九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

一様分布論とその応用

手塚, 集
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

https://hdl.handle.net/2324/1462180

出版情報：COE Lecture Note. 46, pp.223-232, 2013-02-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
バージョン：
権利関係：

一様分布論とその応用

手塚　集

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

1　ディスクレパンシー

“ディスクレパンシー (discrepancy)”という概念は、19 世紀から 20 世紀初頭にかけてエルゴード理論との密接な関係もあって広く研究された「一様分布論」という数論の一分野に起源がある。もともと「一様分布論」は、ある空間における無限点列の（漸近的な）分布を議論する分野であったが、20 世紀前半に「無限点列」を「有限点列」に置き換えた時の分布の様子を研究することが主要なテーマとなっていった。人によってはこの分野を「Irregularities of Distribution（分布の不規則性)」と呼ぶこともある。そこでは、分布の不規則性、すなわち一様分布からのズレを測る尺度としてディスクレパンシーという量が定義され、ディスクレパンシーができるだけ小さい、つまり“一様性のできるだけ高い”有限点列を構成することが主要な研究テーマとなっている。

1.1　一様性の数学的定義

まず、無限点列の一様性から始めよう。その定義は次のようになる。

定義 1 X_n, $n = 0, 1, \ldots,$ を k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ 内の無限点列とする。任意の k-次元区間 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i) \in [0,1]^k$（ここで $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ および $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ かつ $a_i < b_i$ $(1 \le i \le k)$ とする）に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#([\mathbf{a}, \mathbf{b}); N)}{N} = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i),$$

となれば、無限点列 X_n, $n = 0, 1, \ldots$ は一様であるという。ここで、$\#(A; N)$ は区間 A に入る点 X_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ の数を表す。

さて、この一様性と Riemann 積分の間には次のような関係がある。

定理 1 無限点列 X_n, $n = 0, 1, \ldots,$ が k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ 内で一様であるための必要十分条件は、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \int_{[0,1]^k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

である。ここで、f は $[0,1]^k$ 上で定義される任意の（Riemann 可積分）実数値関数である。

下の例は、一様分布する無限点列の代表的なものであり、1 次元の場合を Weyl 列、高次元の場合を Kronecker 列あるいは Richtmyer 列と呼んでいる。

例 1 点列 $(\{n\theta_1\}, \ldots, \{n\theta_k\})$, $n = 0, 1, \ldots,$ は、実数 $1, \theta_1, \ldots, \theta_k$ が有理数体上線形独立ならば一様となる。ここで、$\{x\}$ は実数 x の浮動小数部分をとることを意味している。

さて、次に有限点列の場合を考えよう。ディスクレパンシーの定義にはいくつかあるが、次に示すのが代表的なものである。

定義 2 X_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, を k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ 内の点集合 P_N とし、$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ とする。そのとき、点集合 P_N に対するディスクレパンシーは

$$D_N^{(k)} = \sup_{\mathbf{t} \in [0,1]^k} \left| \frac{\#([\mathbf{0}, \mathbf{t}); N)}{N} - t_1 \times \cdots \times t_k \right|$$

と定義される。

定義 1 と比べると $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{t}$ となるような部分区間のみを対象としていることに注意したい。図 1 に $N = 10$ の時の 2 次元の例を示す。この場合は

$$D_{10}^{(2)} = \sup_{(\alpha,\beta) \in [0,1]^2} \left| \frac{\#([(0,0), (\alpha, \beta)); 10)}{10} - \alpha\beta \right|$$

を計算することになる。

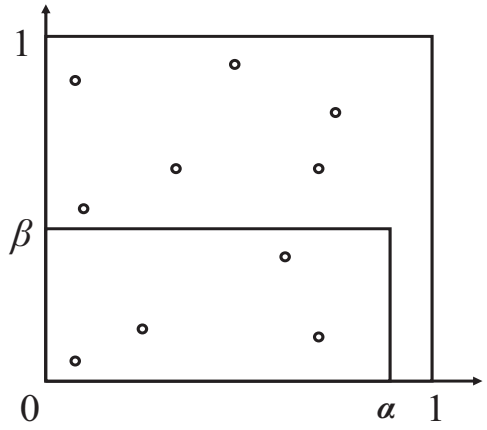

図 1：2 次元ディスクレパンシーの例

定理 1 の“無限点列”を“有限点列”に置き換えたとき、正しい積分値に収束していく様子を教えてくれる重要な定理がある。それは、60 年代に得られた Koksma-Hlawka の定理と呼ばれるもので、積分の収束の様子と先に述べたディスクレパンシーという量を定量的に結びつけた最初の結果として知られている。

定理 2 $D_N^{(k)}$ を k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ 内の点列 $X_0,\ldots,X_{N-1}$ の L_∞-ディスクレパンシーとし、$V(f)$ を関数 $f(\mathbf{x})$ の Hardy-Krause の意味での変動とすると

$$\left|\int_{[0,1]^k} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)\right| \le V(f)D_N^{(k)}$$

が成り立つ。

この定理の重要な点は、右辺が 2 つのまったく意味の異なる量の積になっている点である。$V(f)$ は被積分関数のみで決まる量であり、点列によらない。一方、$D_N^{(k)}$ は点列の一様性のみで決まり、被積分関数によらない量である。被積分関数が与えられれば、ディスクレパンシーの小さい点列ほど積分誤差は小さくなることを示している。ただし、定義からわかるように、$V(f)$ という量はたとえ有界であっても非常に大きくなる。つまり、実際のアプリケーションで使えるような誤差評価には残念ながらなっていない。重要なことは、この定理により有限離散的な世界での研究対象であった“ディスクレパンシー”と連続無限な世界での研究対象である“積分”が明確につながったという点である。

1.2 超一様分布列

前節においてディスクレパンシーと高次元数値積分の誤差との重要な関係について述べた。簡単に言えば、ディスクレパンシーの小さい点列が数値積分の計算誤差を小さくするのである。では、ディスクレパンシーの小さい点列は実際にはどのように構成するのだろうか。それが本節の主題である。まず超一様分布列を定義しよう。

定義 3 超一様分布列は k 次元単位立方体内の無限点列であり、それを $X_0, X_1, \ldots$ と表す時、先頭の N 点からなる集合 $(X_0,\ldots,X_{N-1})$ がすべての $N>1$ に対して、

$$D_N^{(k)} \le C_k \frac{(\log N)^k}{N}$$

を満足するものである。ここで、C_k は次元 k のみに依存する定数。

$\log N$ の指数が k となっているのは次の理由による。もしそれが k より小さい値、例えば $k-1$ だったとして、次のような k 次元単位立方体内の N 点集合

$$\tilde{X}_n = \left(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(k-1)},\frac{n}{N}\right), \qquad n=0,1,\ldots,N-1,$$

を考えてみる。ここで $X_n=(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(k-1)})$, $n=0,1,\ldots,$ は $k-1$ 次元の超一様分布列とする。すると面白いことに、この N 点集合のディスクレパンシーが、任意の $N>1$ に対して、

$$D_N^{(k)} \le C_k \frac{(\log N)^{k-2}}{N}$$

となることを示すことができるのである。しかし、この結果は現在予想されている k 次元ディスクレパンシーの最適な上界に矛盾するので、結局 $\log N$ の指数は k より小さくできないこと

になる。言い換えれば、超一様分布列というのはディスクレパンシーの意味では最も一様な点列として定義されているのである。

以下、超一様分布列の構成法の1つであるHalton列を紹介しよう。まず、1次元超一様分布列として広く知られているvan der Corput列から始める。それは、基底逆関数と呼ばれるつぎのような写像に基づいている。

定義4 $b>1$を整数とする。非負整数nに対して、そのb進展開が$n=a_0+a_1b+\cdots+a_mb^m$となるとき、基底逆関数は

$$\phi_b(n) := \frac{a_0}{b}+\frac{a_1}{b^2}+\cdots+\frac{a_m}{b^{m+1}}$$

と定義される。

このとき、van der Corput列は次のように定義される。

定義5 1次元点列

$$x_n=\phi_b(n), \quad n=0,1,2,\ldots$$

を基底bのvan der Corput列と呼ぶ。つまり、

$$x_n=\frac{x_{n,1}}{b}+\frac{x_{n,2}}{b^2}+\cdots+\frac{x_{n,m+1}}{b^{m+1}}$$

と書けば、$x_{n,j}=a_{j-1}$となる。

基底$b=2$のvan der Corput列は次のような無限列になる。

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{8},\ldots$$

これは、

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n},\ldots$$

という無限列の順番を入れ替えただけであるが、前者は超一様分布列となる一方、後者はそうならないことが証明できる。大きな違いは、van der Corput列では任意の引き続く2項(x_n,x_{n+1})をみると、1/2以上の数と以下の数が交互に現れていることである。さらに詳しく調べてみると、すべての$m>0$に対して、任意の$j\geq 0$について、引き続く2^m項$(x_{j2^m},x_{j2^m+1},\ldots,x_{(j+1)2^m-1})$の各項が、区間$[0,1)$を$2^m$等分した部分区間にちょうど1項ずつ落ちていることがわかる。こういう性質が、この数列を非常に一様なものにしている。

van der Corput列を単純にk次元に拡張したものをHalton列と呼んでいる。

定義6 k-次元点列

$$X_n=(\phi_{b_1}(n),\ldots,\phi_{b_k}(n)), \quad n=0,1,2,\ldots,$$

をHalton列という。ここで、$b_1,\ldots,b_k$はどの2つも互いに素な正整数とする。

Halton 列という名の由来は、Halton が初めてこの数列が超一様分布列になることを証明したからである。具体的には次の定理である。

定理 3 任意の $N > 1$ に対して、Halton 列の先頭の N 点のディスクレパンシーは

$$D_N^{(k)} \leq C(b_1, \ldots, b_k)\frac{(\log N)^k}{N} + O\left(\frac{(\log N)^{k-1}}{N}\right)$$

となる。ここで、$C(b_1, \ldots, b_k)$ は定数。

この定理の証明は、次に示す有名な中国人剰余定理に大きく負っている。

定理 4 $b_1, \ldots, b_k$ をどの 2 つも互いに素な正整数とする。また $e_1, \ldots, e_k$ を正整数とし、$M = b_1^{e_1} \cdots b_k^{e_k}$ とする。任意の整数 $0 \leq N < M$ に対して、

$$N = n_i \pmod{b_i^{e_i}}, \quad i = 1, \ldots, k$$

（ここで $0 \leq n_i < b_i^{e_i}$ とする）と表すと、$(n_1, \ldots, n_k)$ と N は 1 対 1 に対応する。

中国人剰余定理と Halton 列の一様性との関係を見るには次のような部分区間を考えるとわかりやすい。

$$\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{j_i}{b_i^{e_i}}, \frac{j_i+1}{b_i^{e_i}}\right)$$

ここで、$0 \leq j_i < b_i^{e_i}$ は整数であり、また部分区間の面積はすべて等しく $1/M$ となっていることに注意する。つまり、定義 6 からいえることは、Halton 列 X_n, $n = 0, 1, \ldots, M-1$ は、上の部分区間のおのおのにちょうど 1 点づつ落ちているということである。そしてこのことは任意の非負整数 $e_1, \ldots, e_k$ に関して言えるのである。Halton 列の持つこの“一様性”が、超一様分布列であることの証明に重要な役割を果たしている。

定理 3 において、係数 $C(b_1, \ldots, b_k)$ を最小にするには小さい順に k 個の素数を $b_1, \ldots, b_k$ に割り当てることである。Halton の証明から 30 年以上たって Atanassov は、k が十分大きければ、$C(b_1, \ldots, b_k) = O(1/(k2^k))$ となって、定数項は 0 に収束することを証明した。

2 金融問題への応用例

科学技術計算の分野において、数値積分の占める割合は非常に大きい。すでに低次元（5, 6 次元以下）では、いろいろ工夫された計算アルゴリズムがあり、その誤差についても、被積分関数の滑らかさに応じて解析がされている。しかし、それ以上に次元が高くなるといわゆる“次元の呪い (the curse of dimensionality)”のために低次元で有効なアルゴリズムがその有効性を失ってしまうことから、“最後の手段 (last resort)”としてのモンテカルロ法が一般に用いられている。ただ、モンテカルロ法は、誤差がサンプル数の平方根に反比例しているため、収束が非常に遅い。例えば、一桁精度を上げようとすれば、さらに 100 倍の計算時間が必要になるのである。そのため、60 年代すでに、このモンテカルロ法の問題点を克服するため先に述

べた“超一様分布列”（当時はまだ、“準乱数”と呼ばれていたが）を用いる試みがなされていた。特に、ソ連において水爆開発に必要となるモンテカルロ計算の高速化にこの超一様分布列が使われていたことは専門家の間ではよく知られている。ところが、そのころの実験結果などから導かれた結論は、高次元（50 次元以上）の数値積分計算では、超一様分布列は有効ではないということだった。文献によっては、せいぜい 12 次元ぐらいでその有効性はなくなるとしたものまであった。しかし、90 年代初め、特に金融工学に関連した高次元数値積分の計算が実用上重要になり、その高速化が不可欠 (Time is Money) なことから、（50 次元以上の）高次元積分の研究が米国において集中的におこなわれ、その結果、非常に高い次元（場合によっては 1000 次元以上）でも問題によっては、超一様分布列による高速化が可能になることがわかった（文献 [1] 参照）。

金融工学の現場において取引されているデリバティブのなかでも、取引量が巨大でかつ商品としても複雑なものが MBS (Mortgage-Backed Securities) という住宅ローン債権を担保として発行される証券である。2008 年のリーマン・ショックの原因となったことから今では一般にも広く知られている金融商品である。MBS の価格計算問題を、パススルー証券と呼ばれる最も単純な証券で説明しよう。考えているのは、貸し出し金利 r_0 の元利均等方式による 30 年の住宅ローンで、毎月の返済額を C とする。そして、各 $k = 1, 2, \ldots, 360$ に対して、

r_k：第 k 月目の金利（月率）

w_k：第 k 月目に（全額）期限前償還が起きる確率

$B_k = C(1 + 1/(1 + r_0) + \cdots + 1/(1 + r_0)^{360-k})$：第 k 月目の元本残高

と定義しよう。

また、金利 r_k は Black モデル、すなわち $k = 1, 2, \ldots, 360$ に対して、

$$r_k = K_0 \exp(\sigma z_k) r_{k-1},$$

に従うものとする。ここで K_0 は定数とし、z_k, $k = 1, 2, \ldots, 360$ は独立な標準正規分布と仮定する。

期限前償還の確率 w_k, $k = 1, 2, \ldots, 360$ は、ここでは、金利 r_k, $k = 1, 2, \ldots, 360$ のみに依存すると考えている。具体的には

$$w_k = K_1 + K_2 \arctan(K_3 r_k + K_4)$$

のようにモデル化する。ここで、K_1, K_2, K_3, および K_4 は定数項であり、金利が低ければ期限前償還が増え、金利が高くなるにつれて減少するように決められている。

さて、このような仮定のもとに第 k ヶ月目のキャッシュフローは

$$M_k(r_1, \ldots, r_k) = (1 - w_1) \cdots (1 - w_{k-1})(C(1 - w_k) + B_k w_k)$$

と表せる。ここで、$w_k(r_1, \ldots, r_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 360$ は期限前償還率を表している。すると将来 30 年間（360 ヶ月）にわたって生じるキャッシュフローの現在価値は、割引率

$$d_k(r_1, \ldots, r_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1 + r_i}$$

を掛けて、

$$PV(r_1,\ldots,r_{360}) = \sum_{k=1}^{360} d_k(r_1,\ldots,r_{k-1})M_k(r_1,\ldots,r_k) \tag{1}$$

と表すことができる。金利 $r_1,\ldots,r_{360}$ が確率変数 $z_1,\ldots,z_{360}$ の関数であることから、最終的に求めたいものは次のような期待値となる。

$$\mathrm{E}(PV) = \frac{1}{(2\pi)^{180}} \int_{\mathrm{R}^{360}} PV(z_1,\ldots,z_{360}) \exp\left(-\frac{z_1^2+\cdots+z_{360}^2}{2}\right) dz_1\cdots dz_{360}$$

つまり、360 次元の積分を計算するのである。

注 1 このモデルは、非常に単純化したものであることに注意したい。期限前償還は全額返済を仮定しており、また金利モデルも最も単純な幾何 Brown 運動である。実際に金融工学の現場で使われているモデルでは、部分返済も当然考慮されているし、金利モデルももっと複雑なものが使われている。

注 2 ここで紹介した MBS は、パススルー証券といわれる最も単純な MBS である。その他に、CMO (Collateralized Mortgage Obligation) と呼ばれる MBS があり、アメリカでは巨大な市場を形成している。この商品はパススルー証券を小さく切り分けて別々の証券として販売するというもので、この場合の価格計算は非常に複雑になる。

金融工学で現れる積分計算問題は、多くの場合次のような形をとることが知られている。

$$J(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k |C|^{1/2}} \int_{\mathrm{R}^k} p(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{v}C^{-1}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right) d\mathbf{v},$$

ここで、$p(\mathbf{v})$ は k 次元行ベクトル $\mathbf{v}$ を変数とする支払い関数、C (共分散行列) は対称正定値 $k\times k$ 行列で、$|C|$ は行列式を表す。変数変換すればこの積分は

$$J(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k} \int_{\mathrm{R}^k} p(A\mathbf{z}^{\mathrm{T}}) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{2}\right) d\mathbf{z}.$$

となる。ここで、A は $AA^{\mathrm{T}} = C$ を満足する $k\times k$ の実行列である、また $\|\mathbf{z}\|$ は k 次元ベクトル $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_k)$ の L_2-ノルム（ユークリッドノルム）を表している。

実際のインプリメンテーションでは、この積分の積分区間を、次のように k-次元単位立方体に変数変換している。

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \quad i = 1,\ldots,k,$$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{dx_i}{dz_i} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{2}\right).$$

つまり、

$$J(p) = \int_{[0,1]^k} p\left(A\left(\mathbb{N}^{-1}(x_1),\ldots,\mathbb{N}^{-1}(x_k)\right)^{\mathrm{T}}\right) d\mathbf{x}.$$

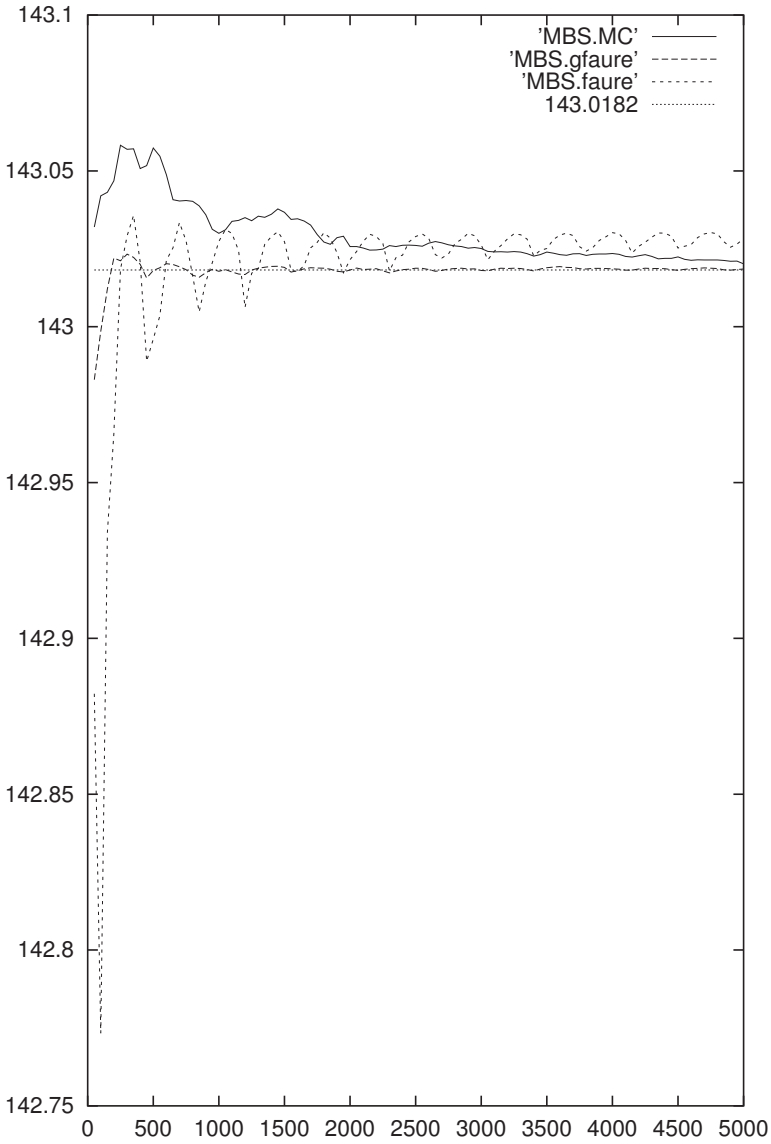

図 2：乱数列と超一様分布列の収束の比較：MBS の場合（縦軸が価格、横軸はサンプル数）

となっている。

先にも述べたように、金融工学では次元 k は数百次元（ときには 1000 次元以上）にもなり、そういった高次元積分を高速に計算することが求められている。

図 2 に計算例を示す。乱数列と超一様分布列の比較である。超一様分布列としては Faure 列と金融の現場で広く用いられている一般化 Faure 列の 2 つを用いた。これらの超一様分布列の詳細については文献 [2] を参照されたい。実線 (MBS.MC) は、乱数列（モンテカルロ法）の結果を示している。2 つの破線（MBS.faure および MBS.gfaure）は、それぞれ 2 種類の超一様分布列の結果である。すると、次の 2 つの比較が可能となる。

(1) 乱数列 vs. 一般化 Faure 列

(2) Faure 列 vs. 一般化 Faure 列

例えば、図 2 において 1000 サンプル点のところでみると一般化 Faure 列の結果はほぼ収束している。一方、乱数列および Faure 列の結果はだいたい同じような精度であり、一般化 Faure 列に比べ約 1 桁精度が低い。もともとモンテカルロ法は確率的な手法であり、それに対し、超一様分布列は決定的な手法なので、両者の収束のスピードを比較するのも簡単ではないが、よく使われるひとつの方法は、精度が 1 桁違うということに着目するもので、それによれば「超一様分布列により約 100 倍のスピードアップが得られた」と言うことができる。また、超一様分布列もその種類によって実用上の有用性には大きな違いがあることが分かる。

参考文献

[1] 手塚　集、ウォール街を動かすソフトウエア、岩波書店、2002.

[2] 手塚　集、「超一様分布列の数理」、計算統計 I、岩波書店、2003.