分: $c_k(P), \theta_k(P, t, J_k)$

2.2 時系列生成モデルを関数形で推定する意義

以下において、本論文の目的であるジャンプ過程を含む時系列生成のモデルを遺伝的手法で推定・近似する方法の基本を述べる前に、モデルを関数で近似する意義について述べておく。この意義は次のような点である。

(1) 関数により性質が分析できる。

(2) 資産運用を最適化する問題 (偏微分方程式) を解く計算が簡素化される。

まず (1) については、関数形による判断が行える利点がある。第 2 番目については、生産や資産運用のシステムにおける最適化問題を解くことに関連している。資産変動や価格を時系列モデルとして記述すると同時に、複数の時系列モデルを組み入れた評価関数を最大化する必要がある。この場合、資産価格の時系列の間において任意の変動は許されず、資産配分に矛盾がないこと (裁定なしの条件と呼ばれる) が満足される必要がある。この条件を組み入れた資産配分最適化のモデルは、1 つの偏微分方程式に帰着され、この偏微分方程式の解が最適な政策を与えている。例えば、資産を V とし、資産価格を P としそのモデルを $dP = \alpha(P, t)dt + \sigma(P, t)dz$ とした場合 (dz はブラウン運動の微分値を表す) には、資産運用を最適化する問題は、 $\alpha(P, t)\partial V/\partial P$ など係数 $\alpha(P, t)$ を直接的に含む偏微分方程式を解く問題に帰着される。時系列の変動過程が関数で記述されている場合には、このようにして、最終的に帰着される偏微分方程式の形は簡潔なものとなる。一方、もし時系列生成のモデルが数値計算の結果として与えられるならば、偏微分方程式を取り扱う手順は極めて複雑なものとなる。

2.3 モデル推定手順の概要

次に、モデルに含まれる関数やパラメータを推定する手順の概要について説明する。この手順においては、確定部分とジャンプ過程部分のモデルに含まれる関数を、GP および GA 手法により推定することが基本となっている。この場合、それぞれの部分を推定する前提として、前のステップで推定された時系列の推定値を用いる。すなわち確定部分 (ジャンプ過程部分) を推定する場合には、ジャンプ過程部分 (確定部分) は前のステップで推定されたジャンプ過程部分を前提にする。この方

法をアルゴリズムとして示す.

(ステップ 1) 移動平均によるジャンプ部分抽出と関数推定

モデル推定の対象となる観測時系列 $P(t)$ の差分をとった時系列 $x(t) = P(t) - P(t-1)$ を分析対象とする. 時系列 $x(t)$ に対して移動平均操作を適用し, 時系列 $x_a(t)$ を求める. なお移動平均の次数は, 7 次とやや高めにとる. 移動平均を差し引いた時系列 $x(t) - x_a(t)$ の振幅の大きな部分を, 適切に定めた閾値を用いて検出し, ジャンプ発生を特定する. もしジャンプの発生が特定されたらこの部分をジャンプ部分 $x_j(t)$ とし, この部分を除去した時系列部分にあらためて移動平均を適用する. この時系列 $x_j(t)$ から, ジャンプ過程部分の生成モデルを記述する関数形を推定する. この場合, 複雑な関数を用いてジャンプ過程部分を記述する関数やパラメータを直接的に推定することは難しいので, ジャンプ発生の確率を現在の観測値 $P(t)$ で表現する線形関数であると仮定する. またジャンプの振幅を生成する正規乱数を仮定し, この分布をデータから推定する.

(ステップ 2) 移動平均から確定部分の関数の初期値の GP 推定

$x(t)$ に対する移動平均である時系列 $x_a(t)$ に対して, GP 手法を用いて確定部分の関数である $\alpha(P)$ の形を推定する ($\hat{\alpha}(P)$ としておく). この関数の形を, 以下のステップの初期値として用いる. 同時に関数を仮定した場合の確定部分の時系列の推定値を計算しておき, これを $\hat{x}_d(t)$ とする.

(ステップ 3) ブラウン運動部分のパラメータ推定

もとの観測された時系列 $x(t)$ から, 確定部分とジャンプ過程部分に対応する時系列 $\hat{x}_d(t), x_j(t)$ を取り除いたもの (これを $y(t)$ としておく) がブラウン運動部分であると仮定し, この 2 つの部分除去した時系列 $y(t)$ から計算される分散を, 単純に分散 σ であるとする. この分散を仮定した場合に, 時系列の振幅が正規分布をしているかを統計的に検定する. その結果があらかじめ定めた基準 (有意性レベル) を満足していれば繰り返しを終了し, そうでない場合には, 次のステップに進む.

(ステップ 4) 繰り返し

ステップ 1 からステップ 3 を必要回数だけ繰り返す. ただしステップ 1 におけるジャンプ部分の抽出においては, 移動平均を用いるのではなく, 前段のステップ 3 で推定された確定部分の推定値 $\hat{x}_d(t)$ を時系列 $x(t)$ から差し引くことで行う. またステップ 2, 3 においては, ブラウン運動に相当する部分からヒストグラムを作成し, 正規分布の形状に近くなるようにブラウン運動に相当する時系列サンプルの値を調整し, 時系列の修正を行う. サンプル数は GP による関数推定では過学習を防ぐため 200 個以下としているので, この作業は容易である. このブラウン運動に相当する部分の修正を行い, これを時系列 $x(t)$ から引き去った時系列 $x_a(t)$ を, あらためて GP による確定部分推定の対象とする

3 遺伝的手法による関数推定

3.1 確定部分の関数の GP 推定

確定部分の関数である $\alpha(P, t)$ は変数 P と t の関数であるので, 関数の形状の複雑さを除けば, GP 手法の適用は直接的である. 本論文で用いる GP 手法については, すでに多くの記述があるので, 以下では要点のみを簡単にまとめておく [16]-[27]. なお, 話を分かりやすくするために, GP 手法により時系列を予測する関数を近似する場合をとりあげる.

方程式は木構造で表現できるが,GP 手法を適用するにあたりこれを前置表現 (prefix representation) により置き換えておく. 例えば, 方程式 $x_1(t) = [3x_1(t-1) - x_2(t-1)] \times [x_3(t-1) - 4]$ は, 次のように表現する.

$$\times - \times 3x_1(t-1)x_2(t-1) - x_3(t-1)4 \quad (5)$$

このような前置表現のそれぞれを個体とよぶ. 次に,GP により表現された個体の解釈については, 個体により与えられる式 (5) に示すように表現された方程式の右辺の形をもとにして, 関数の値を求めることにより個体の近似能力を計算する. 個体により計算された関数の値 $\hat{x}(t)$ と観測された時系列データ $x(t)$ との 2 乗誤差は近似度を与えるので, この逆数により個体の適合度を定義する.

次に, GP により個体を性能の良いもの (今の場合には関数近似の能力の高いもの) に変換していく方法である. 個体の集合 (プール) の能力をたかめることは, 個体に対して交差処理, 突然変異処理を行うことにより可能である. このため, *StackCount* というカウンタを用いる.

StackCount の値は, 前置表現で表現された個体のストリングを左側からサーチしていき演算記号に出会うとその数値を 1 つ増やし, 被演算子に出会うとその数値を 1 つ減らす操作を実施した結果である. 個体のストリングの全体をサーチし終えたあとに, *StackCount* の数値は必ず 1 になる. 従って, GP における初期個体を生成するとき, この条件を満足しないものは個体として採用しない. 適合度に応じて 2 つの個体 A, B を選択したあと個体 A の交差位置を乱数により選択し, この位置における *StackCount* を計算しておく. 次に, 個体 B について同じ *StackCount* をもつ位置を検出し, 等確率で, ある 1 つの交差点を確定する. これらの位置を境界として, それぞれの個体の前半と後半を, 相互に交換した個体が offspring として生成される.

以上のような方法をアルゴリズムとしてまとめると, 次のようになる [1]-[5][9]-[13].

(ステップ 1)

乱数を用いて被演算子, 演算記号の並びからなる初期個体のプールを構成する. 個体の表現の妥当性を, すでに述べた *StackCount* を検査することにより行う.

(ステップ 2)

個体に表現された関数をもとに, それぞれの個体により得られる予測値を求める. これをもとにして, 個体における適合度を求める.

(ステップ 3)

次に示す適合度から変換された確率に応じて, 2 つの個体 i が選択される.

$$p_i = (S_i - S_{min}) / \sum_{i=1}^N (S_i - S_{min}) \quad (6)$$

ここで, S_{min} は適合度の最低値, N はプールの大きさである. この 2 つの個体に対して遺伝的操作を行い, 生成された新しい個体を次のステップにおける代替個体のプールである P-B に格納しておく. このような新しい個体の生成を, 規定回数繰り返す. 新規個体の生成が終了したら, プール P-A の個体の中で, 相対的に適合度の低い個体を, プール P-B の個体により置き換える.

(ステップ 4)

ステップ 2 からステップ 4 までの交差処理を, 決められた個数の個体に適用し, 新しい個体のプールを作成したあとに, 突然変異を実施する. 任意に個体を選択して, この個体の被演算子, 演算記号の部分, 任意に選択した被演算子, 演算記号により置き換える.

(ステップ5)

ステップ2からステップ4までの操作を、規定回数繰り返す。

これまでのわれわれの研究において、GP手法による時系列生成モデルの推定の精度について示している [16]。また問題は異なるが、GP手法によるプロダクションルールの推定への適用も行っている [22]。これらの結果が示すように、GP世代を300回程度繰り返すことにより、十分な精度の推定が得られることが分かる。

3.2 GAによるジャンプ過程部分の推定

前の節で述べたアルゴリズムで、やや複雑な処理を必要とするものがジャンプ過程部分を決める関数とそのパラメータの推定である。いま式(1)~(3)に示すようなジャンプ過程の生成モデルを仮定した場合には、この発生確率を与える ϵ_k を推定することが必要である。このような処理を、観測された時系列から直接的に行うには、利用可能なデータが十分ではないことと、推定方法(関数の近似方法)が極めて複雑になる問題がある。

このようなことを考慮して、本論文では、GAを基礎とした近似方法を用いて、ジャンプ過程部分の生成に対する条件を推定する。以下ではジャンプ過程部分の関数推定の概要を述べる。

(1) ジャンプ過程部分の発生条件のGAによる推定

すでに述べたようにジャンプ過程部分の発生は、その発生確率 ϵ_k と、大きさにより規定される。本論文では発生確率を、以下に示すように、価格の閾値 T_k を境界として、 T_k 以上と T_k 以下で、2つの発生確率の大きさが価格の線形の式で与えられると仮定する。具体的には、次のような式でジャンプ過程部分が生成されると仮定する。

$$\epsilon_k = \begin{cases} \beta_{0k} + \beta_{1k}P, & P \leq T_k, \\ \gamma_{0k} + \gamma_{1k}P, & P > T_k. \end{cases} \quad (7)$$

この仮定を拡張して、境界となる閾値 T_k をやや複雑にしたり、確率を与える式を P の2次以上の関数とすることも可能であるが、時系列からこれらの数値を推定する場合に式を複雑にする効果も少なく、また式の推定そのものの難しくなることが予想される。

GAにおける個体ストリングとしては、 $T_k, \beta_{0k}, \beta_{1k}, \gamma_{0k}, \gamma_{1k}$ をコード化したものを用いる。すでに観測された時系列からジャンプ過程部分が抽出されていることを仮定しているので、GAにより上に述べたパラメータの最適化をはかる。

(2) ジャンプの大きさの分布の推定

次に、ジャンプ過程部分が発生した場合の、その振幅の大きさを推定することが必要である。これに関しては次の節のジャンプ生成のモデルで詳述するが、ジャンプを含む価格の時系列 $P(t)$ から差分をとった時系列 $x(t) = P(t) - P(t-1)$ の中に、 $x(t) = \dots + (J_1 - P(t-1)) + (J_2 - P(t-1)) \dots$ の形で含まれていると仮定する。ここで J_1, J_2 などは現在の価格 $P(t-1)$ からの乖離をジャンプとして規定する正規乱数である。したがって、時系列におけるジャンプ部分が $x_j(t)$ として特定された場合には、ジャンプ過程部分におけるジャンプの分布関数 J_1, J_2 (J_1, J_2 などは同時には発生しないと仮定する) は、 $x_j(t) + P(t-1)$ として計算されるデータから推定することができる。

4 時系列モデル推定とその応用例

4.1 人工的なジャンプ過程モデルの推定

本論文で行っているパラメータの設定は、特に具体的な対象に基づいて行ったものではないが、これまでのジャンプ変動過程のモデルを用いた先行研究を参考にしている。電力オークション市場における価格変動などを参考にすると、ジャンプ発生時には最大で定常時の10倍程度まで価格が上昇する現実のデータが存在する。したがってジャンプ過程の発生時には、このような範囲の価格変動を再現できるようなパラメータの設定にしている。同様に、ジャンプが発生したあと、急速にもとの価格レベルにもどることが現実の市場で確認されており、これを再現できるようなパラメータの設定にしている。以下では、価格を一時的に上昇(下降)させるジャンプを、上昇(下降)ジャンプと呼ぶことにする。

それぞれのジャンプ過程は価格の急激な上昇/下降(以下では go と表現)と、この時点からのもとのレベルへの復帰を行うための価格の減少/増加(back と表現)の2つのポアソン過程から成り立っている。式(1)~(3)において $M = 2$ と仮定し、 $k = 1$ は上昇/下降の開始時におけるジャンプ(go)を、 $k = 2$ はこのジャンプからもとのレベルへの復帰ジャンプ(back)に対応させる。

次に、価格変動の確定部分は、原理的には複雑な形状を仮定することができるが、ブラウン運動とジャンプ変動が、それぞれ別の項として含まれているので、確定部分は基本的に正弦波にしたがう緩やかな周期変動で代表させておく。変動のモデル(以下では代表事例と呼ぶ)を以下に示す。

(1) 上昇ジャンプ過程の場合

$$dP = 0.4[15 \sin(2\pi t/24) + 150 - P]dt + \sigma_P P dz_P + (J_1 - P)dq_1 + (J_2 - P)dq_2, \quad (8)$$

$$\sigma_P = 0.2, J_k \sim N(a_k, s_k), a_1 = 700 \\ s_1 = 100, a_2 = 100, s_2 = 10. \quad (9)$$

dq_1, dq_2 は、それぞれ、確率 $\lambda_{go}(P)dt, \lambda_{back}(P)dt$ で1になる。

$$\lambda_{go}(P) = \begin{cases} 0.01P/300, & P \leq 300, \\ 0.01, & P > 300. \end{cases} \quad (10)$$

$$\lambda_{back}(P) = \begin{cases} 0, & P \leq 300, \\ 0.85, & P > 300. \end{cases} \quad (11)$$

(2) 下降ジャンプ過程の場合

式(8)~(10)において、 $J_k(\cdot)$ などが次のようになる。

$$J_k \sim N(a_k, s_k),$$

$$a_1 = 30, s_1 = 10, a_2 = 100, s_2 = 10 \quad (12)$$

dq_1, dq_2 は、それぞれ、確率 $\lambda_{go}(P)dt, \lambda_{back}(P)dt$ で1になる。

$$\lambda_{go}(P) = \begin{cases} 0.01, & P \leq 120, \\ 0.00025(160 - P), & P > 120. \end{cases} \quad (13)$$

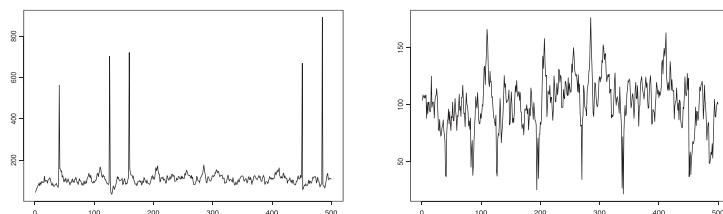


図 1: 上昇(下降)ジャンプ過程を含む価格変動(上:上昇ジャンプ, 下:下降ジャンプ)

$$\lambda_{back}(P) = \begin{cases} 0.85, & P \leq 120, \\ 0, & P > 120. \end{cases} \quad (14)$$

ただし, 式 (8) については, 境界値ゼロをもうけており, ジャンプなどの変動により P の値は負にならないように調整しておく。

なお, これらのパラメータを変更する影響の概要については, 以下のようにまとめられる. 上昇(下降)ジャンプの場合の確率 $\lambda_{go}(P)$ は, 上昇(下降)ジャンプの発生頻度を与え, これらが大きいと上昇(下降)ジャンプが頻発する. 同時に上昇(下降)ジャンプの場合の確率 $\lambda_{back}(P)$ が大きい場合には, 価格が上昇(下降)してもとのレベルに戻る時間が短いことを意味しており, 確率が小さい場合には, 上昇(下降)したまま継続する時間が長くなる.

時系列生成モデルを推定するためのシミュレーションの条件は, 以下のように設定している.

観測時系列のサンプル数: $N_s = 50000$

GA の個体における 1 変数あたりビット数: 5

GA の個体数: 1000

GP における個体長さ: 30, GP における個体数: 1000

GA 適用の最大回数: 1000 回

GP 適用の最大回数: 初回に 10000 回あとは 500 回

GP に用いる関数: 加減算, 割算, 絶対値, 正弦波

モデル推定手順の実施回数: 最大 10 回

なお, GA によるパラメータ推定においては数値のレンジが異なっているので, 適切な正規化を行っている. モデル推定における GP, GA 適用回数(世代)は, 初回だけは収束に時間がかかるので十分な回数にとっているが, モデル推定の繰り返しが第 2 回目以降になると前段での推定を初期値として用いるので, 回数を大幅に削減することができる.

図 1 には, このようなジャンプ過程を含む価格変動を示している. 表 1, 2 には本論文で示す遺伝的手法により, それぞれの構成部分を記述する関数と, パラメータの推定を行った結果を示している. 表 1 においては, 上昇(下降)ジャンプを含む場合の関数 $\alpha(P, t)$ の推定形を示している. 表 2 においてパラメータの推定値は V_s として示している. 関数 $\alpha(P, t)$ の推定の 2 乗誤差は 0.0001 である. また人工的なモデルなので, ジャンプが実際に発生した時刻は分かっているので, これを本手法で検出した時刻と比較することができる. 上昇/下降ジャンプごとに, これらが一致する割合を $U_k, W_k, k = go, back$ として定義する. 代表事例においては $U_{go} = 0.823, U_{back} = 0.987, W_{go} = 0.98, W_{back} = 0.87$ とな

表 1: 代表事例に対する関数 $\alpha(\cdot)$ の推定

upward	$0.48[\sin(0.273(t + 0.51) + 138.5 - 1.12P)]$
downward	$0.53[\sin(0.235(t - 0.32) + 148.5 - 1.20P)]$

り平均して約 93.8%の場所が一致することが確認できる。これらの結果から分かるように、GP および GA 手法による時系列の構成部分の関数推定は良好である。

表 2: 代表事例に対するパラメータの推定

upward	V_s		V_s
σ	0.14	T_1	283.9
T_2	309.7.0	a_1	671.9
s_1	97.8	a_2	78.3
s_2	9.5	β_{01}	0.0004
$\beta_{11} * 300$	0.0112	γ_{01}	0.0002
γ_{11}	0.00967	β_{02}	0.00005
β_{12}	0.0004	γ_{02}	0.968
γ_{12}	0.0005		
downward	V_s		V_s
σ	0.11	T_1	116.1
T_2	122.4	a_1	41.2
s_1	11.1	a_2	133.0
s_2	10.3	β_{01}	0.00967
β_{11}	0.0004	γ_{01}	0.00967
$\gamma_{11} * 100$	-0.0249	β_{02}	0.903
β_{12}	0.0004	γ_{02}	0.0004
γ_{12}	0.0005		

5 時系列予測と最適化問題への適用

5.1 時系列値の予測への応用

これまで述べた時系列生成のモデル推定の結果を用いて、次の段階として、現在の時刻 t での時系列の値を用いて、次の時刻 $t + 1$ における時系列の値を予測することを考察する。この場合、確定的な部分は時刻 t と時刻 t における時系列の値 $P(t)$ を代入すれば計算できるが、ジャンプ過程の部分は乱数を含む表現となっているので、信頼区間を用いた表現にする必要がある。

いま、時系列の時刻 $t + 1$ における予測値は確率分布を持つので、信頼区間に入っている確率の期待値を求める。具体的には、時刻 t の時系列の値 $P(t)$ からジャンプの発生確率 $\epsilon_k(P)$ と、発生した場合にはそのジャンプの確率分布 J_k が与えられているので、この確率分布の平均値から範囲 $3\Sigma_P, 2\Sigma_P, \Sigma_P$ (Σ_P はこの確率分布の標準偏差) 以内に実際の観測値 $P(t + 1)$ が入っていれば、予測精度を $\epsilon_k(P)$ とする。一方、ジャンプが発生しないケースもあり、その確率は $1 - \epsilon_k(P)$ であり、この場合にはブラウン運動に相当する部分が確率分布を持つので、同様に確率分布の平均値から範囲 $3\Sigma_Z, 2\Sigma_Z, \Sigma_Z$ (Σ_Z はこのブラウン運動に対する確率分布の標準偏差) 以内に入っている場合には、予測精度 $1 - \epsilon_k(P)$ を与える。

表 3 には本論文で示す遺伝的手法により、それぞれの構成部分を記述する関数と、パラメータの推定を行った結果を基礎として、代表事例に対する時系列の予測を行った場合の存在範囲の特定の精度を示している。表 3 において真値利用と予測値利用は、それぞれ、与えられた時系列生成モデルのパラメータと、推定されたモデルのパラメータを用いて時系列の存在範囲を推定した精度 (それぞれを I_t, I_p として示す) を意味している。表において $R = 3\Sigma$ などは、すでに述べた時系列の存在を確定するためのデータ区間が平均値から 3Σ 以内にあるケースを評価することを意味している。これらの結果より分かるように、 I_t と I_p との間には大きな差異はなく、時系列生成モデルを推定することを、次の時刻における時系列の値の存在範囲を特定する目的には、満足できる結果を与える。

表 3: 代表事例に対する時系列存在範囲予測の精度

	$R = 3\Sigma$		$R = 2\Sigma$		$R = \Sigma$	
	I_t	I_p	I_t	I_p	I_t	I_p
up	0.967	0.955	0.933	0.902	0.650	0.502
down	0.984	0.978	0.932	0.896	0.648	0.481

5.2 評価関数の最適化への応用

次に、直接的な時系列の予測を拡張して、推定されたモデルを埋め込んだ評価関数の最適化における有効性を確認する応用例を示す。いま、製品製造を行う企業(メーカー)が存在し、メーカーは部品(簡単のため1種類とする)を調達して製品として製造し販売するケースを考える。製造販売は期間 $t = 0 \sim T$ にわたって行われると仮定する。市場の商品価格と部品の価格が急変するモデルを仮定する。

メーカーは需要にみあった生産をするが、価格が変動すると仮定しているので、これらを変動要因とする評価関数の最適化手法により最適な生産計画を求める。以下のように、記号を定義しておく。すべて時刻 t における値である。

製品製造の部品の単価: $f(t)$.

市場での製品需要数量: $D(t)$.

市場での製品の販売価格: $P(t)$.

メーカーの製品の製造数量: $c(t)$.

メーカーの在庫数量: $R(t)$.

企業の時刻 t における投資の価値を $V(t)$ としておくと、この値を最大化する問題は、複数の変動過程を含む評価関数の最大化問題として記述することができる [6]-[8]-[12]. 多くの問題で、変動過程をブラウン運動でモデル化した場合には、その微小変化、および時間の微小変化を用いて、偏微分方程式を導出することができる。原理的にはこの偏微分方程式を解くことにより最適な政策を求めることができる。しかし、本論文ではジャンプ過程を含む要因を変動過程として含むので、このような問題に適したように拡張を行う。

需要 $D(t)$ は、次のモデルに従うと仮定する。

$$dD(t) = d_1[d_0 - D(t)]dt + \sigma_D dW(t). \quad (15)$$

ただし、 d_0, d_1, σ_D は定数であり、 $dW(t)$ はブラウン運動の微分値である。製品の製造数量 $c(t)$ は決定変数であるので、これを用いた在庫数量の変分とは次のような関係になる。

$$dR(t) = [c(t) - D(t)]dt. \quad (16)$$

また、 $P(t)$ は式 (8) にしたがって変動すると仮定しておくが、特に利益変化が問題となる下降ジャンプを含むケースを考察する。同様に、部品価格 $f(t)$ も、急激な上昇ジャンプを含むと仮定する。

$$df = 0.4[15 \sin(2\pi t/24) + 100 - f]dt + \sigma_f f dz_f + (J_1 - f)dq_1 + (J_2 - f)dq_2, \quad (17)$$

$$\sigma_f = 0.2, J_1 \sim N(600, 100), J_2 \sim N(100, 10). \quad (18)$$

$$\lambda_{go}(f) = \begin{cases} 0.01f/250, & f \leq 250, \\ 0.01, & f > 250. \end{cases} \quad (19)$$

$$\lambda_{back}(f) = \begin{cases} 0, & f \leq 250, \\ 0.85, & f > 250. \end{cases} \quad (20)$$

ここで、 dz_f はブラウン運動の微分値である。

上に述べたような前提のもとで、現在の時刻 t から最終の時刻 T までの製品の製造販売による価値を最大化する問題の解を求める手順を示す。与えられた評価関数の最大化問題は、次のものである。

$$V(P, f, c, t, R) = \max_c E \left[\int_t^T e^{-\rho(t-\tau)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \quad (21)$$

$$F(P, f, c, t, R) = P(t)D(t) - A(c(t), f(t)) - H(R) - B([D(t) - c(t) - R(t)]). \quad (22)$$

ここで、 $A(\cdot), H(\cdot), B(\cdot)$ は製品を生産するコストを表す関数、在庫コスト関数、在庫切れ (back order) コスト関数である。価格 P に対して期待値をとる。通常、関数 $B(\cdot)$ は生産が十分でない場合に、他社から製品を直接調達する場合のコストを意味する。関数 $B(\cdot)$ は 2 次微分可能であること

が必要であるので、近似的な関数を用いている(詳細は省略する)[6]-[8]. 最適な製造数量 $c(\cdot)$ は、次の式で決まる決定変数である. なお, V_R は R に対する V の偏微分である.

$$\max_c [F(P, f, c, t, R) + (c - D)V_R]. \quad (23)$$

このように決定された c を代入して, 利益 $V(\cdot)$ に関する偏微分方程式を得ると, 次のようになる. 式の導出の概要を付録に示す.

$$\begin{aligned} 0 = & L(V) + F(P, f, c, t, R) + (c - D)V_R \\ & + \sum_{k=1}^2 \epsilon_k E[V_k^{(+,P)} - V] \\ & + \sum_{k=1}^2 \eta_k E[V_k^{(+,f)} - V]. \end{aligned} \quad (24)$$

ただし, $V_k^{(+,P)}$ ($V_k^{(+,f)}$) は, 価格 P (f) において大きさが $\gamma_k(\cdot)$ ($\delta_k(\cdot)$) のジャンプが発生した場合の $V(\cdot)$ の値である. 以上のような確率微分方程式を, 境界条件を定めることにより解けば, 価格が決定される. この偏微分方程式の解の終端条件は次のようになる.

$$V(P, f, T; c) = 0. \quad (25)$$

なお, 上に示したような確率的動的計画法から偏微分方程式を導出し, これを解いて解を求める方法に対して, ある場合には, 等価な動的計画法による近似解法を適用することができる [29]. しかし, 本論文で取り扱っているような変数がジャンプ過程を含んでいるケースでは, 等価な表現を得ることは難しい. したがって, 以下では直接偏微分方程式を解く方法を用いている.

最初に, 需要の時系列と生産コストについての仮定を示す. 需要の時系列に含まれるパラメータは, $d_0 = 100, d_1 = 9, \sigma_D = 10$ とする. 生産のコスト関数 $A(\cdot)$ は, $A(c, f) = (c + 0.01c^2)f$ とする. backorder の関数 $B(\cdot)$ は $B(q, P) = (q + 0.01q^2)P, q = D(t) - c(t) - R(t)$ とする. また, $H(R) = 0.01R$ とする. 式 (19) に示す偏微分方程式を解くためには, ジャンプが発生した場合の評価関数の値, すなわち $V_k^{(+,P)} = V(P + \gamma_k(P, t, J_k), f, c, t, R), V_k^{(+,f)} = V(P, f + \eta_k(f, t, K_k), c, t, R)$ を計算する必要がある. これには, 次のような期待値を求める計算を適用する. 式 (8) にジャンプ過程変動を記述する部分を代入して整理すると, 正規確率密度関数の積分に帰着できる(詳細は省略する)である. この偏微分方程式を, 有限差分の方法により数値計算し, あらためて変数 R に関する 1 次の偏微分の値を求めておく [6]-[8][12]. なお, 偏微分方程式は有限差分のもとでは連立方程式になるが, この方程式は取り扱っている偏微分方程式の性質からスパースな係数行列となるので, ガウス消去法で解いても安定的に解が求まる [6]-[8].

シミュレーションを実施するための変数 P, f, R の刻み幅である $\Delta P, \Delta f, \Delta R$ は, 変数の範囲を適切に選び, 変数をそれぞれ 40, 40, 10 分割した離散的な値を仮定する. また, $\Delta t = 1, \rho = 0.99, T = 20$ とする. 図 2 には価格時系列に対してジャンプ生成などを与えられたパラメータを仮定した場合の, 時刻 $t = 0$ における関数 $V(\cdot)$ の値 ($V_B(P, f)$ とする) を, $P - f$ 平面のデータとして表示している. 図 3 にはこの図 2 に対応して, 時系列生成のモデルを本論文の手法を用いて最適化問題を解き, 時刻 $t = 0$ におけるデータ $V(\cdot)$ を求め ($V_P(P, f)$ とする), さらにこれからを引き去った誤差であ

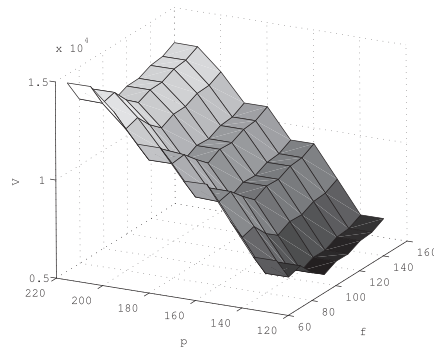


図 2: 時刻 $t = 0$ における時系列の既知モデルを用いた場合の関数 $V_B(P, f)$

る $V_B - V_P$ を示している. $P - f$ 平面の上における相対誤差である $r_{BP} = (V_B - V_P)/V_B$ の平均は 0.0869 である. 図 3 より分かるように, この 2 つの関数の差は極めて小さく, 時系列モデル推定を行い, これを評価関数に埋め込まれたと仮定した場合の解は, 真の解に近いことが分かる.

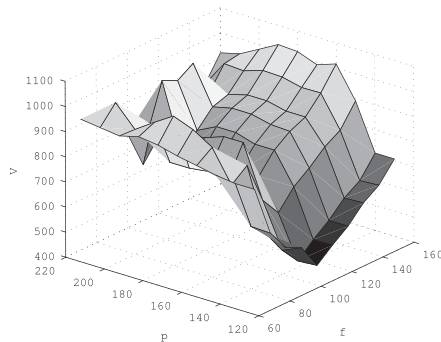


図 3: 時刻 $t = 0$ における時系列推定モデルを用いた場合の関数 $V_P(P, f)$ と $V_B(P, f)$ との差

6 モデル推定の特徴考察

6.1 ジャンプを生成する分布の平均と標準偏差

以下では, 前節で区分した 2 つの代表事例を基本としてジャンプ過程を記述するパラメータにより関数とパラメータの推定誤差はどのように変化するかを調べてみる. なおこのような分析を行うには, できるだけ変動させるパラメータが少ないほうが便利であるので, シミュレーション実施においてはこれを考慮している. 具体的には, 上昇/下降ジャンプの発生確率を表す関数は変更し

ないでジャンプの大きさだけをかえる, 確定部分の正弦波の要素数を増加させるケースを考察する. これ以外の組み合わせも考えられるが, 上に示す2つのケースから類推することが可能である. 最初に, ジャンプを生成する分布の平均と標準偏差と推定について考察する.

ジャンプを生成する正規分布の平均と標準偏差を小さくしていくと, ジャンプ部分とブラウン運動の微分値を含む項である σPd_z との差異が小さくなり, ジャンプ発生の検出がうまくできなくなることが予想される. この特性を調べるために, ジャンプ生成の正規分布の平均と標準偏差を, 同時に θ 倍した場合に, 前に定義した既知のモデルから特定することができるジャンプ発生の実際の時刻と, 本手法による検出時刻の予測の一致する割合である $U_k, W_k, k = go, back$ を求める. これを50回の比較シミュレーションを行いまとめたものが表4である. この表から分かるように, $\theta \leq 1/3$ においては, 指標の数値が極端に低下するため, ジャンプ生成のモデルを推定できなくなると言える.

表4: ジャンプ生成の分布の平均と標準偏差を変化させた場合の U_k, W_k

	upward		downward	
	U_{go}	U_{back}	W_{go}	W_{back}
$\theta = 1$	0.995	0.902	0.930	0.902
$\theta = 1/2$	0.802	0.781	0.885	0.856
$\theta = 1/3$	0.601	0.591	0.592	0.471

6.2 時系列のサンプル数 N_s

前に示した代表事例におけるパラメータ推定では, ジャンプ発生の確率を記述する関数を推定するために, 時系列のサンプル数 N_s は十分な大きさにとっている. しかし, この数値を小さくするにしたがって, ジャンプ発生の確率形状を表現するヒストグラムに, 不鮮明さが発生し, これがパラメータ推定の精度を悪化させることが予想される. おおよその数値として, 時系列サンプル数に対するジャンプ発生の確率は1%程度であり, ヒストグラムのデータ範囲を20区分した場合においては, それぞれの bin に平均10個のサンプルが入ることを仮定(ただし等分ではない, 少数サンプルの bin も存在する)しても, 最低でも $N_s = 20000$ サンプルが必要となる.

このような適切な時系列サンプル数 N_s の下限を求めるには, さまざまな方法があると考えられるが, ここでは1つの例として, 時系列予測の性能により比較する. 表5には表3において示した次の時刻における時系列の存在範囲の推定を行う手順において, いくつかの N_s を設定し, これを50回の比較シミュレーションを行った場合の結果を示している. 時刻における時系列データの存在範囲を予測する方法の精度の定義は, 前に述べたものと同じである. したがって指標である I_t, I_p の定義も前に述べたものである. 表5では時系列の存在範囲を特定する区間が平均値から $2\Sigma, \Sigma$ 離れているケースだけを示している. この表において I_t は与えられた既知のモデルを用いて時系列の存在範囲を推定した精度であり, $I_p^3, I_p^1, I_p^{0.5}$ はそれぞれ時系列サンプル数が $N_s = 30000, 10000, 5000$ である場合に, モデル推定を行った結果を用いて時系列の存在範囲の予測を行った精度である. この表5から分かるように, 意味のあるパラメータ推定の結果を得るには, $N_s \geq 10000$ が条件であることが

予測できる。次に、このような時系列のサンプル数が十分に大きくない場合に、前節で示した時系

表 5: 時系列サンプル数 N_s を変化させた場合の時系列予測

	$R = 2\Sigma$			
	I_t	I_p^3	I_p^1	$I_p^{0.5}$
upward	0.933	0.902	0.760	0.323
downward	0.932	0.896	0.650	0.356
	$R = \Sigma$			
	I_t	I_p^3	I_p^1	$I_p^{0.5}$
upward	0.650	0.371	0.278	0.210
downward	0.648	0.301	0.270	0.223

表 6: 時系列サンプル数 N_s を変化させた場合の評価関数の推定誤差

N_s	50000	30000	10000	5000
r_{BP}	0.0869	0.112	0.281	0.320

列モデルが評価関数に埋め込まれた問題における最適解への影響を調べて見る。表 5 と同様に、時系列のサンプル数 N_s を変化させた場合に、最適化された製品の製造販売をする企業の、時刻 $t = 0$ における価値の予測誤差を求めてみる。具体的には、時系列のサンプル数 N_s を変化させた場合に推定される時系列モデルを用いて、生産の最適化を行い、時刻 $t = 0$ における評価関数の推定値を V_P とし、この数値と正確な時系列モデルを求められる $V(\cdot)$ の値 V_B との相対誤差 $r_{BP} = (V_B - V_P)/V_B$ を求める。この結果をまとめたものが表 6 である。この結果から分かるように、時系列サンプル数を減らすことによる評価関数の推定誤差は、時系列予測の場合より大きい。したがって安定的な評価関数の値を得るには、 $N_s \geq 30000$ とすることが条件となる。

7 むすび

本論文では、遺伝的手法である GP および GA による関数近似を用いた時系列におけるジャンプ過程の推定と、その応用について述べた。時系列生成は確定的な関数で記述される部分とジャンプ過程部分、およびブラウン運動による部分からなる加法的なモデルを仮定し、逐次的な近似によりそれぞれの部分の関数を近似し時系列の値を変数として含む条件式を推定した。応用例として人工的に生成された時系列データに対するモデル推定のシミュレーションと予測、利得関数評価への適用を示した。

今後の課題として、本手法の現実に観測される時系列データへのモデル当てはめ手法への拡張があり、今後検討を進めていきたい。

謝辞本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基盤研究 (B)19310099 及び (C)19510164 により実施されている。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- [1] J.Pan, "The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study," *Journal of Financial Economics*, vol.63, pp.3-50, 2001.
- [2] S.G.Kuo, "Option pricing under a double exponential jump diffusion model", *Management Science*, vol.50, no.9, pp.1178-1192, 2004.
- [3] M.Fernandes, "Financial crashes as endogenous jumps: estimation, testing and forecasting", *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.30, pp.111-141, 2006.
- [4] J. A. Bucklew, *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation and Estimation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- [5] P. Embrechts, C. Kluppenberg and C. Mikosch, *Modeling Extreme Events for Insurance and Finance*, Springer, 1999.
- [6] 譚康融, 儲梅芬, 時永祥三, "ジャンプ過程変動を含む確率モデル分析における Importance Sampling を用いた評価関数のテイル分布推定とその応用," *信学論 (A)*, vol.J90-A, no.2, pp.92-102, 2006.
- [7] 池田欽一, 時永祥三, "ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と資産配分変更を用いた Value at Risk 制御への応用," *信学論 (A)*, vol.J91-A, no.03, pp.1-13, 2008.
- [8] 池田欽一, 時永祥三, "ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と企業間取引における製造・販売リアルオプション推定への応用," *情報処理学会論文誌*, vol.45, no.SIG4(TOM 20), pp.1-13, 2008.
- [9] O.Cappe, E.Moulines, J.Pesquet, A.Petropulu and X.Yang, "Long-time dependency and heavy-tail modeling for traffic data," *IEEE Signal Process.Mag.*, vol.19, no.3, pp.14-27, 2002.
- [10] A.Logothesis and V.Krishnamurthy, "Expectation-maximization algorithm for MAP estimation of jump Markov linear systems," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.47, no.8, pp.2139-2156, 1999.
- [11] A.Doucet, N.J.Gordon and V.Krishnamurthy, "Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.49, no.3, pp.613-624, 2001.
- [12] M.Thompson, M.Davison and H.Rasmussen, "Valuation and optimal operation of electric power plants in competitive markets," *Operations Research*, vol.50, no.4, pp.546-562, 2004.

- [13] S.Takriti, B.Krasenbrink and L.Wu, "Incorporating fuel constraints and electricity spot prices into the stochastic unit commitment problems," *Operations Research*, vol.48, no.2, pp.268-280, 2000.
- [14] 譚康融, 時永祥三, "遺伝的手法による関数近似を用いた時系列におけるジャンプ過程の推定とその応用," *信学技報*, SIS2008-84, pp.15-20, 2008.
- [15] P.M.Robinson, Nonparametric estimators for time series, *Journal of Time Series Analysis*, vol.4, no.3, pp.185-207, 1983.
- [16] Y.Ikeda and S.Tokinaga, "Controlling the chaotic dynamics by using approximated system equations obtained by the genetic programming," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E84-A, no.9, pp.2118-2127, 2001.
- [17] X.Chen and S.Tokinaga, "Approximation of chaotic dynamics for input pricing at service facilities based on the GP and the control of chaos," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E85-A, no.9, pp.2107-2117, 2002.
- [18] Y.Ikeda and S.Tokinaga, "Chaoticity and fractality analysis of an artificial stock market by the multi-agent systems based on the co-evolutionary Genetic Programming," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E87-A, no.9, pp.2387-2394, 2004.
- [19] 呂 建軍, 時永祥三, "遺伝的プログラミングによる時系列モデルの集合的近似とクラスタリングへの応用," *信学論 (A)*, vol.J88-A, no.7, pp.803-813, 2005.
- [20] 呂 建軍, 時永祥三, "遺伝的プログラミングによる時系列セグメント識別を用いたカテゴリ記号表現に基づく 2 階層認識手法とその予測への応用," *信学論 (A)*, vol.J88-A, no.11, pp.1258-1271, 2005.
- [21] S.Tokinaga, J.Lu and Y.Ikeda, Neural network rule extraction by using the Genetic Programming and its applications to explanatory classifications," *IEICE. Trans. Fundamentals*, vol.E88-A, no.20, pp.2627-2635, 2005.
- [22] 呂 建軍, 時永祥三, "遺伝的プログラミングによるルール生成を用いたクラスタ特徴記述システムの構成とその応用," *信学論 (A)*, vol.J89-A, no.12, pp.1142-1152, 2006.
- [23] 池田欽一, 陳曉榮, 時永祥三, "GP による学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるプライシング時系列のカオス性分析とその応用," *信学論 (A)*, vol.J89-A, no.4, pp.298-307, 2006.
- [24] Y.Ikeda and S.Tokinaga, "Double auction of an artificial stock market by the multi-agent systems based on the co-evolutionary Genetic Programming," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E90-A, no.10, pp.2387-2394, 2007.

- [25] Y.Ikeda and S.Tokinaga, "Multi-fractality Analysis of time series in artificial stock market generated by the multi-agent systems based on the co-evolutionary Genetic Programming," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E90-A, no.10, pp.2387-2394, 2007.
- [26] J.J.R.Koza, Genetic Programming, MIT Press, 1992.
- [27] J.R.Koza, Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs, MIT Press, 1994.
- [28] M.J.Keith and M.C.Martin, "Genetic programming in C++: Implementation issues," in (ed) K.E.Kinnerar,Jr., Advance in Genetic Programming MIT Press, 1994.
- [29] A.Huchzermeier and C.H.Loch, "Project management under risk: Using the real options approach to evaluate flexibility in R & D," Management Science, vol.47, no.1, pp.85-101, 2001.

付録

式 (21) を 2 つの時間区間に分けて表現すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 V(P, f, c, t, R) = & \\
 & \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\
 & \left. + \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \tag{26}
 \end{aligned}$$

更に変形すると, 次のようなる.

$$\begin{aligned}
 V(P, f, c, t, R) = & \\
 & \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\
 & \left. + e^{-\rho dt} \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-(t+dt))} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]. \tag{27}
 \end{aligned}$$

この第 2 項は, 評価関数の定義式において時間をずらした表現であるので, この式を, 時間 t の微小変化 dt の間における変分を用いて書き直すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 V = & \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\
 & \left. + e^{-\rho dt} V(P+dP, f+df, c(t+dt), t+dt, R+dR) \right]. \tag{28}
 \end{aligned}$$

この式に対して、多次元変数に対する Itô のレムマを用いて確率変数の 2 次微分までを求めたあと、代入を繰り返し、式 (1)~(4) を用いて変形すると次の式を得る.

$$\begin{aligned}
 0 &= \max_c [[F(P, f, c, t, R) + L(V) + (c - D)V_R]dt \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_P} E[V_k^{(+,P)} - V]dq_k \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_f} E[V_k^{(+,f)} - V]dr_k]. \tag{29}
 \end{aligned}$$

$L(V)$ は本文中に示される微分オペレータである. 更に dt より早く減衰する項目を除去し, 期待値を取り微小量 dt により割ることで, 本文中の式 (24) の偏微分方程式が得られる. なお $V(\cdot)$ は, 最大化をする関係式の両辺に含まれているが, 変数 c の陽な関数ではない. 上に示した偏微分方程式において, 決定変数である $c(\cdot)$ は, 次に示す最大化問題の解として与えられる.

$$\max_c [F(P, f, c, t, R) + (c - D)V_R]. \tag{30}$$

譚 康融〔久留米大学経済学部 教授〕

中西 一〔佐賀大学経済学部 准教授〕

時永 祥三〔九州大学大学院経済学研究院 教授〕