

時間周期非線形定常場の高速求解法

宮田, 健治
株式会社日立製作所日立研究所

<https://hdl.handle.net/2324/1462184>

出版情報 : COE Lecture Note. 46, pp.261-272, 2013-02-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
バージョン :
権利関係 :

時間周期非線形定常場の高速求解法

宮田 健治

(株)日立製作所日立研究所

1 はじめに

時間微分項をもつ支配方程式で記述される現象には時間周期性をもつ場合が少なくない。その周期的な場が非線形性をもつ場合、複数の周波数成分をもつために、周波数領域解析で複素数表現による解を求めることは困難である。このため、時間領域で時間ステップを追いながら解析する step-by-step 法で解を求めることになるが、収束解を得るための時定数が長い場合、定常場を得るまでに多大な計算時間を要することになる。このため、時間周期非線形定常場を高速に求めるには何らかの工夫が必要になる。

これまで、時間周期非線形定常場を高速に求める努力が数多くなされてきた。非線形回路での周期解を得るために Aprile らは shooting 法を用いた方法 [1] を提案しており、電気回路系の解析に利用されている。また、有限要素法解析では、原らが、時間軸にも未知数を配置して時間周期境界条件を付加して解を求める時間周期有限要素法 [2] を提案しており、二次元解析で利用されている。しかし、両解法ともに、大規模体系での解析では過大な計算コストが足かせとなる。このほか、敢えて周波数領域で解析する山田らの調波有限要素法 [3] や時間領域 Galerkin 法 [4] があるが、これらについても同様である。単一周波数でかつ非線形性を考慮したハイブリッド解法 [5] もあるが、これは近似的な解を求めるには有効であるが、真の定常解を得るには、得られた近似解を初期値とした長時間の過渡解析が必要になる。このようにいくつかの解法が提案利用されてきたが、さらに有力で実用的な解法が望まれていた。

このような状況の中、2008年に徳増により EEC (Explicit Error Correction) 法 [6, 7] をベースにした TP-EEC (Time Periodic Explicit Error Correction) 法 [8, 9, 10] が考案され、実用的な解法として広く利用されるようになった。これは、半周期性をもつ時間周期問題の場合、半周期の過渡解析で得られる解を利用して、効率的に解を補正し、周期解への収束を飛躍的に高めた方法である。さらに多相系で各相が近似的に互いに平等性を有する場合に有用な方法として、多相交流 TP-EEC 法 [11] が考案され、異なる相の情報を利用してさらに定常場への収束を高めた方法も登場し、中でも特に三相交流 TP-EEC 法がよく使われている。これに対し、筆者は高調波の影響が少ない場合に限定する方法として、TDC (Time Differential Correction) 法 [12] を、さらに正弦波ならびに複数の高調波ソースに限定する方法として、harmonic TDC 法 [13] を提案した。高調波ソース成分が少ない場合、TDC 法の方が補正のための過渡解析が少なく済む分有利な方法であるが、高調波ソース成分が多い場合は、TP-EEC 法や多相交流 TP-EEC 法の方が有利になるので使い分けが必要である [14]。ここでは、TP-EEC 法、三相

交流 TP-EEC 法ならびに TDC 法について概説する．なお，TDC 法および harmonic TDC 法について総括した内容は文献 [15] を参照されたい．

2 各種高速求解法の原理

2.1 TP-EEC 法

まず，TP-EEC 法のベースとなる EEC 法について述べる．解析対象の時間微分項をもつ支配方程式を時間一周期分を時間軸上で離散化して，複数の方程式で構成された連立方程式を考え，式 (1) のように行列方程式で表現する．

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

ここで， \mathbf{x} ， \mathbf{b} はそれぞれ場を表すベクトル変数ならびにソース項を表すベクトル変数であり，1 周期を n 分割したときの各時刻のベクトル量 \mathbf{x}_i ， \mathbf{b}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を縦に時系列に並べて合成したベクトル量である．この行列方程式に時間周期境界条件式を導入すれば，式 (1) は時間周期非線形問題と考えることができる．時間領域で時間ステップを追いながら解析する step-by-step 法で解を求める操作は，式 (1) を block Gauss-Seidel 法で陽的に順次近似解を求めながら，反復収束させる操作と等価である．式 (1) の左辺の係数行列の条件数が大きく，解の収束性が悪い状況において，解を高速に求めるためには，行列方程式を変形させて，係数行列の条件数を小さくして 1 に近づければ良い．ほとんどの場合，式 (1) を

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{p} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ CA & CAB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ C\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3)$$

とすることで収束性は向上される．また，行列 A が対称な場合， $C = B^T$ とすることで式 (3) の係数行列も対称性が維持される．式 (3) の解 $\hat{\mathbf{x}}$ と \mathbf{p} を同時に解くのが陰的誤差修正法であり， $\hat{\mathbf{x}}$ と \mathbf{p} を交互に反復させながら解くのが陽的誤差修正法である．式 (2) の第 1 項目の $\hat{\mathbf{x}}$ を補正前の解と考え，第 2 項目の補正項 $B\mathbf{p}$ を加えることで，より定常解に近い解 \mathbf{x} を求めることができる．この場合，補正項 $B\mathbf{p}$ を求める方程式は，式 (3) より，

$$B^T AB\mathbf{p} = B^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

となる．ここで収束が緩慢な減衰項を 1 周期において近似的に定数項と見なすと，行列 B を定数項抽出写像行列とみなせ，

$$B = (I, I, \dots, I)^T \quad (5)$$

(I : 単位行列) とおき， \mathbf{p} は次式で求められる．

$$\left(\sum_{i,j} A_{ij} \right) \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \quad (6)$$

ここに、 \mathbf{r}_i は1周期を n 分割したときの i 番目の時刻における残差ベクトル

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i - (A\hat{\mathbf{x}})_i \quad (7)$$

である。

ここで、具体例として、非線形時間周期場を支配する非線形方程式

$$S(\mathbf{x}) + C \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{b} \quad (8)$$

について考える。ここに、 $S(\mathbf{x})$ は非線形項であり、 C は定数である。ここで、後方 Euler 法で時間軸を離散化すると、

$$(S_i + \tilde{C})\mathbf{x}_i - \tilde{C}\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{b}_i \quad (\tilde{C} = C/\Delta t, i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

となる。ここでは半周期性の問題を考えることにし、周期を T として、半周期境界条件 $\mathbf{x}(t + T/2) = -\mathbf{x}$ を考慮すると、式 (1) に相当する式は

$$\begin{bmatrix} S_1 + \tilde{C} & 0 & \cdots & 0 & \tilde{C} \\ -\tilde{C} & S_2 + \tilde{C} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{C} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\tilde{C} & S_n + \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{Bmatrix} \quad (10)$$

となる。第1行 n 列目の行列 \tilde{C} は半周期境界条件によるものである。ここで、式 (6) を用いて0次の補正項 \mathbf{p} を求める。そのためには、式 (6) に含まれる残差ベクトル \mathbf{r}_i を求めなければならない。各時刻において方程式 (8) の解を求めているために $i = 2, \dots, n$ については $\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ となる。これに対して \mathbf{r}_1 のみが特別である。周期定常場に至るまでの過渡過程におけるある時刻の解 $\hat{\mathbf{x}}_0$ と半周期後の解 $\hat{\mathbf{x}}_n$ の間には、まだ半周期境界条件が厳密に満足されていないため、残差ベクトル \mathbf{r}_1 は非ゼロの有意なベクトル量となる。式 (10) の先頭行の関係式から残差 \mathbf{r}_1 が発生するため、

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_1 - (S_i + \tilde{C})\hat{\mathbf{x}}_i - \tilde{C}\hat{\mathbf{x}}_n \quad (11)$$

と書ける。ここで、 $i = 1$ の場合の式 (9) を過渡過程の解ベクトル $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1$ で表現した

$$(S_i + \tilde{C})\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{C}\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{b}_1 \quad (12)$$

を用いてソース項 \mathbf{b}_1 を消去できる。これにより、残差ベクトル \mathbf{r}_i を整理すると、

$$\mathbf{r}_1 = -\tilde{C}(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_n), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (i = 2, \dots, n) \quad (13)$$

となる。

ここで、式 (10) の左辺の係数行列から $\sum_{i,j} A_{i,j}$ を求め、これと式 (13) を式 (6) に代入すると、

$$\left(2C + \Delta t \sum_{i=1}^n S_i \right) \mathbf{p} = -C(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (14)$$

が得られる．これが，TP-EEC 法の 0 次補正に関する基本式である．補正のためには半周期毎に式 (14) の行列方程式を解く必要がある．ここで，式 (14) の左辺の括弧内の係数行列のうち，第 2 項目の S_i の総和の項の影響が C に比べて無視できる場合，式 (14) から

$$\mathbf{p} \cong -\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (15)$$

が得られる．式 (2), (5) より，簡易 TP-EEC 法による第 n ステップ目のベクトル量 \mathbf{x}_n に関する補正式

$$\mathbf{x}_n^{\text{new}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_n - \hat{\mathbf{x}}_0) \quad (16)$$

が得られる．式 (16) は単純な式であり，補正のための計算コストはゼロに近い．

2.2 三相交流 TP-EEC 法

前節に述べた TP-EEC 法は，多相交流系でももちろん利用できる．多相交流系には異なる相の情報を補正に利用できるので，半周期問題でも半周期よりも短い時間内の過渡解析で補正が可能になる．ここでは多相交流系の中でも良く利用されている三相交流系について述べる．三相交流系は $1/6$ 周期経過すると，三相の位相が順次入れ替わった位置に移動する．そこで， $1/6$ 周期にわたる時系列ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ を考える．ここで，

$$\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_n = \begin{Bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

とおくと，図 1 より

$$\mathbf{x}_0 = -G\mathbf{x}_n, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

とおける．

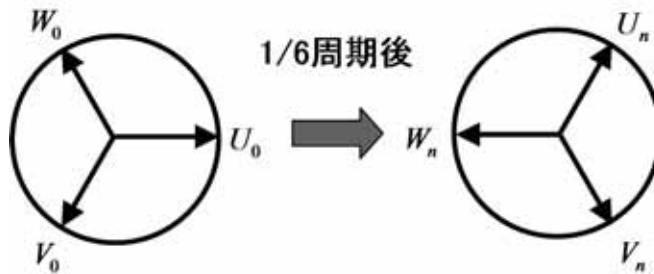


図 1 : 三相交流系における三相の時間変化

このため、式(10)は次式のようになる.

$$\begin{bmatrix} S_1 + \tilde{C} & 0 & \cdots & 0 & \tilde{C}G \\ -\tilde{C} & S_2 + \tilde{C} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{C} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\tilde{C} & S_n + \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{Bmatrix} \quad (19)$$

また、式(11)は

$$\mathbf{r}_1 = -\tilde{C}(\hat{\mathbf{x}}_0 + G\hat{\mathbf{x}}_n), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (i = 2, \dots, n) \quad (20)$$

となり、EEC法による0次補正に関する基本式(6)は、

$$\left(C(I + G) + \Delta t \sum_{i=1}^n S_i \right) \mathbf{p} = -C(\hat{\mathbf{x}}_0 + G\hat{\mathbf{x}}_n) \quad (21)$$

となる. これが三相交流TP-EEC法による補正項 \mathbf{p} を求める式であり、1/6周期毎に補正が可能である. ここで、式(21)の左辺の括弧内の係数行列のうち、第2項目の S_i の総和の項の影響が $C(I + G)$ に比べて無視できる場合、式(21)から

$$(I + G)\mathbf{p} \cong -(\hat{\mathbf{x}}_0 + G\hat{\mathbf{x}}_n) \quad (22)$$

が得られる. 式(2), (5)より、三相交流簡易TP-EEC法による補正式

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n^{\text{new}} &= (d\mathbf{U} + d\mathbf{V} - d\mathbf{W})/2, & d\mathbf{U} &= \hat{\mathbf{U}}_n - \hat{\mathbf{U}}_0 \\ \mathbf{V}_n^{\text{new}} &= (d\mathbf{V} + d\mathbf{W} - d\mathbf{U})/2, & d\mathbf{V} &= \hat{\mathbf{V}}_n - \hat{\mathbf{V}}_0 \\ \mathbf{W}_n^{\text{new}} &= (d\mathbf{W} + d\mathbf{U} - d\mathbf{V})/2, & d\mathbf{W} &= \hat{\mathbf{W}}_n - \hat{\mathbf{W}}_0 \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる. ここで、 $\hat{\mathbf{U}}_n$ は過渡過程における \mathbf{U}_n の解であり、他も同様である.

式(23)は三相交流簡易TP-EEC法による補正式としてよく使われているが、式(18)は三相交流系におけるあるひとつの関係式に過ぎない. ここで議論している三相交流系は、 $U_n + V_n + W_n = 0$ の平衡状態を暗に仮定しているので、式(18)は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}_n - \begin{Bmatrix} \beta_1(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n + \mathbf{W}_n) \\ \beta_2(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n + \mathbf{W}_n) \\ \beta_3(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n + \mathbf{W}_n) \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{I} & \beta_1 \mathbf{I} & (1 + \beta_1) \mathbf{I} \\ (1 + \beta_2) \mathbf{I} & \beta_2 \mathbf{I} & \beta_2 \mathbf{I} \\ \beta_3 \mathbf{I} & (1 + \beta_3) \mathbf{I} & \beta_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ &\triangleq -G\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (24)$$

という形で一般化できる．式(24)で新たに定義した G を用いて，式(21)および式(22)がそのまま使える．このとき，式(23)は

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n^{\text{new}} &= \alpha_1(d\mathbf{U} + d\mathbf{V} + d\mathbf{W}) - d\mathbf{W} \\ \mathbf{V}_n^{\text{new}} &= \alpha_2(d\mathbf{V} + d\mathbf{W} + d\mathbf{U}) - d\mathbf{U} \\ \mathbf{W}_n^{\text{new}} &= \alpha_3(d\mathbf{W} + d\mathbf{U} + d\mathbf{V}) - d\mathbf{V} \end{aligned} \quad (25)$$

となる．ここで，

$$\alpha_1 = \frac{1 + \beta_3}{\beta}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \beta_1}{\beta}, \quad \alpha_3 = \frac{1 + \beta_2}{\beta}, \quad \beta = 2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \quad (26)$$

である．三相 U, V, W は互いに平等なので，補正も平等に取り扱うという観点から， $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ とおくのが自然であろう．この場合，式(25)より， $\alpha = 1/3$ のときに三相交流系の平衡条件 $\mathbf{U}_n^{\text{new}} + \mathbf{V}_n^{\text{new}} + \mathbf{W}_n^{\text{new}} = 0$ が厳密に満足される．なお， $\alpha = 1/2$ にした方が時間高調波源が存在する場合にも概ね強い補正効果を発揮する．

なお，式(25)はEEC法を使わなくとも，複素空間におけるフェーザ図を利用して直視的に求めることができることを付記しておく．

2.3 TDC法

EEC法を用いない誤差修正法として，TDC (Time Differential Correction)法がある．これは，対象場の時間微分を利用した方法である．

TDC法の補正原理を説明するために，半周期性をもつ一変数場 $x(t)$ を考える．基本角周波数を ω とおき，減衰係数 γ の減衰場を考慮すると， $x(t)$ は例えば

$$x(t) = a_0 e^{-\gamma t} + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(2n+1)\omega t + b_n \cos(2n+1)\omega t] \quad (27)$$

と書ける．対象は非線形場であるため，上記の基本波ならびに高調波の係数 a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$)は式(27)の右辺第1項に示した減衰項の影響を受け，時間とともに変化しながら定常場に達する．定常場に近い場を得るには，定常場の主要項である基本波成分を抽出することが肝要である．そのために $x(t)$ の時間微分を用いる．時間微分により，減衰が緩慢な減衰項の全体に占める割合は大きく低下する．その代わりに，高調波成分の全体に占める割合は大きくなるため，平均化処理で高調波成分をなるべく低く抑える．高調波成分は，定常場への収束が比較的速度いため，補正回数が多くない限り，補正の障害にはならない．概念的ではあるが，以上がTDC法の補正原理である．

それでは，以下具体的な補正法について述べる．便宜上，時間変数 t の代わりに位相変数 $\theta (= \omega t)$ を用いる．ここで，平均化処理のための時間積分位相幅を 2ϕ とおく． $x(\theta)$ の基本波成分を $x_1(\theta)$ とおき， $x_1(\theta)$ の平均値を $\langle x_1 \rangle$ と表す．現時刻に対応する位相 θ を平均化積分の上端とすると，

$$\langle x_1 \rangle = \frac{1}{2\phi} \int_{\theta-2\phi}^{\theta} x_1(\theta') d\theta' = \left(\frac{\sin \phi}{\phi} \right) x_1(\theta - \phi) \quad (28)$$

を得る． $x_1(\theta)$ が基本正弦波であることを考慮すると，

$$\frac{d^2\langle x_1 \rangle}{d\theta^2} = -\left(\frac{\sin \phi}{\phi}\right)x_1(\theta - \phi) \quad (29)$$

となり，次の補正式が得られる．

$$x^{\text{new}}(\theta - \phi) = -\left(\frac{\phi}{\sin \phi}\right)\frac{d^2\langle x \rangle}{d\theta^2} \quad (30)$$

ここで，添え字 new は補正後の値を示す．1 階の時間微分を用いた補正も考えられるが，2 階の時間微分項に比べ 1 階の時間微分項には緩慢な減衰項が比較的多めに残留してしまうため，2 階の時間微分項のみを用いる式 (30) が最も高い補正能力を有する．

このほかにも高次の時間微分を使えば多種多様な補正式を作ることができるが，時間微分が 3 階以上になると高調波による影響が大きくなるため，実用的ではない．

TDC 法は，TP-EEC 法のように行列方程式を解くという煩わしい計算処理を必要とせず，補正に要する計算コストは実質ゼロに近い．また，TP-EEC 法では 1 回の補正のために半周期の過渡解析を実行する必要があるが，TDC 法では時間平均幅を半周期よりも短く設定できるため，半周期よりも短いステップの過渡解析を実施すれば，補正をかけることができる．なお，TDC 法には 1 個～3 個までの高調波を考慮した補正法も考案されている [13]．

3 補正法に関する数値実験

前章にて提示した各種補正法を用いた数値計算例について紹介する．

3.1 3 変数連立微分方程式

まずは最も単純な例題のひとつとして式 (31) に示す 3 変数 U, V, W の解析について示す．

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU/d\theta \\ dV/d\theta \\ dW/d\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \cos n(\theta - 2\pi/3) \\ \cos n(\theta - 4\pi/3) \end{Bmatrix}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (31)$$

この方程式の理論定常解は

$$U_{\text{th}} = a \cos(n\theta + \varphi_n), \quad V_{\text{th}} = a \cos\left[n\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_n\right], \quad W_{\text{th}} = a \cos\left[n\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \varphi_n\right] \quad (32)$$

である．ここに，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + g_n^2}}, \quad \varphi_n = -\tan^{-1} g_n, \quad g_n = n \left[3 - 2 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right] \quad (33)$$

である． U, V, W の初期値を全てゼロに設定し，右辺ソース項に基本波 $n = 1$ のみが存在する場合の計算結果を図 2 に示す．1 周期の時間分割数を 192 に設定した．高調波を含まない場

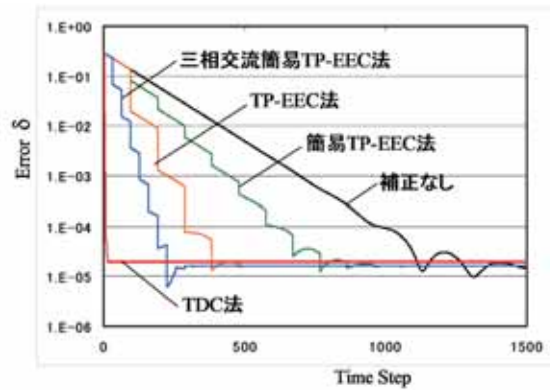


図2：各種補正法の比較（基本波のみの場合）

合，TDC法では平均化処理は不要である．図に示した誤差 δ は次式で定義された値である．また，全ての補正法の補正回数には制限を加えなかった．

$$\delta = \sqrt{(U - U_{th})^2 + (V - V_{th})^2 + (W - W_{th})^2} \quad (34)$$

図が示すように，高調波を含まなければ，TDC法が最大の補正能力を示す．1回当たりの補正量もTDC法が最大であり，その次がTP-EEC法である．三相交流簡易TP-EEC法は1回当たりの補正量はTP-EEC法より小さいものの，補正頻度がTP-EEC法の3倍あるために，TP-EEC法よりも補正能力は大きい．

次に基本波振幅1に対して，1%の振幅を有する5次および7次の高調波を含む場合の計算結果を図3に示す．この場合も U, V, W の初期値を全てゼロに設定した．このときのTDC法における平均化処理に用いた時間幅をステップ数に換算すると19である．これは5次の高調波の半周期にわたるステップ数に相当する．なお，TDC法の補正回数は3回に限定し，その他の補正については補正回数に制限を加えなかった．

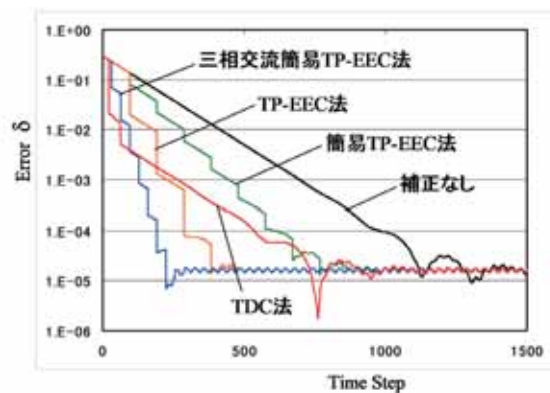
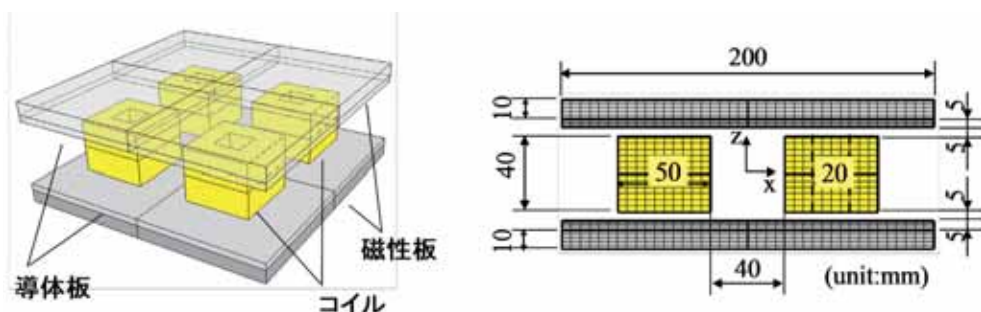


図3：各種補正法の比較（高調波を含む場合）

図3が示すように、高調波が存在しても、TP-EEC法系の3種の補正法はすべてほとんど影響を受けていない。これに対して、TDC法では大きく影響を受け、正弦波のときの場合と比べて補正能力は低下していることがわかる。TDC法は高次よりも低次の高調波の影響を受けやすい。高調波による副作用の影響のため、通常、TDC法の補正回数は3回が限度である。

3.2 渦電流を伴う静止器磁界解析

渦電流を伴う静止器磁界解析における定常場解析例を示す。解析に用いたメッシュ分割図を図4に示す。4個の矩形コイルの上下に正方形の導体板と磁性板を重ねて配置したモデルになっている。側面は、どの面から見ても同サイズである。導体板の導電率は 3.6×10^7 S/m、コイル電流は $100 \cos(2\pi ft)$ kAT、周波数 f は200 Hzとし、電流は全てのコイルで同方向に流れるとした。磁性板は電磁鋼板35A300と同じ初磁化曲線を用いた。モデルの対称性により、1/8領域を切り出して解析した。また、要素数は41,650で、すべて六面体で構成した。上面および側面には磁場が面に平行になるDirichlet境界条件を課し、下面には磁場が面に直交するNeumann境界条件を課した。1周期の時間分割数を40とした(時間分割幅:0.125 ms)。



(a) 解析モデル鳥瞰図

(b) 解析モデルサイズ及びメッシュ分割図

図4: 静止器モデル

図5に磁性板内の $x = y = 42$ mm, $z = 35$ mmの位置における磁束密度の x 成分, z 成分の時間変化を、図6に導体板に発生する渦電流損の時間変化を補正なしの場合およびTDC法と簡易TP-EEC法による補正結果を比較して示す。補正回数はともに3回である。なお、顕著な高調波は存在しないため、TDC法では時間平均処理は不要である。図が示すように、定常に達するまでの時間ステップ数は、簡易TP-EEC法では60ステップ(1周期半)であるのに対して、TDC法では14ステップである。

3.3 電源回路連成同期モータ磁界解析

次に電源回路と連結した同期モータの磁界解析における定常場解析例を示す。検証に用いた同期モータのメッシュ分割図を図7に、またモータの諸量を表1に示す。4極6スロットモータで2周期構造をもつため、1周期分に相当する1/2モデルとした。要素数は8,682である。回転子・固定子間のスライド面は周方向に180等分割した。コイルには抵抗 R が直列接続さ

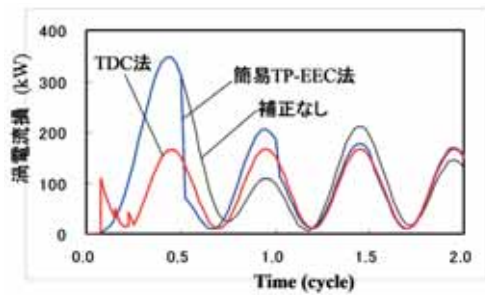


図5：渦電流損の時間変化

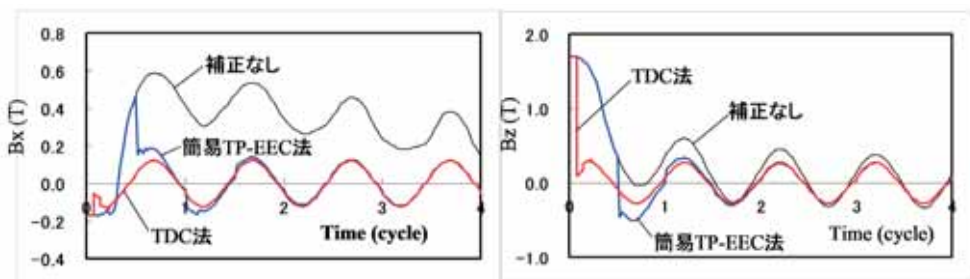


図6：磁束密度の時間変化（磁性板内の $x = y = 42 \text{ mm}$, $z = 35 \text{ mm}$ の位置）

れ、3相Y結線で電圧源と接続されている。抵抗はコイル抵抗も含めて 0.2Ω とし、外部インダクタンス L は0に設定した。また、相電圧の実効値を 100 V に設定した。スライド面周方向1分割ずつ回転移動しながら解析した。

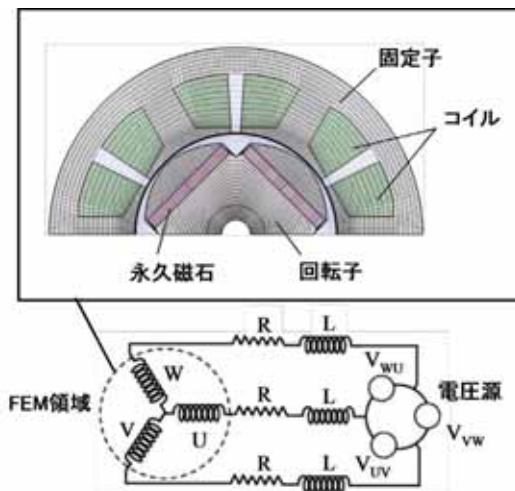


図7：電源回路連同期モータ解析モデル

表1 同期モータの諸量

回転子最大外径	54.8mm
固定子内径	56.0mm
固定子外径	103mm
最小エアギャップ	0.6mm
モータコア部長さ	55mm
永久磁石 残留磁束密度	1.315T

図8にU相コイル電流，図9にトルクの解析における補正なしの場合と簡易 TP-EEC 法，三相交流簡易 TP-EEC 法，および TDC 法による補正した結果を示す．両補正ともに時間微分項を形成するコイル領域にある磁気ベクトルポテンシャルの未知変数に関して補正をかけた．補正回数はそれぞれ，簡易 TP-EEC 法は6回（3回では不十分），三相交流簡易 TP-EEC 法ならびに TDC 法が3回である．なお，TDC 法では3ステップ平均を用いた．

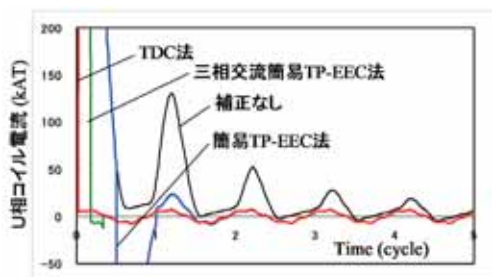


図8：U相コイル電流波形

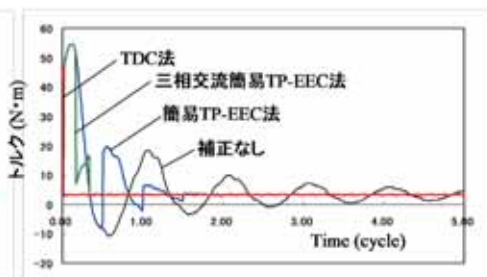


図9：トルク波形

この場合，簡易 TP-EEC 法が 90 ステップ毎にしか補正がかけられないのに対して，三相交流簡易 TP-EEC 法は 30 ステップ毎に，また TDC 法は 6 ステップ毎に補正がかけられる．このため，定常に達するまでの時間ステップ数は，簡易 TP-EEC 法では 400 ステップ（2.2 周期）であるのに対して，三相交流簡易 TP-EEC 法では 93 ステップ，TDC 法では 33 ステップである．

4 おわりに

半周期の時間周期性をもつ非線形定常場を高速に求めるための数値解析法について述べた．TP-EEC 法は半周期性問題に適用した場合，半周期毎の補正に限定される．これに対して多相交流系では，異なる相の情報を有効利用できるために，相の数の倍率で補正に必要な時間ステップ数を縮減できる．例えば三相交流形では 1/3 に縮減できるために，三相交流 TP-EEC 法を用いると 1/6 周期毎の過渡解析で補正が可能になる．これに対して，補正原理が全く異なる TDC 法はこの縛りがなくなる．TDC 法は時間微分を利用するために概ね 1/6 周期よりも短い過渡解析で補正が可能になるが，高調波の影響を受け易いため，TP-EEC 法や多相交流系 TP-EEC 法と使い分けする必要がある．

なお，半周期性はなく一周期性のみをもつ問題については，TP-EEC 法が利用可能であり，さらに収束性向上に向けて検討が進みつつある．非線形の周期場を高速に求めるための方法は，まだ工夫の余地があり，今後さらに発展する可能性を秘めている．

参考文献

- [1] T. J. Aprille Jr. and T. N. Trick, Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs, Proc. IEEE, **60** (1972), no. 1, 108–114.

- [2] 原, ほか, 時間周期有限要素法による高圧・回転機コロナシールド部の電界解析, 電学論 B, **102-B** (1982), no. 7, 423–430.
- [3] 山田, ほか, 調波有限要素法による磁気飽和を考慮した交流定常磁界解析, 電学論 D, **109-D** (1989), no. 10, 756–762.
- [4] R. Albanese, E. Coccorese, et al., Periodic Solutions of Nonlinear Eddy Current Problems in Three-Dimensional Geometries, *IEEE Trans. Magn.*, **28** (1992), no. 2, 1118–1121.
- [5] 山崎, 新福, 中性点電位変動を考慮した誘導電動機の特性格解析, 電気学会静止器・回転機合同研究会資料, SA-99-23/RM-99-77 (1999).
- [6] T. Iwashita, T. Mifune, and M. Shimasaki, Similarities between implicit correction multi-grid method and A-phi formulations in electromagnetic field analysis, *IEEE Trans. Magn.*, **31** (2008), no. 3, 946–949.
- [7] 美船健, 守口総一, 岩下武史, 島崎眞昭, 高アスペクト比のメッシュを用いた有限要素法のための Implicit error correction 法及び Explicit error correction 法に関する基礎検討, 電気学会マグネティックス・静止器・回転機合同研究会研究資料, MAG-08-19/SA-08-7/RM-08-7 (2008).
- [8] 徳増正, 藤田真史, 上田隆司, 2次元電磁界解析の有効利用に残された課題 (その3), 電気学会静止器・回転機合同研究会研究資料, SA-08-62/RM-08-69 (2008).
- [9] 高橋康人, 徳増正, 若尾真治, 岩下武史, 金沢正憲, 時間周期有限要素法と EEC 法に基づく非線形過渡電磁場解析の収束特性改善に関する基礎的検討, 電気学会静止器・回転機合同研究会研究資料, SA-08-63/RM-08-70 (2008).
- [10] 高橋康人, 徳増正, 藤田真史, 若尾真治, 岩下武史, 金沢正憲, 時間周期有限要素法と EEC 法に基づく非線形過渡電磁場解析における時間積分の収束性改善, 電気学会論文誌 B, **129** (2009), no. 6, 791–798.
- [11] 徳増正, 藤田真史, 上田隆司, 2次元電磁界解析の有効利用に残された課題 (その4), 電気学会静止器・回転機合同研究会研究資料, SA-09-6/RM-09-6 (2009).
- [12] 宮田健治, 時間周期非線形場的高速求解法, 電気学会マグネティックス・静止器・回転機合同研究会研究資料, MAG-10-8/SA-10-8/RM-10-8 (2010).
- [13] 宮田健治, 時間周期非線形場高速解析のための harmonic TDC 法および TDC・簡易 TP-EEC 併用法, 電気学会静止器・回転機合同研究会研究資料, SA-10-91/RM-10-100 (2010).
- [14] Y. Takahashi, T. Tokumasu, et al., Comparison between fast steady-state analysis methods for time-periodic nonlinear magnetic field problems, *IEEE Trans. Magn.*, **48** (2012), no. 2, 235–238.
- [15] K. Miyata, Fast analysis method of time-periodic nonlinear fields, *J. Math. Indust.*, **3** (2011), 2011B-7, 131–140.