非線形シュレディンガー方程式による流れのモデル化

福本, 康秀
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

出版情報：COE Lecture Note. 46, pp.213-222, 2013-02-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
バージョン：
権利関係：

非線形シュレディンガー方程式による流れのモデル化

福本　康秀

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

1　はじめに

液体や気体の流れ，その中を運動する物体に働く力を理解し，それを利用したり，さらには制御していこうとする学問が流体力学である．同じ形状の路であっても，流れの速度が遅い場合は整然と流れるが，速くなると乱れが生じる．また，撹乱振幅が小さい場合は撹乱の増幅がみられないが，振幅が大きくなると増幅することもある．このような流れの安定性の問題は，工学から地球惑星，物理学，数学にまたがる大きな分野で，研究が深まるにつれて，偏微分方程式，力学系・パターン形成，特異点論へと，他分野との接点が広がりつつある．

本稿では，水面波の安定性を例に，流れの撹乱を記述する流体方程式を非線形シュレディンガー方程式／ギンツブルグ・ランダウ方程式によってモデル化するアイデアとその具体的な手続きを概説する．そして，前者によって定常状態の安定性と解の分岐を論ずる．背後には，粘性のない流体の運動を支配するオイラー方程式のハミルトン構造があり，ハミルトン系に対する Krein のスペクトル理論が適用できる．それをもとに，散逸が不安定性を引き起こすことを明らかにする．

2　ナビェ・ストークス方程式の導出の概略

水や空気のような通常の流体の運動は Navier-Stokes 方程式によって支配される．この方程式の導出は骨が折れる作業である [2, 6]．本節では，そのあらましをかいつまんで述べる．流体は縮まないとし，密度 ρ はいたるところ一定であると仮定する．流体を無数の流体粒子の集合と考える．流体粒子というのは，分子ではなく，多数の分子を含む極めて微小な体積をもつ流体要素を指し，巨視的な記述の立場では，これを 1 点とみなす．ある流体粒子の時刻 t における位置を $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ とすると，その点における流速 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ が

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t)) \tag{1}$$

によって定義される．加速度の k 成分は

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla) u_k \tag{2}$$

とあらわされる．

流体の内部では，微小な流体の塊同士が押し合いへし合いしている．ある流体の塊がその境界を通してまわりの流体から受ける力は圧力と粘性応力である．圧力は境界面に垂直方向に押し合う力で，たとえば，断面積 S で，法線方向を x 軸に向けた x と $x+\delta x$ にある平行な側面をもつ薄い板状領域に働く圧力の x 成分の和は

$$p(x,y,z)S - p(x+\delta x,y,z)S = -\left\{\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z)\delta x + O\big((\delta x)^2\big)\right\}S \tag{3}$$

である．圧力だけなら，着目している板状領域に対する Newton の第 2 法則において，厚さ δx を無限小にとる極限で，運動方程式の x 成分が得られる：

$$\rho\delta V\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta V \quad (\delta V = S\delta x) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4}$$

粘性はまわりの流体が着目している流体塊を変形させようとする力で，簡単にいうと内部摩擦である．これには運動量を速度の大きい方から小さい方に拡散させようとする働きがあり，動粘性係数 ν がその拡散係数となる．流体塊には境界面を通してまわりの流体から受ける力に加えて，重力のように直接内部の各点に作用する体積力が働く．単位体積当たりの体積力を $\boldsymbol{b}$ とおくと，結局，Newton の第 2 法則から次のような運動方程式に導かれる．

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{b}. \tag{5}$$

これを **Navier-Stokes 方程式**とよぶ．非圧縮性流体の場合，これに，任意の流体塊が占める領域 V_t の体積が不変という条件が加わる．

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} dV = \int_{V_t}\nabla\cdot\boldsymbol{u}dV = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0. \tag{6}$$

3　流れの安定性とギンツブルグ・ランダウ方程式

重力に代表される体積力は，通常，ポテンシャル関数 $\Phi(\boldsymbol{x})$ を用いて $\boldsymbol{b} = -\nabla\Phi$ とあらわせる．よって，密度 ρ が一定の流体の場合，Navier-Stokes 方程式において，体積力 $\rho\boldsymbol{b}$ は圧力 $-\nabla p$ に組み入れてしまってよい．さて，安定性を議論する対象となる基本流の流速場と圧力場を $\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x},t)$ と $P_0(\boldsymbol{x},t)$ とおこう．これらは，当然，$\nabla\cdot\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x},t) = 0$ および Navier-Stokes 方程式 (5) をみたす．

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{U}_0}{\partial t} + (\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{U}_0\right] = -\nabla P_0 + \rho\nu\nabla^2\boldsymbol{U}_0. \tag{7}$$

典型的な状況として，定常流をとることが多い：$\partial\boldsymbol{U}_0/\partial t = 0$.

この基本流に撹乱を加える．撹乱の流速場と圧力場を $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ と $\tilde{p}(\boldsymbol{x},t)$ とおくと，全速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ と全圧力場 $p(\boldsymbol{x},t)$ は $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_0 + \tilde{\boldsymbol{u}}$ と $p = P_0 + \tilde{p}$ で，これらは Navier-Stokes 方程式 (5) をみたす．基本流がみたす方程式 (7) を差し引くと，撹乱場の発展方程式

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}} + (\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}_0 + (\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{p} + \nu\nabla^2\tilde{\boldsymbol{u}}. \tag{8}$$

この方程式をじっと眺めていると，空間 1 次元の複素数値関数 $\psi(x,t)$ $(\in \mathbb{C})$ に対する時間依存 Ginzburg-Landau 方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu\psi + \alpha\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \beta|\psi|^2\psi \tag{9}$$

との類似性が浮かび上がってくる [4]．ここで，U, μ, α, β は定数ととる．α, β が複素数の場合を**複素 Ginzburg-Landau 方程式**とよぶ．Ginzburg-Landau 方程式は，いわば，撹乱場の方程式 (8) の 1 次元トイモデルである．60 年代半ばから，特異摂動法によって (8) から (9) を系統的に導く努力が続けられ，これによって，流れの安定性に対する理解が格段に深まっていった．流れの安定性の文脈では，(9) は Landau-Stuart 方程式あるいは Stuart-Stewartson 方程式とよばれる．

係数 $\mu = 0$ で，α と β が純虚数のとき，(9) は非線形 Schrödinger 方程式に帰着する．粘性のない流体の運動にかかわるのはむしろこちらの方である．以下では，水面波を例にとりあげ，その安定性が非線形 Schrödinger 方程式によって記述されることをみていこう．

4　水面波

静止状態においては $z = 0$ を水面（自由表面）とする水（液体）の波について考える．簡単のため，水深を無限大としよう．基本場として流れはなく $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{0}$，水面の微小振動のみをゆるすと，(5) において，非線形項を無視できる．ごく微小なスケールの現象を除けば粘性項も無視してよい．外力として重力が働くので，Navier-Stokes 方程式 (5) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{e}_z \tag{10}$$

で近似される．ここで，g は重力加速度で，$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向（= 鉛直上向き）の単位ベクトルである．一般に，Navier-Stokes 方程式から粘性項を除いたものを Euler 方程式という．密度 ρ は一定とし，速度場にはソレノイダル条件 (6) を課す．密度 $\rho =$ const. の場合，$\nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ならば，(5) に回転 $(\nabla\times)$ を作用させた方程式が自動的に満足されることがわかる．したがって，$\nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，すなわち，流れは渦なしと仮定しよう．このとき，$\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ ととることができる．ϕ を速度ポテンシャルという．条件 (6) に代入すると，ϕ は

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{11}$$

を満足しなければならないことがわかる．

関係 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ を (10) に代入すると，これは

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \tag{12}$$

となり，

$$\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \rho g z = f(t) \tag{13}$$

のように積分できる．右辺の $f(t)$ は時間 t についての任意関数である．これはポテンシャル流に対する Bernoulli の定理である．静止状態では水面 $(z=0)$ で圧力 p が大気圧 p_{a} に等しいと課すと，$f(t)=p_{\mathrm{a}}$ と定まる．

さて，水面の変位は y 方向にはよらないと仮定し，水面の微小変位を $\zeta(x,t)$ ととろう．変位した水面 $z=\zeta(x,t)$ においても圧力が大気圧 p_{a} に等しいことを要請すると，境界条件の一つ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+g\zeta=0 \quad \text{at} \quad z=\zeta(x,t)\approx 0 \tag{14}$$

が導かれる．線形近似の範囲内で，境界を $z=0$ ととってよい．もう一つの境界条件として，水面 $z=\zeta(x,t)$ の速度の法線成分と液体の速度の法線成分が水面 $(z=\zeta)$ で一致することを要請する．水面は $F(x,z,t)=z-\zeta(x,t)=0$ とあらわされるので，法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\nabla F=(-\partial\zeta/\partial x,0,1)$ である．水面速度は $\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}=(0,0,-\partial\zeta/\partial t)$，流速は $\nabla\phi$ なので，境界条件は，水面 $(z=\zeta)$ で $(\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}}-\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}=0$ とあらわせ，線形近似すると

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=\zeta(x,t)\approx 0 \tag{15}$$

となる．2 つの境界条件 (14) と (15) から ζ を消去すると，ϕ に対する境界条件

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=0 \tag{16}$$

が導かれる．

水面下 $(z<\zeta(x,t))$ をみたす液体の運動は (11) を解くことによって求められる．水面の形を単色進行波 $\zeta(x,t)=\mathrm{Re}[A\exp\{i(kx-\omega t)\}]$ と仮定しよう．振幅 A は複素数で，$\mathrm{Re}[\cdot]$ は実部をとることを意味する．実定数 $k,\ \omega$ をそれぞれ波数，周波数とよび，波長は $\lambda=2\pi/k$，振動数は $f=\omega/(2\pi)$ によって与えられる．この波は, 形を変えないで，x の正の方向に速度 $c_{\mathrm{p}}=\omega/k$ で伝播する．これを位相速度とよぶ．表面の形に呼応して，水面下の速度ポテンシャルは $\phi=\Phi(z)\exp\{i(kx-\omega t)\}$ の形をとる．無限の深さの場合，底 $(z=-\infty)$ で有界であるために $\Phi\propto\exp(kz)$ と定まり，(11) の一般解が，任意定数 C を用いて $\phi=Ce^{kz}e^{i(kx-\omega t)}$ と求められる．これを境界条件 (16) に代入して，$C\neq 0$ を要請すると，ω と k の関係

$$\omega^2=gk \quad i.e.\ \ \omega=\sqrt{gk} \tag{17}$$

に導かれる．これを**分散関係**とよぶ．詳細については文献 [5] を参照されたい．

位相速度は $c_{\mathrm{p}}=\sqrt{g/k}$ である．一方，分散関係 $\omega=\omega(k)$ の k についての微分 $c_{\mathrm{g}}=d\omega/dk=\sqrt{g/k}/2$ を群速度とよぶ．これは波のエネルギーの伝播速度をあらわすのであるが，次節で述べる波の変調 (modulation) において，波群の伝播速度を与えることが明らかになる．

5　波の変調と非線形シュレディンガー方程式

水面波に限らず一般の波について，振幅や位相の変調が非線形 Schrödinger 方程式によって記述されることが簡単な考察からわかる．波をあらわす複素数値関数を $\psi=\psi(x,t)$ とかこう．分散関係が

$$\omega-\omega_0(k)+\gamma|\psi|^2=0 \tag{18}$$

のように振幅 $|\psi|$ に非線形的に依存することを仮定することは，ごく自然である．ここで，γ は定数である．線形部については，たとえば無限水深の水面波の場合，$\omega_0(k) = \sqrt{g/k}$ ととればよい．

前節では波の振幅 $C = \text{const.}$ を仮定したが，$k = k_0$ の近傍で振幅が時間的・空間的にゆっくり変化する（= 変調）としよう．

$$\psi = A(x,t)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}; \quad \omega_0 := \omega_0(k_0). \tag{19}$$

振幅 $= A(x,t)$ は x と t についてゆっくり変化する複素数値関数である．非線形分散関係 (18) を $k = k_0$ のまわりで展開すると，

$$\omega - \omega_0(k_0) - \omega_0'(k_0)(k-k_0) - \frac{1}{2}\omega_0''(k_0)(k-k_0)^2 + \gamma|\psi|^2 + O\left((k-k_0)^3\right) = 0 \tag{20}$$

となる．ここで，上付き記号 $(\,)'$ は微分をあらわす．以下では Taylor 展開の剰余項を無視する．一般に，周波数 ω と波数 k は，$\omega = i\partial/\partial t,\ k = -i\partial/\partial x$ のように，微分演算子で読み替えることが可能である．分散関係の展開形においてこの読み替えを行い，それに (19) を代入すると，振幅関数 A の発展方程式

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + i\omega_0'\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2}\omega_0''\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma|A|^2 A = 0 \tag{21}$$

が導かれる．引数を省略して，$\omega_0' = \omega_0'(k_0),\ \omega_0'' = \omega_0''(k_0)$ と微分係数を簡単に表示した．これを**非線形 Schrödinger 方程式**といい，さまざまな波動現象で登場する．非線形分散関係 (18)，そして，および波の変調をそれにもとづいて記述することが適切であることを物語っている．

Ginzburg-Landau 方程式 (21) と見比べられたい．虚数単位 i を除けば同じ形をしている．非線形 Schrödinger 方程式 (21) の第 2 項は，振幅の変化が群速度 $\omega_0'(k_0)$ で伝播することを意味する．群速度は文字通り波群が伝わる速度である．群速度 $\omega_0'(k_0)$ で動く座標系に乗ると，この第 2 項は消去できる．以下では，第 2 項を落として考える．

6　ベンジャミン・フェアの不安定性

一般的な形の非線形 Schrödinger 方程式

$$iA_t + \alpha A_{xx} + \gamma|A|^2 A = 0 \tag{22}$$

にしたがう波の安定性について考える．ここで，$A = A(x,t)$ は空間 1 次元の複素数値関数で，下付き添字はその添字についての偏微分をあらわす．定数 α と γ は実数ととる．定義式 (19) にもどって考えると，A はもとの波動場の振幅をあらわすので，波の振幅についての変調安定性を調べることに相当する．

6.1　ストークス進行波解

まず，(22) の進行波解を探そう．解を，定数 $A_0\ (\neq 0)$ と θ_0 を用いて $A = A_0 \exp\{i(\kappa x - \varpi t + \theta_0)\}$ とおいて (22) に代入すると，

$$\varpi = \alpha\kappa^2 - \gamma|A_0|^2 \tag{23}$$

が得られる．この解があらわす波 (19) を **Stokes 進行波**または単に **Stokes 波**とよぶ．もとの変数 ψ にもどすと，(19) は

$$\psi = A_0 e^{i[(k_0+\kappa)x-(\omega_0+\varpi)t+\theta_0]} \tag{24}$$

となるので，Stokes 進行波の分散関係は

$$\omega_0 + \varpi = \omega_0(k_0) + \alpha\kappa^2 - \gamma|A_0|^2 \tag{25}$$

である．付加的な波数 $\kappa = 0$ のとき，(25) はもくろみ通り非線形分散関係 (18) に帰着する．ここでは，$\kappa \neq 0$ に一般化しておく．

計算するだけなら A を複素数のまま扱った方がエレガントであるが，実数化するとハミルトン構造があらわになる [3]．独立変数を x, t とする 2 個の実数値関数 $u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ を用いて，振幅関数を $A = u_1 + iu_2$ とあらわそう．これを非線形 Shrödinger 方程式 (22) に代入すると，ベクトル関数 $\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, u_2)$ に対する方程式

$$\mathsf{J}\boldsymbol{u}_t + \alpha\boldsymbol{u}_{xx} + \gamma\|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}; \quad \mathsf{J} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

に変換できる．ここで，上付き添字 t は転置をあらわす．したがって，$\boldsymbol{u}$ はたてベクトルである．また，$\|\boldsymbol{u}\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$ は通常のベクトルのノルムである．Stokes 進行波解 (24) は，振幅 $A_0 = u_{01} + iu_{02}$ と位相 $\theta = (k_0+\kappa)x - (\omega_0+\varpi)t + \theta_0$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathsf{R}_\theta \begin{pmatrix} ru_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}; \quad \mathsf{R}_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{27}$$

とあらわされる．

6.2　ストークス波の線形安定性

Stokes 波 (27) に，無限小振幅の摂乱 $\mathsf{R}_\theta\boldsymbol{v}(x,t)$; $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ を重畳しよう．摂乱を受けた振幅関数

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \mathsf{R}_\theta\left[\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\right] \tag{28}$$

を (26) に代入する．摂乱 $\boldsymbol{v}$ についての非線形項は無視し，分散関係 (23) から導かれる式 $\mathsf{J}\mathsf{R}_{\theta t} + \alpha\mathsf{R}_{\theta xx} + \gamma\|\boldsymbol{u}_0\|\mathsf{R}_\theta = 0$ や $\mathsf{R}_{\theta x} = \kappa\mathsf{J}\mathsf{R}_\theta$ を用いて簡単化をはかる．しかる後に左から R_θ の転置行列 ${}^t\mathsf{R}_\theta$ をかける．直交行列であることに由来する関係 ${}^t\mathsf{R}_\theta\mathsf{R}_\theta = \mathsf{I}$ (I は 2×2 単位行列)，${}^t\mathsf{R}_\theta\mathsf{J}\mathsf{R}_\theta = \mathsf{J}$ を用いると，摂乱に対する線形化方程式が

$$\mathsf{J}\boldsymbol{v}_t + 2\alpha\kappa\mathsf{J}\boldsymbol{v}_x + \alpha\boldsymbol{v}_{xx} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

のように導かれる．

この式に

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(t)\cos\sigma x + \boldsymbol{w}(t)\sin\sigma x \tag{30}$$

を代入しよう．同じ $\boldsymbol{v}$ を用いているが，混同しないように．空間依存性は三角関数のみにもたせてあるので，まず，$\cos\sigma x$ を含む項のみを集めると，

$$\mathsf{J}\dot{\boldsymbol{v}} + 2\alpha\kappa\sigma\mathsf{J}\boldsymbol{w} - \alpha\sigma^2\boldsymbol{v} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \tag{31}$$

となる．上付きドットは時間 t についての微分をあらわす．次に，$\sin\sigma x$ を含む項のみを集めると，

$$\mathsf{J}\dot{\boldsymbol{w}} - 2\alpha\kappa\sigma\mathsf{J}\boldsymbol{v} - \alpha\sigma^2\boldsymbol{w} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \tag{32}$$

となる．解を $\boldsymbol{v} = {}^t(q_1, q_2)e^{\lambda t}$, $\boldsymbol{w} = {}^t(p_1, p_2)e^{\lambda t}$ とおいて (31) と (32) に代入すると，λ に対する行列方程式

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0};\ \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{01}^2 & -\lambda + 2\gamma u_{01}u_{02} & 0 & -2\alpha\kappa\sigma \\ \lambda + 2\gamma u_{01}u_{02} & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{02}^2 & 2\alpha\kappa\sigma & 0 \\ 0 & 2\alpha\kappa\sigma & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{01}^2 & -\lambda + 2\gamma u_{01}u_{02} \\ -2\alpha\kappa\sigma & 0 & \lambda + 2\gamma u_{01}u_{02} & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{02}^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

を得る．これが非自明な解 ${}^t(q_1, q_2, p_1, p_2) \neq \boldsymbol{0}$ をもつための必要十分条件は

$$\det A = \lambda^4 + 2(p^2 + 4\kappa^2\alpha^2\sigma^2)\lambda^2 + (p^2 - 4\kappa^2\alpha^2\sigma^2)^2 = 0; \quad p^2 := \alpha^2\sigma^4 - 2\gamma\alpha\|\boldsymbol{u}_0\|\sigma^2 \tag{34}$$

である．これを解くと，固有値が

$$\lambda^2 = -(p \pm 2\kappa\alpha\sigma)^2, \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \pm i(p \pm 2\kappa\alpha\sigma) \tag{35}$$

と求まる．固有値，すなわち，スペクトルが 4 つ組であらわれるのは Hamilton 力学系特有の事情である [1]．λ が固有値ならば，その複素共役 $\bar{\lambda}$ のみならず $-\lambda$ も固有値である．後者は Hamilton 力学系の時間反転対称性を反映している．

実部が正の固有値が一つでもあると時間について指数関数的に増大する擾乱が作られる，すなわち，Stokes 波はスペクトル的不安定である．パラメータ p が実数であれば固有値が 4 個とも純虚数で，Stokes 波はスペクトル的安定であるが，p が純虚数になれば，(35) のうち 2 個の固有値が正の実部をもつようになり，擾乱は指数関数的に増大する，Stokes 波の振幅が小さいうち ($\|\boldsymbol{u}_0\| < \sqrt{\alpha\sigma^2/2\gamma}$) は p は純虚数であるが，振幅が大きくなり $\|\boldsymbol{u}_0\| = \sqrt{\alpha\sigma^2/2\gamma}$ を越えると正の実部をもつ固有値があらわれる．これを **Benjamin-Feir の不安定**という．水槽で Stokes 波をなんとか実現しようとしても，必ず波がくずれてしまうことから，この Benjamin-Feir の不安定性が発見された．これは**側帯波不安定（side-band 不安定）**である．波数 $k = k_0 + \kappa$ をもつ Stokes 波 (24) において，k の近傍の有限バンド幅 2σ 内 ($\sigma^2 < 2\gamma\|\boldsymbol{u}_0\|^2/\alpha$) の波数をもつ擾乱が成長する．本小節の線形安定性解析を振り返ると，Stokes 波 (24) の振幅 A_0 に擾乱が加えられている．

$$\psi = [A_0 + B(x,t)]\, e^{i[(k_0+\kappa)x - (\omega_0+\varpi)t + \theta_0]}; \quad B = B_0 e^{i\sigma x + \lambda t}. \tag{36}$$

Stokes 波の波数 $k = k_0 + \kappa$ は擾乱を受けて，$k_\pm = k_0 + \kappa \pm \sigma$ に変わる．非線形 Schrödinger 方程式 (22) の非線形項 $\gamma|A|^2 A$ を線形化した項は，基本場の波数 k と k_+ を非線形的に結合さ

せて波数 $2k - k+ = k_-$ をもつ波を，k と k_- を非線形的に結合させて波数 $2k - k_- = k_+$ をもつ波を生み出す．すなわち，波数 k_+ と k_- をもつ側帯波は，基本場を (24) を介して共鳴して増幅する．

この不安定性をスペクトル的観点からながめてみよう．Stokes 波の振幅 $\|\boldsymbol{u}_0\|$ が小さいうちは固有値 (35) は 4 個とも複素 λ 平面の虚軸上にある．振幅を上げていくと，正の虚軸上，負の虚軸上にそれぞれ 2 個ずつある固有値が互いに接近する．臨界点 $\|\boldsymbol{u}_0\| = \sqrt{\alpha\sigma^2/2\gamma}$ において，固有値の対は $\lambda = 2i\kappa\sigma$ と $\lambda = -2i\kappa\sigma$ でそれぞれ衝突し，さらに振幅を上げると，固有値を実部を獲得する．これが Hamiltonian Hopf 分岐である．Krein の理論によると [1, 7]，固有値が衝突後虚軸から逃れるための必要条件は，衝突前の一方の固有モードのエネルギーが正で他方のモードのエネルギーが負であることである．詳細は割愛するが，衝突前 $p > 0$ ととると，$\lambda = \pm i(2\kappa\alpha\sigma + p)$ に対応するモードのエネルギーは正で，$\lambda = \pm i(2\kappa\alpha\sigma - p)$ に対応するモードのエネルギーは負であり，Krein 理論のシナリオにしたがう．

7　散逸が誘発する不安定性

散逸には，エネルギーを熱に変えて物体の運動を定常状態に落ち着かせようとする働きがある．この直感に反して，散逸があることによってかえって運動が不安定化することもある．前節の末尾で論じたように，Hamilton 系の不安定性は，典型的に，正エネルギー・モードと負エネルギー・モードの固有値が衝突（= 縮退）することによって起こる，正エネルギーモードは，散逸によってエネルギーを奪われると振幅が小さくなるが，負エネルギーモードは，エネルギーを奪われると逆に振幅が増幅する．実は散逸に起因する不安定性は珍しいものではない．負エネルギーモードのなせるわざである．本節では，Benjamin-Feir 不安定が起こらないパラメータ領域においても，散逸，とくに，拡散によって不安定性が引き起こされることをみる [3]．

7.1　散逸・拡散効果のある非線形シュレディンガー方程式

非線形 Schrödinger 方程式 (22) に散逸および拡散効果を付与しよう．

$$iA_t + (\alpha - ia)A_{xx} + ibA + (\gamma + ic)|A|^2 A = 0. \tag{37}$$

ここで，a, b, c は正の定数である．もとからあるパラメータを $\alpha = \gamma = 0$ として，(37) から散逸および拡散効果のみを抜き取ると，

$$A_t = aA_{xx} - (b + c|A|^2)A \tag{38}$$

となる．右辺第 1 項は拡散項で，$a\ (> 0)$ が拡散係数を与える．残りの項は線形および非線形摩擦項である．

簡単のため $b = c = 0$ ととって，拡散の効果だけをみていこう．包括的な解析については文献 [3] を参照されたい．Stokes 進行波解 $A = A_0 \exp\{i(\kappa x - \varpi t + \theta_0)\}$ の分散関係は，(37) から

$$\varpi = \alpha\kappa^2 - \gamma|A_0|^2 - ia\kappa^2 \tag{39}$$

となる．もとの分散関係 (23) に末尾の項が付け加わっている．この項は Stokes 波を減衰させる．

7.2　ストークス波の線形安定性に対する拡散効果

一般化非線形 Schrödinger 方程式 (37) で $b = c = 0$ とおいたものを，$A = u_1 + iu_2$ によって実数値関数 $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ で表示すると，(26) は

$$\mathsf{J}\boldsymbol{u}_t + \alpha\boldsymbol{u}_{xx} - a\mathsf{J}\boldsymbol{u}_{xx} + \gamma\|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{40}$$

で置き換わる．実数表示の振幅を (28) のように Stokes 進行波解と撹乱 $\boldsymbol{v}$ の和であらわして (40) に代入し，撹乱振幅 $\|\boldsymbol{v}\|$ について線形化すると，

$$\mathsf{J}\boldsymbol{v}_t + 2\left(\alpha\kappa\mathsf{J} + a\kappa\right)\boldsymbol{v}_x + \left(\alpha - a\mathsf{J}\right)\boldsymbol{v}_{xx} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \tag{41}$$

となる．空間波数 σ の撹乱形 (30) を (41) を代入すると，その $\cos\sigma x$ 成分および $\sin\sigma x$ 成分は，それぞれ，

$$\mathsf{J}\dot{\boldsymbol{v}} + 2\kappa\sigma\left(\alpha\mathsf{J} + a\right)\boldsymbol{w} - \sigma^2\left(\alpha - a\mathsf{J}\right)\boldsymbol{v} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}, \tag{42}$$

$$\mathsf{J}\dot{\boldsymbol{w}} - 2\kappa\sigma\left(\alpha\mathsf{J} + a\right)\boldsymbol{v} - \sigma^2\left(\alpha - a\mathsf{J}\right)\boldsymbol{w} + 2\gamma(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \tag{43}$$

となる．解を $\boldsymbol{v} = {}^t(q_1, q_2)e^{\lambda t}$, $\boldsymbol{w} = {}^t(p_1, p_2)e^{\lambda t}$ とおいて (42) と (43) に代入すると，(33) における行列が

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{01}^2 & -\lambda - a\sigma^2 + 2\gamma u_{01}u_{02} & 2a\kappa\sigma & -2\alpha\kappa\sigma \\ \lambda + a\sigma^2 + 2\gamma u_{01}u_{02} & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{02}^2 & 2\alpha\kappa\sigma & 2a\kappa\sigma \\ -2a\kappa\sigma & 2\alpha\kappa\sigma & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{01}^2 & -\lambda - a\sigma^2 + 2\gamma u_{01}u_{02} \\ -2\alpha\kappa\sigma & -2a\kappa\sigma & \lambda + a\sigma^2 + 2\gamma u_{01}u_{02} & -\alpha\sigma^2 + 2\gamma u_{02}^2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

にとって代わられる．行列方程式 (33) が非自明な解 ${}^t(q_1, q_2, p_1, p_2) \neq \boldsymbol{0}$ をもつための必要十分条件 $\det A = 0$ から λ を求める手続きは前節と同じである．

拡散効果を摂動とみなし，微小パラメータ a/α について 1 次までの項のみを取り込もう．余因子展開を用いて行列式を計算すると，$O(a/\alpha)$ までで，

$$\begin{aligned}\det A = \hat{\lambda}^4 + 2(p^2 + 4\kappa^2\alpha^2\sigma^2)\hat{\lambda}^2 - 32a\alpha\kappa^2\sigma^2(\alpha^2\sigma^2 - \gamma\|\boldsymbol{u}_0\|^2)\hat{\lambda} \\ + (p^2 - 4\kappa^2\alpha^2\sigma^2)^2 + O\left((a/\alpha)^2\right)\end{aligned} \tag{45}$$

である．ここで，$\hat{\lambda} = \lambda + a\sigma^2$，$p$ は (34) と同じである．同じく，摂動展開で $\det A = 0$ の根を求めると，$p > 0$ の場合には，虚部が正の根は

$$\lambda = i(2\kappa\alpha\sigma \pm p) - a\sigma^2 \mp \frac{2a\kappa\sigma}{p}(\alpha^2\sigma^2 - \gamma\|\boldsymbol{u}_0\|^2) + O\left((a/\alpha)^2\right) \quad \text{（複号同順）} \tag{46}$$

と求まる．虚部が負の側にも根が実軸について対象にあらわれる．Benjamin-Feir 不安定が起こらないパラメータ領域 $p > 0$ においても，拡散効果が加わると，実軸に近い側の根（式 (46)

の下側の符号）の実部が正となり，攪乱は指数関数的に増大する．これは負のエネルギーをもつモードである．上側の符号に対応する正エネルギー・モードの実部は負で，こちらは拡散の効果によって減衰する．

散逸の効果 ($b > 0$, $c > 0$) もまったく同様に働く [3]．こうして，Hamilton 系に対する Krein の理論は系そのものの分岐構造のみならず，散逸や拡散の効果に対しても示唆するところ大である．最後に，Krein の理論が直接対象とするのは常微分方程式系，すなわち，有限自由度系であることに注意しておこう．本稿で扱っているのは偏微分方程式で記述される無限自由度系である．

8　結びにかえて

散逸（= 摩擦）が誘発する不安定性の例は枚挙にいとまがない．一番想像しやすいのは，垂直に立ってじっとまわっている独楽，すなわち，眠りごまであろう．摩擦がなければずっと立ち続けているが，摩擦の作用でやがて‘目が覚める’．負エネルギーの攪乱モードの存在は，このように，非自明な定常状態に特有である．静止状態（= 自明な定常状態）に加えられた微小攪乱は一般的には正のエネルギーしかもち得ない．われわれを取り囲む多様で変化に富む現象こそが負エネルギー・モードを紡ぎだしているのである．

参考文献

[1] Arnol'd, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, 1989).

[2] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, 1967).

[3] Bridges, T. J. and Dias, F., Enhancement of the Benjamin-Feir instability with dissipation, Phys. Fluids **19** (2007) 104104.

[4] Huerre, P. and Rossi, M., Hydrodynamic instabilities in open flows, In *Hydrodynamics and Nonlinear Iinstabilities* (eds. C. Godrèche and P. Manneville, Cambridge University Press, 1998).

[5] 今井 功，流体力学，岩波全書（岩波書店，1970）．

[6] 今井 功，流体力学，前編（裳華房，1973）．

[7] MacKay, R. S., Stability of equilibria of Hamiltonian systems, In *Nonlinear Phenomena and Chaos* (ed. S. Sarkar, Adam Hilger, Bristol, 1986) pp. 254–270.