純粋と応用は交錯する : 初期無限解析における観察の一例

高瀬, 正仁
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

出版情報：COE Lecture Note. 46, pp.233-238, 2013-02-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

純粋と応用は交錯する
—初期無限解析における観察の一例—

高瀬　正仁

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

1　オイラーの言葉より

歴史家の視点から純粋数学と応用数学の連繋について考察してみたいと思います。数学史を回想すると、数学的科学を純粋と応用に分けようとする意識は早くからあったようで、19 世紀のはじめにクレルレがベルリンで創刊した数学誌の誌名は、すでに「純粋数学と応用数学のためのジャーナル」というのでした。もう少しさかのぼると、純粋数学と応用数学を対比させて語られたオイラーの言葉が念頭に浮かびます。それはオイラーの論文「負数と虚数の対数に関するライプニッツとベルヌーイの論争」(1749/51 年) の書き出しのあたりに出ているのですが、オイラーはこう言っています。

> 数学者たちの考えは応用数学に関連する諸問題については大いに異なることがありうる。応用数学の場では、いろいろなテーマを考察し、それらのテーマを精密な諸概念へと帰着させていく際に採用される道筋の多彩さのため、現実的な論争が引き起こされることがある。
>
> ところが数学の純粋な諸分野はそんな論争の的から完全に免れていて、そこには真実と虚偽のいずれかを証明することのできない事柄は何もないことを、常々誇りにしていたのである。(参考文献 [4])

オイラーの論文に先立って、負数と虚数の対数 $\log(-1)$、$\log(\sqrt{-1})$ の実体をめぐってライプニッツとヨハン・ベルヌーイが論争めいたやりとりを交わしていた一時期があり、オイラーはその論争の成り行きを踏まえたうえで上記のように発言したのでした。オイラーの見るところ、負数と虚数の対数とは何かと問う問いは純粋数学のテーマですが、ライプニッツとヨハン・ベルヌーイの論争は全体に曖昧模糊とした印象に覆われていて、どちらが正しいとも言えないままに推移して、いつしか立ち消えになりました。これを受けてオイラーは、純粋数学では真実と虚偽を識別しえないようなことはありえないのであり、そのことを「常々誇りにしていたのである」というのです。これに対し、応用数学ではそうではなく、現実的な論争が起るのが通常の姿なのだとのこと。数学における純粋と応用の区別をここまで明晰判明に語った言葉を目にしたのははじめてで、その後も見たことがありません。

それでオイラーは何をもって応用数学と見ているのかということが気に掛かりますが、ここから先は自分で考えてみたいと思います。純粋数学という名に相応しい数学が存在することを前提にすると、純粋数学を使って何事かがなされたなら、そこに応用数学が発生する場が開

かれたような印象を受けるのではないかと思います。普通、応用数学と言われている数学はたいていはそのようなものですが、それとは別に、純粋とも応用ともいえない独自の数学的科学も存在するのではないかと、つい最近思い始めました。きっかけになったのはガウスの『誤差論』（参考文献 [1]）です。

2　ガウスの『誤差論』

ガウスの『誤差論』は飛田武幸先生が翻訳した論文集で、昭和 56 年（1981 年）5 月に紀伊国屋書店から刊行されました。全部で 8 篇の論文が収録されていますが、根幹を作るテーマは天体観測における誤差の修正に関する事柄で、誤差を最小にする方法として最小 2 乗法が提案されたり、天体の軌道決定のために確率論的考察が展開されたりしています。天体の軌道決定と確率論がどうして関係があるのかというと、軌道決定というのはつまり将来の位置の予測ということですし、「予測する技術」こそ、確率論の本来の面目であるからです。「予測する技術」というのは、ヤコブ・ベルヌーイの確率論の古典的傑作の書名でもありました。

純粋数学というと「数学のための数学」というか、物理的自然現象や人の世に生起するあれこれのこととはまったく無関係に、どこかしら理念的世界に存在する理論体系のようなイメージがあります。あまり大雑把に考えても仕方がありませんので、数学の世界で実際に見聞した諸事実から拾ってみることにしますが、ガウスの整数論などは純粋数学という感じがします。数論に例を求めるのであれば、フェルマの数論も純粋数学の範疇に入りそうです。ライプニッツとヨハン・ベルヌーイは負数や虚数の対数の姿を追い求め、その思索を継承したオイラーは対数の無限多価性を明らかにしましたが、このような究明も純粋数学というほかはありません。これに対し、応用数学というときの「応用」の一語には、純粋数学の諸理論の応用という感じがあります。実際のところ、応用数学のイメージはだいたいにおいてそんなところなのであろうと思います。

ここでとりあえず述べたのは純粋と応用に対する素朴なイメージですが、ではガウスの『誤差論』はどうでしょうか。天体観測の誤差を修正するための工夫ですから、ちょっと考えると応用数学の典型例のような気がするのですが、実際に手に取ってあちこちを眺めると、応用数学の一般的なイメージとは大きく乖離しています。この方面のことは理解が行き届きませんので、漠然とした印象しか口にできないのですが、何というか、「誤差の修正というテーマの中で新しい数学が創造されている」というのが、この書物から受ける率直な印象です。確率論が応用されているというよりも、かえって誤差論の中から確率論が創造されているという感じですが、こんな印象を受けることになるとはまったく想定していませんでした。

ガウスの『誤差論』から受けた不思議な印象を数学的内容に即して語ることはできませんが、既視感というか、どこか別のところで見たことがあるようでもありました。それで数学史を回想してみたのですが、たとえば草創期の無限解析の中に具体的な事例が観察されるように思います。イギリスのニュートンのことはひとまず措くことにしますが、ヨーロッパ大陸の無限解析はライプニッツの 2 篇の論文に始まります。ひとつは 1684 年の微分計算の論文、もうひとつは 2 年後の 1686 年の積分計算の論文です。この 2 篇の論文がドイツのライプチヒで発行されていた学術誌「アクタ・エルディートルム（数学年報）」に掲載された当時、ベルヌー

イ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）はスイスのバーゼルにいたのですが、ライプニッツの論文を見て大いに心を惹かれたようで、協力して解読作業を始めました。ところがライプニッツの論文は謎めいた文言に満たされていて、魅了されながらもなかなか理解できなかったため、ライプニッツに手紙を書きました。ライプニッツもこれに応じ、それから往復書簡が交わされ始めて 10 年ほど続きました。無限解析はこの長期にわたる数学的書簡の蓄積の中から、わずかに 3 人の担い手により誕生しました。

無限解析の成立に先立って曲線の理論の時代、すなわち「人々が曲線に関心を寄せた時代」がありました。デカルトの『方法序説』の刊行は 1637 年。序説で表明された方法の適用例として屈折光学、幾何学、気象学が語られましたが、本稿で注目したいのは幾何学です。三部構成で叙述されているのですが、第 2 部には「曲線の性質について」という表題が附され、ここで今日の解析幾何のアイデアが表明されました。後年の解析幾何学の嚆矢ですが、曲線に寄せる関心ということならデカルト以前にも見られ、長い歴史が経過しています。デカルトはそこに「曲線を方程式で表す」というアイデアを提案しました。

3　デカルトの葉

曲線に寄せる関心は非常に古く、古代のギリシアの数学にも、ニコメデスのコンコイド、ディオクレスのシソイド、アルキメデスの螺旋、それにアポロニウスの円錐曲線等々、さまざまな曲線が登場していました。この傾向はヨーロッパ近代の数学にも受け継がれ、発見され、研究される曲線は増えるばかりでした。デカルトが提案したアイデアによれば、それらの曲線はたいていはみな $f(x,y)=0$ という形の方程式で表されます。

「すべての曲線」と言わずに「たいていはみな」と言ったのはなぜかというと、「方程式 $f(x,y)=0$」というとき、「$f(x,y)$ とは何か」というところに大きな問題がひそんでいるからです。後年のオイラーによる関数概念の提案につながる問題ですが、デカルトが「曲線を方程式で表す」というアイデアを提示した段階では $f(x,y)$ は x と y の多項式でした。多項式なら加減乗除の四則演算だけで構成されますから、多項式に限定するという方針を堅持する限り問題は発生しません。ただし、思索の対象は「代数的な曲線」に限定されます。「代数的な曲線」という観念がはじめにあって、それらを多項式を用いて $f(x,y)=0$ と表示したのではなく、多項式を用いて表示される曲線を指して「代数的な曲線」と呼んだことになりますが、ともあれこれで代数曲線全体の作る世界を展望することができるようになりました。

サイクロイドのように、代数的ではないけれども人々の深い関心を集めた曲線もありますが、それらは一括して「超越的な曲線」と呼ばれ、「代数的な曲線」と区別されました。

既知の代数曲線は代数方程式で表示され、さまざまな仕方で描かれる曲線も、それが代数的である限り代数方程式で表示されますが、デカルトのアイデアの真に恐るべき点は、「方程式から出発した」ことでした。一番はじめに代数方程式 $f(x,y)=0$ を書き下し、それにより表示される曲線を考えていくという順序になりますが、このアイデアにより「すべての代数的な曲線の作る世界」が生成されました。『方法序説』が刊行された年の翌 1638 年には、デカルトはメルセンヌに宛てた書簡の中で $x^3+y^3=axy$（a は定数）という方程式を書き、それが表す曲線の概形を描きました。後年、「デカルトの葉」と呼ばれることになる代数的な曲線です。

デカルトは方程式から出発する姿勢をみずから率先して示したかったのでしょう。

4　曲線の理論から無限解析へ

曲線に寄せて異様に熱意のある関心が示された時代は確かに存在し、いろいろな曲線に接線や法線を引いたり、曲がり具合を調べたり、曲線の囲む領域の面積を求めたりと、さまざまに工夫が凝らされたものでした。その際のあれこれの工夫は個々の曲線に付随する固有の性質に沿って個々別々に考案されたのですが、ライプニッツが提案し、ベルヌーイ兄弟との往復書簡を通じて完成された無限解析の出現に伴って、この時代に区切りがつきました。1696 年にはマルキ・ド・ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』が刊行されました。これは数学史の流れに登場した一番はじめの微積分のテキストですが、注目に値するのはこの著作のタイトルで、無限解析は「曲線を理解するための理論」であることがはっきりと記されています。

無限解析の力はきわめて強く、接線についていえば、どのような曲線が提示されたとしても、任意の点において自在に接線を引くことができるようになりました。もっとも「接線が存在する場合には」という前提のもとでのことではありますが、もはや個別の工夫は不要になり、そのうえ代数曲線のみならず超越的な曲線をも対象にして、「万能の接線法」が手に入ったことになります。デカルトの『方法序説』が刊行されたのは 1637 年。ライプニッツの微分計算と積分計算の 2 編の論文が公表されたのは、それぞれ 1684 年と 1686 年です。この間に 50 年ほどの歳月が流れ、無限解析の誕生により曲線の理論が完成したのですが、このめざましい情景はガウスの誤差論の開く世界に酷似しています。

ガウスは天体観測の誤差の修正を工夫する中で新しい数学理論を創造しましたが、17 世紀の数学者たちは曲線について知りたいという熱情に心を奪われて、その数学的想念から無限解析という名の理論体系が生成されました。何事かに心を奪われるという状況が先にあり、その何事かを追い求める情熱から数学が生まれるという状況はまったく同じです。何かしら完成した数学理論がはじめに存在していて、それを適用する領域を見つけて新たな知見を得るというのではなく、知りたいという熱情と数学の創造が不可分に連繫しています。熱情のおもむくところに数学が生まれています。それで、ここにおいてあらためて思うのですが、人の熱情の向かう先が天体のような天然自然の現象の場合に生まれる数学がつまり応用数学であり、曲線のような数学的自然内の現象に向かうときに生まれるのが、純粋数学ということなのではないでしょうか。

伝統的な言葉遣いに配慮して純粋数学と応用数学を使い分けてみましたが、実のところ理論そのものには応用も純粋もなく、ただ「数学そのもの」というほかはありません。ガウスの『誤差論』を眺めながら無限解析の形成史を回想し、おおよそこんなことを思いました。

5　オイラーの無限解析

オイラーは数学的科学に「純粋数学」と「応用数学」の区分けが存在することを自覚して、わずかな言葉を書き留めましたが、これだけを手掛かりにして応用数学というものの実体に迫るのは困難でした。ところが飛田先生に教えられてガウスの『誤差論』を見ているうちに、は

たと思い当たるところがありました。それはつまり数学の理論そのものには純粋も応用もないという簡明な一事なのですが、この認識はわれながら意外でもありました。

それでもうひとつの事例としてオイラーの無限解析を挙げてみたいと思います。ライプニッツとベルヌーイ兄弟の手で形成された無限解析により、曲線の理論が終着点に到達したことは上述の通りですが、それならそれ以降の無限解析はどのような道を歩んだのでしょうか。もう少し具体的に言うと、ライプニッツとベルヌーイ兄弟の次の時代を生きたのはオイラーですが、無限解析の領域においてオイラーの心情はどのような事象に向けられていたのでしょうか。曲線の理論に決着がついた以上、オイラーの心はもう曲線から離れていたことと思いますが、オイラーの初期の著作や論文を参照すると、力学と変分法にテーマを求めようとしている様子が顕著です。著作でいうと、1736年には『力学』が出ています。全2巻の作品で、エネストレームナンバーはそれぞれ15と16です。1736年のオイラーは29歳でした。それから1744年には『極大もしくは極小の性質を備えた曲線を見つける方法。すなわちもっとも広い意味で諒解された等周問題の解法』という傑作が出ています。エネストレームナンバーは65。オイラーは37歳でした。

動くものの軌跡は曲線を描きますから、力学は曲線の理論を基礎にして理解できそうです。また、変分法の契機になったのはヨハン・ベルヌーイが提示した最速降下曲線を求める問題ですから、これもまた曲線の理論に端を発しています。こうしてみるとオイラーは曲線の理論を踏まえたうえで、その先に開かれていく世界を展望していたことがわかりますが、力学と変分法に向かったのはなぜかというと、ニュートンの力学が念頭にあったからでした。『力学』というタイトルの著作ばかりではなく、変分法もまたオイラーにとっては力学の基本原理の探究であったことは周知の通りですが、これを要するにライプニッツとベルヌーイ兄弟の無限解析の力をもってニュートンの力学を理解しようとしたところに、オイラーの数学的企図があったということになります。この流れの中で無限解析の姿もまた大きな変容を重ねていきました。

このあたりのことは通説の通りとして、ここで問題にしたいのはオイラーの無限解析は純粋数学なのか、あるいは応用数学と見るべきなのか、どちらなのだろうということです。オイラーの無限解析の実体をひとことで言うと微分方程式の解法理論にほかなりませんが、微分方程式ならライプニッツとベルヌーイ兄弟の時代にもありました。ただし、オイラー以前の微分方程式は曲線の理論の中で考えられていましたから、微分方程式というよりも、曲線の接線や法線の状況を指定する方程式というほどの意味合いのものでした。念頭にあるのはつねに曲線で、接線や法線がかくかくしかじかという状勢下にあることが判明しているとして、そのような曲線の全体像を復元することをねらい、その方法を「逆接線法」と呼んでいました。微分方程式論の視点に立てば、逆接線法というのはつまり積分法と同じです。

曲線に接線を引くのが微分法で、逆接線法が積分法ということになりますが、そんなふうに見ること自体、視点はすでにオイラーの無限解析の世界に移っています。

オイラーの無限解析はもう曲線の理論ではありません。オイラーは関数の概念を数学に導入し、曲線を関数のグラフと見る視点を確立し、曲線から関数へと視線を移しました (参考文献 [2, 3])。こうすることによって無限解析の主役は関数になり、接線や法線に関する情報は微分方程式の形で提示され、逆接線法は積分法になりました。この場合、積分法は微分方程式の解法と同じ意味になります。曲線の理論のはじまりのころ、デカルトは方程式で表される図形

を指して曲線と呼ぶというアイデアを提案しましたが、オイラーはさらにもう一度、曲線の概念を変えたことになります。

オイラーの無限解析の実体は微分方程式の解法理論ですから、それ自体には応用数学という印象はありませんし、むしろ純粋数学のように見えるのですが、出所は力学です。力学に寄せる深刻な関心の中から非常に一般的で抽象的な数学理論が生まれたということになりますが、微分方程式論それ自体は純粋数学でも応用数学でもなく、端的に「数学の理論」というほかはありません。微分方程式論は純粋数学か応用数学かと問うこと自体、あまり意味のないことで、「力学を契機として創造された数学」というくらいに見ておくのが妥当かもしれません。

代数方程式論で考えてみると、3 次方程式や 4 次方程式の代数的解法を探索したりするのは数学の内部で観察される事象の観察ですが、ここからガウスの円周等分方程式論やアーベルの「不可能の証明」やガロアのガロア理論のような数学が生まれました。ほかにもいろいろな事例が挙げられそうに思います。

こうしてみると「数学の世界」というのは確かに実在し、そこにはライプニッツとヨハン・ベルヌーイの無限解析やオイラーの無限解析、ガウスの円周等分方程式論、アーベルの「不可能の証明」、ガロアのガロア理論など、多種多様な理論が共存しています。通常のイメージからすると、それらはみな「純粋数学」と呼ぶのが相応しそうに思います。これに対し、通常の語感からすると保険数学などはいかにも応用数学のような感じがしますが、応用数学を上記のように理解するのであれば、保険数学はむしろ実用数学と呼ぶほうが相応しい感じがします。

オイラーの無限解析の出自は力学ですが、既成の微分方程式論を力学に応用したのではなく、根底には力学を曲線の理論の視点に立って理解しようとする数学的企図が控えていました。曲線の理論を応用したというのでもなく、むしろ「枠組みをあてはめた」というほうがよさそうです。すると、力学の側から要請される事柄もあることですし、従来の曲線の理論の側でも変容を迫られて、オイラーの無限解析、すなわち微分方程式論が生まれるという成り行きになりました。

オイラーは「オイラーの無限解析」を応用数学と見ていたのではないかと、このごろ思うようになりましたが、それは理論形成の契機が数学以外のところにあったという意味であり、「オイラーの無限解析」それ自体は整数論などと同等の数学的科学の一領域であり続けています。それゆえ「純粋と応用は交錯する」と、現在の時点では考えています。

参考文献

[1] ガウス『誤差論』. 飛田武幸・石川耕春訳，紀伊国屋書店，昭和 56 年（1981 年）5 月.

[2] 高瀬正仁『オイラーの無限解析』（レオンハルト・オイラーの著作『無限解析序説』全 2 巻の巻 1 の翻訳書）. 海鳴社，平成 13 年（2001 年）6 月.

[3] 高瀬正仁『オイラーの解析幾何』（レオンハルト・オイラーの著作『無限解析序説』全 2 巻の巻 2 の翻訳書）. 海鳴社，平成 17 年（2005 年）11 月.

[4] 高瀬正仁『無限解析のはじまり　わたしのオイラー』筑摩書房（ちくま学芸文庫 Math & Science），平成 21 年（2009 年）7 月.