離散最適化 : ネットワークフローを中心に

神山, 直之
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

出版情報：COE Lecture Note. 46, pp.175-182, 2013-02-28. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

離散最適化
—ネットワークフローを中心に—

神山　直之

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

1　はじめに

幾つかの選択肢から最適なものを選ぶ意思決定問題は，実社会のあらゆる場面で現れる．例えば，可能な限り短い時間で決められた都市を回る問題や，可能な限り少ない人数で決められた仕事を完了することができるようなスケジュールを決定する問題などがその例といえよう．この様な意思決定問題を，数理モデルを通じ解決しようとする際に，強力な道具となる数学理論が最適化理論である．最適化問題とは，大雑把に言うなれば幾つかの制約を満たす解の候補の中から，与えられた目的関数を最小化もしくは最大化するものを見つける数学的問題である．特に，解の集合が離散的な構造を有する最適化問題を離散最適化問題と呼ぶ．

離散最適化の研究は，数学の一分野であるグラフ理論や計算機科学の一分野である計算量理論，そして経済学の一分野であるゲーム理論といった様々な分野と深い関わりを持っており，扱う問題は非常に多岐にわたるため，その概要を手短に述べるということは非常に難しい．そこで本章では，話題を離散最適化の中心的な研究対象の一つであるネットワークフローに絞ることにより，具体的な離散最適化の問題例を通じて，その面白さ・有益性を感じ取っていただくことを目標とする．話題を選ぶ基準としては，モデルの応用力の高さに加え，離散構造の豊かさという二面的な性質を持ち合わせているという点を重視した．

本章の構成は以下の通りである．まず第2節において基本的なネットワークフローのモデルとなる静的ネットワークフローの定義および理論的な結果の紹介する．そして第3節においては，静的ネットワークフローに時間の要素を加え拡張した動的ネットワークフローの定義および理論的な結果の紹介する．最後に第4節において，さらに詳しいことを学びたい方への参考文献の紹介を行う．

本章では，$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+$ を用いて実数，非負の実数および非負の整数の集合を表すものとする．有向グラフ $D = (V, A)$ とは，有限な点集合 V と，辺と呼ばれる V の異なる二つの要素からなる順序対の集合 A からなる組である（図1参照）．例えば，点を交差点，辺を通過する方向が指定された道路のようなものだと思っていただければよい．各 $v \in V$ に対して，$\delta(v)$ と $\varrho(v)$ で v から出る辺および v に入る辺の集合を表すとする．また，有向グラフ D 上のパスとは，ある点からある点へ矢印の向きに辿っていったものである．

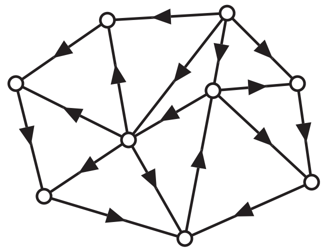

図 1：有向グラフの例.

2　静的ネットワークフロー

本節では基本的なネットワークフローのモデルである静的ネットワークフローを紹介する．直感的には，静的ネットワークフローはパイプライン上を石油が流れ続けているような状況をモデル化したものと思っていただければよい．静的ネットワークフローのモデルにおいては，入力として入口 $s \in V$ と出口 $t \in V$ を持つ有向グラフ $D = (V, A)$ と容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$ が与えられる．例えば，有向グラフ $D = (V, A)$ はパイプライン，s, t は文字通り入口や出口，c は各パイプの幅を表していると思っていただければよい．このとき静的ネットワークフローとは関数 $\xi\colon A \to \mathbb{R}_+$ で以下の二つの条件を満たすものである．

(1) 容量条件：任意の $a \in A$ に対して

$$\xi(a) \leq c(a).$$

(2) 流量保存条件：任意の $v \in V \setminus \{s, t\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta(v)} \xi(a) = \sum_{a \in \varrho(v)} \xi(a).$$

静的ネットワークフロー ξ が与えられたとき，$\xi(a)$ は辺 a に流れるものの量を表していると見なすことができる．また，容量条件は辺の幅以上にものが流れないことを，流量保存条件は入口や出口ではない点においては入ってきた量がちょうど出ていくことを保証している．

次に静的ネットワークフローのモデルにおける基本的な問題である最大流問題と最小費用流問題を紹介する．直感的には，最大流問題は入口から出口まで可能な限り多くのものを流すことを目的とした問題である．形式的には，静的ネットワークフロー $\xi\colon A \to \mathbb{R}_+$ のうち

$$\sum_{a \in \varrho(t)} \xi(a)$$

を最大にするものを求める問題である．ただし $\delta(t) = \emptyset$ を仮定している．この問題に対しては多項式時間アルゴリズム，つまり四則演算や比較などの基本演算の回数が $|V|$ や $|A|$ の多項式で押さえることのできるアルゴリズムが存在することが知られている．（具体的なアルゴリズムや多項式時間アルゴリズム等の基本的な知識に関しては第 4 節の文献を参照.）

続いて，最小費用流問題を紹介しよう．直感的には，各辺に単位量あたりのコストが与えられ，流れるものの量に比例してコストがかかるような状況で，最小費用の静的ネットワークフローを求めることを目的としている．形式的には，最小費用流問題においては費用関数 $c\colon A \to \mathbb{R}$ が与えられる．辺 $a \in A$ に対する費用 $c(a)$ は負となり得ることに注意すること．費用が負となるときは，利得を意味していると理解していただければよい．このとき最小費用流問題とは，静的ネットワークフロー $\xi\colon A \to \mathbb{R}_+$ のうち

$$\sum_{a \in A} c(a)\xi(a)$$

を最小にするものを求める問題である．この最小費用流問題も多項式時間で解くことができることが知られている．

静的ネットワークフローのモデルに対しては，上記の二つの代表的な問題以外にも，いろいろな種類のものが流れている状況をモデル化した多品種流問題や，辺を通過することによってものの量が増える状況をモデル化した一般化流問題などがある．これらのモデルに関しては第 4 節の文献を参照にしていただきたい．

3　動的ネットワークフロー

本節では動的ネットワークフローを紹介する．前節で紹介した静的ネットワークフローは一定の量のものがネットワーク上を流れ続ける状況をモデル化したものであったことを思い出そう．一方，動的ネットワークフローは時々刻々流れる量が変化する状況をモデル化している（図 2 参照）．このモデルは都市や建物における避難計画に関する研究への応用などがある（例えば文献 [9, 17] を参照）．

形式的に動的ネットワークフローの定義を行う．入力としては端子と呼ばれる特別な点集合 $S \subseteq V$ を持つ有向グラフ $D = (V, A)$，容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，移動時間関数 $\tau\colon A \to \mathbb{Z}_+$，そして制限時間 $T \in \mathbb{Z}_+$ が与えられる．例えば，τ は各辺 a を移動するために必要とする時間を表していると思っていただければよい．このとき，動的ネットワークフロー $f\colon A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ とは以下の三つの条件を満たすものである．

(1) 容量条件：各 $a \in A$ および各 $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$f(a, \theta) \le c(a).$$

(2) 流量保存則：各 $v \in V \setminus S$ および各 $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\mathsf{ex}_f(v, \theta) \ge 0.$$

ただし，各 $v \in V$ および各 $\theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して，

$$\mathsf{ex}_f(v, \theta) := \sum_{a \in \varrho(v)} \sum_{t=0}^{\theta - \tau(a)} f(a, t) - \sum_{a \in \delta(v)} \sum_{t=0}^{\theta} f(a, t).$$

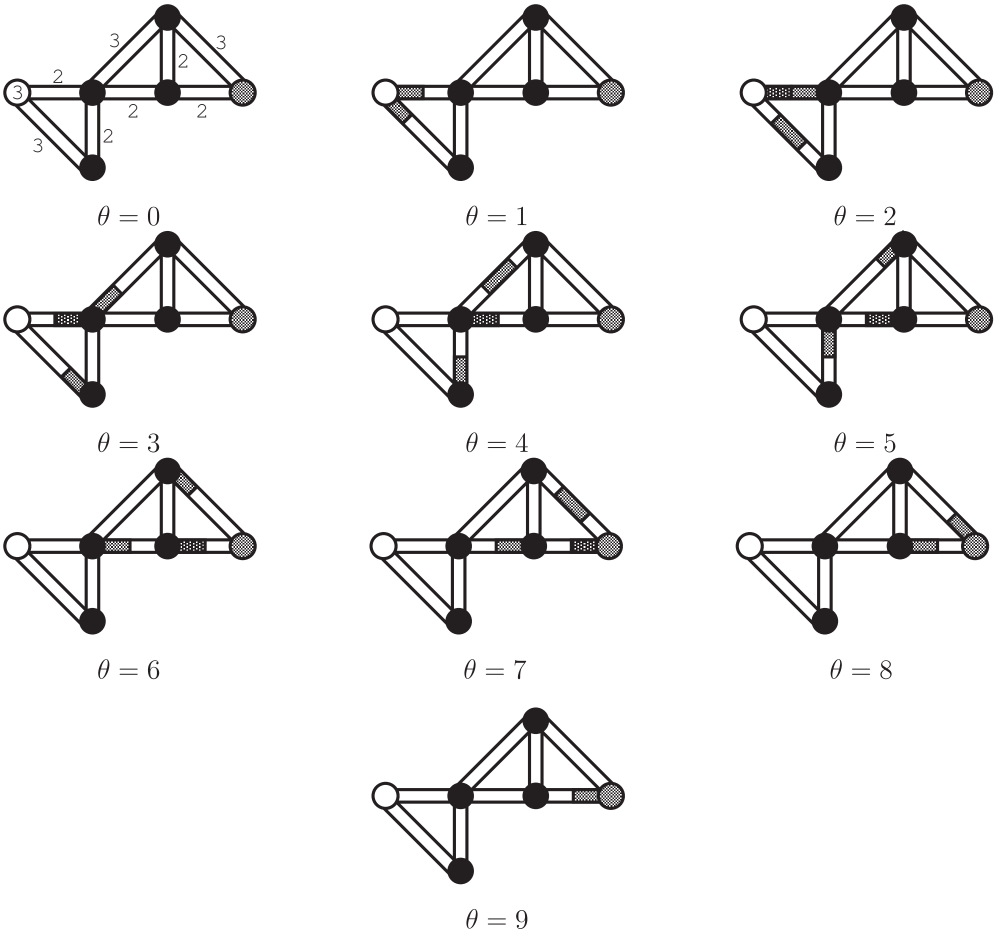

図 2：白点が入口，灰色の点が出口を表している．辺の数字は移動時間を表している．

(3) 要求制約：各 $v \in V \setminus S$ に対して

$$\mathsf{ex}_f(v, T) = 0.$$

動的ネットワークフロー f に対して，$f(a, \theta)$ は時刻 θ に辺 a に流れ込むものの量を表していると思っていただければよい．静的ネットワークフローに対しては，その値は単に辺に流れ込む量のみを表していたのに対し，動的ネットワークフローに対しては，ある時刻に流れ込む量を表している，つまり時間的な要素が加わっていることに注意していただきたい．また，容量条件は辺の幅以上にものが流れないことを，流量保存条件は端点ではない点においてはある時刻にその点から出て行くものの量はその時刻までに入ってきた量以下となることを保証している．ただし，動的ネットワークフローに対する流量保存則においては $\mathsf{ex}_f(v, \theta)$ が正，つまりある時刻 θ において点 v で滞留がおこることを容認していることに注意していただきたい．最後に要求制約は時刻 T 以降は端点以外の点においてはものが残っていないことを保証して

いる．

以下では，動的ネットワークフローにおいて代表的な問題である，最大動的流問題と最速輸送問題を紹介する．直感的に言うなれば，一つ目の問題はある決められた制限時間以内に可能な限り多くのものを流す問題であり，二つ目の問題は，一つの供給点と複数の需要点を持つネットワークにおいて，各需要点に需要を満たすように可能な限り早く供給点からものを流す問題である．

3.1 最大動的流問題

ここでは，最大動的流問題を紹介しよう．最大動的流問題においては，$S = \{s, t\}$ を満たす有向グラフが与えられる．このとき，最大動的流問題の目的は $\mathsf{ex}_f(s, T)$ を最大化する動的ネットワークフロー f を求めることである．これは $\mathsf{ex}_f(t, T)$ を最大化する，つまり t に流れ込むフローの量を最大化することと等価であることに注意されたい．

ここで Ford & Fulkerson [5] によって提案された最大動的流問題に対するアルゴリズムを紹介する．まず，有向グラフ D 上の静的ネットワークフロー ξ を考える．このとき，ξ の価値を

$$(T+1)\sum_{a \in \varrho(t)} \xi(a) - \sum_{a \in A} \tau(a)\xi(a)$$

で定義する．実は，Ford & Fulkerson [5] は，静的ネットワークフローのうち価値が最大のものの価値が最大動的流問題の目的関数の最適値と一致することを証明した．では，最大の価値を持つ静的ネットワークフローはどのように求めるのであろうか．実は，最大の価値を持つ静的ネットワークフローは以下のようにして最小費用流問題に帰着することができる．まず，各辺 $a \in A$ の費用を $\tau(a)$ と定義する．そして，新しい辺 (t, t') を加えこの辺の費用を $-(T+1)$ とする．このとき，s を入口，t を出口としたときの最小費用流問題の解を ξ^* としよう．すると，ξ^* の $-$(費用)

$$(T+1)\xi^*((t, t')) - \sum_{a \in A} \tau(a)\xi^*(a)$$

が最大動的流問題の目的関数の最適値と一致するすることがわかる．

最大動的流問題の目的関数の最適値が，最小費用流問題を解くことにより得られることはわかったが，その最適値を実現する動的ネットワークフローはどのように求めればよいのであろうが．そのためには，まず ξ^* をパス分解する必要がある．パス分解とは s から t へのパスの集合 $\mathcal{P}$ と関数 $\lambda\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ の組で

$$\sum_{P \in \mathcal{P}\colon a \in P} \lambda(P) = \xi^*(a)$$

を満たすものである．このようなパス分解を多項式時間で求めることが可能であることであることが知られている．このとき，このパス分解を用いて以下のように最大動的流問題の解を構成することができる．各パス $P \in \mathcal{P}$ 上に時刻 0 から $T - \tau(P)$ まで $\lambda(P)$ だけものを流すような動的ネットワークフローを構成する．ただし，$\tau(P)$ は P 上の全ての辺の移動時間の合計

である．この様にして構成された動的ネットワークフローが実行可能であることは容易にわかる．Ford & Fulkerson [5] は，このように構成された動的ネットワークフローが最大動的流問題の最適解となっていることを，静的ネットワークフローに対する最大流最小カット定理というものを使い証明した．このアルゴリズムは，もちろん最大動的流問題を多項式時間で解くことができるという点で素晴らしいのだが，それだけではなく最大動的流問題の解がある種の繰り返しによって構成されている洞察も与えている点も非常に興味深い．

3.2　最速輸送問題

続いて本節では最速輸送問題を紹介する．最速輸送問題においては，入口 s と出口集合 $S = \{s, t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ からなる端子を持つ有向グラフおよび要求量 $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{R}_+$ が与えられる．このとき，目的は全ての $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$\mathsf{ex}_f(t_i, T) = d_i$$

を満たす動的ネットワークフロー f が存在するかを判定する問題である．もし，この問題が解くことができれば動的ネットワークフローが存在する最小の $T \in \mathbb{Z}_+$ を二分探索で求めることができることがわかる．

まず，制限時刻 T 以内に要求量 $d_1, d_2, \ldots, d_k$ を満たす動的ネットワークフローが存在するか否かを判定する問題を考えよう．各点集合 $X \subseteq S$ に対して，$o(X)$ で要求量を無視し，X を出口の集合とみなしたときの最大動的流問題の目的関数の最適値を表すとする．この問題は X を一つの出口に縮約することにより通常の最大動的流問題へと帰着することができるため，$o(X)$ は多項式時間で求めることができる．実は，[7] 中の Klinz との personal communication より，制限時刻 T 以内に要求量 $d_1, d_2, \ldots, d_k$ を満たす動的ネットワークフローが存在する必要十分条件が，全ての $X \subseteq \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ に対して

$$o(X) \geq d(X)$$

が成り立つことであることが知られている．ただし，$d(X)$ は X の要素に関して要求量を合計したものである．つまり，関数 ρ を $\rho := o - d$ と定義すると，関数 ρ の最小値が 0 以上であることと同値である．ここで，全ての $X, Y \subseteq S$ に対して

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y)$$

を満たすことが知られている．この様な関数 ρ は劣モジュラ関数と呼ばれ，劣モジュラ関数の最小化は効率的にできることが知られている [8, 13]．つまり，ρ の最小値を劣モジュラ関数最小化のアルゴリズムを用いて求め，0 と比較することにより，望む動的ネットワークフローの存在性を効率的に判定することができる．

制限時間以内に要求量を満たす動的ネットワークフローが，存在するか否かを多項式時間で判定することができることはわかったが，実際にそのような動的ネットワークフローはどのように求めることができるのであろうか．この問題に対して Hoppe & Tardos [7] は辞書式最大動的流問題という問題へ帰着するアルゴリズムを与えているが，このアルゴリズムは本稿の範疇を超えているため割愛させていただく．

3.3　その他の問題

本節では，動的ネットワークフローのモデルにおける代表的な問題である最大動的流問題と最速輸送問題を扱ったが，ここでは扱うことのできなかった問題をいくつか紹介しよう．通常の静的ネットワークフローにおいて紹介した最小費用流問題は動的ネットワークフローのモデルにおいても研究されているのだが，実は最大動的流問題が多項式時間で解くことができるのとは異なり，この最小費用動的流問題は非常に困難な問題であることが知られている．この問題に関しては [4, 10] を参照して頂きたい．静的ネットワークフローとの関係という点では，動的ネットワークフローのモデルにおける多品種流問題も研究されている [6]．また，静的ネットワークフローとゲーム理論の重要な融合として均衡ネットワークフローというものがある．この均衡ネットワークフローとはネットワーク上を移動するものが，それぞれ自分勝手に動いたらどのような状態になるかを解析するためのものであり，静的ネットワークフローのモデルで非常に多く研究されてきた．近年，この枠組みを動的ネットワークフローにも拡張しようとする試みがなされている [11, 2]．また，Melkonian [12] によって提案された動的ネットワークフローのモデルにおいては，辺の容量がある時刻に辺に入る流量を制限するのではなく，ある時刻に同時に辺上に存在することのできる流量を制限するものとなっているようなものがある．

4　おわりに

本章ではネットワークフローを中心に離散最適化の研究を紹介した．本稿ではモデルを中心に紹介したが，ネットワークフローを含め広く離散最適化の理論を学びたい方への参考文献の紹介を行う．まず，離散最適化全般の参考文献としては Schrijver [14] を挙げる．この本は効率的に解くことのできる離散最適化問題を主に扱っているのだが，効率的に解くことが絶望的な問題，いわゆる **NP** 困難問題に対するアルゴリズムの参考文献としては Williamson & Shmoys [18] を挙げておく．また，本稿で紹介したネットワークフローの基礎的な結果に関しては，その元祖といえる教科書 Ford & Fulkerson [5] や，さらに現代的な趣を持つ Ahuja, Magnati & Orlin [1] を挙げておく．[1] には多くのネットワークフローの現実問題への応用が書かれている．動的ネットワークフローに関しては教科書的な文献がないのだが，Skutella [16] はコンパクトにまとまったサーベイである．また，離散最適化の研究において欠かすことのできない計算量理論に関する教科書として，入門書として Sipser [15]，さらに進んだものとして Arora & Barak [3] を挙げておく．

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.

[2] E. Anshelevich and S. Ukkusuri. Equilibria in dynamic selfish routing. In *SAGT*, pages 171–182, 2009.

[3] S. Arora and B. Barak. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.

[4] L. Fleischer and M. Skutella. Minimum cost flows over time without intermediate storage. In *SODA*, pages 66–75, 2003.

[5] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

[6] A. Hall, S. Hippler, and M. Skutella. Multicommodity flows over time: Efficient algorithms and complexity. *Theoretical Computer Science*, 379(3):387–404, 2007.

[7] B. Hoppe and É. Tardos. The quickest transshipment problem. *Math. Oper. Res.*, 25(1):36–62, 2000.

[8] S. Iwata, L. Fleischer, and S. Fujishige. A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions. *J. ACM*, 48(4):761–777, 2001.

[9] N. Kamiyama, A. Takizawa, N. Katoh, and Y. Kawabata. Evaluation of capacities of refuges in urban areas by using dynamic network flows. In *ISORA*, pages 453–460, 2009.

[10] B. Klinz and G. J. Woeginger. Minimum cost dynamic flows: The series-parallel case. In *IPCO*, pages 329–343, 1995.

[11] R. Koch and M. Skutella. Nash equilibria and the price of anarchy for flows over time. In *SAGT*, pages 323–334, 2009.

[12] V. Melkonian. Flows in dynamic networks with aggregate arc capacities. *Inf. Process. Lett.*, 101(1):30–35, 2007.

[13] A. Schrijver. A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 80(2):346–355, 2000.

[14] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization—Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003.

[15] M. Sipser. *Introduction to the theory of computation*. PWS Publishing Company, 1997.

[16] M. Skutella. An introduction to network flows over time. In *Research Trends in Combinatorial Optimization*, pages 451–482. Springer-Verlag, 2009.

[17] A. Takizawa, M. Inoue, and N. Katoh. An emergency evacuation planning model using the universally quickest flow. *The Review of Socionetwork Strategies*, 6:15–28, 2012.

[18] D. P. Williamson and D. B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2011.