# ある関数の可測性について

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448989

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 10 (2), pp.149-151, 1976-11. 九州大学教養部数学教室

Math. Rep.
X-2, 1976.

# ある関数の可測性ついて

津　田　文　夫

(1976年7月26日　受付)

問題　$0<\xi<1$ である $\xi$ を $\xi=[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots]$ と2進数展開を行う。集合 $[\xi]$ を

$$[\xi] \ni n \leftrightarrow (\varepsilon_n=1)$$

として定義しておく，又数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ が与えられているとき，関数

$$\varphi(\xi)=\overline{\lim_{n_k\in[\xi]}}\, a_{n_k}$$

は $\xi$ に関して可測な関数であろうか？

これを解決するために

$$Ens(\xi\,;\varphi(\xi)\geqq\alpha)$$

が可測集合であることを示したい。

先ず

$$G_n=Ens(\xi\,;\varepsilon_n=1)$$

とする。$G_n$ は一端が開かれた区間そこで $G_\delta, F_\sigma$ 集合である。

すると

$$[\xi] \ni n \leftrightarrow \xi \in G_n$$

がすぐ成立つことがわかる。

次に

$$S_{n,m}=Ens\ (k\,;k>m \text{ 同時に } \alpha-\frac{1}{n}<a_k)$$

とし

$$H_\alpha=\bigcap_n(\bigcap_m(\bigcup_{k\in S_{n,m}} G_k))$$

とおくと

$$Ens(\xi\,;\varphi(\xi)\geqq\alpha)=H_\alpha \qquad (*)$$

が成立つ。

この (*) を証明すれば問題は解決したことになる。以下 (*) の成立することを示そう。

先ず

$$^{\forall}\eta\in Ens(\xi\,;\varphi(\xi)\geqq\alpha)\to\varphi(\eta)\geqq\alpha$$

即ち

$$\overline{\lim_{n_k\in[\eta]}}\,a_{n_k}\geqq\alpha$$

これは換言すると

$$^{\forall}n,m,\to{}^{\exists}k$$

$$k\in[\eta],\qquad k>m,\qquad \alpha-\frac{1}{n}<a_k$$

が同時に成立つ。

$$k\in[\eta]\to\eta\in G_k$$

$$\therefore\quad \eta\in\bigcup_{k\in S_{n,m}}G_k$$

これが任意の $m,n$ に対して成立つから

$$\eta\in\bigcap_n(\bigcap_m(\bigcup_{k\in S_{n,m}}G_k)$$

即　$Ens(\xi\,;\varphi(\xi)\geqq\alpha)\subseteqq H_\alpha$

が成立った。

逆に

$$^{\forall}\xi\in H_\alpha\to\xi\in\bigcap_n\bigcap_m(\bigcup_{k\in S_{n,m}}G_k)$$

即ち，任意の $n,m$ に対して

$$\xi\in\bigcup_{k\in S_{n,m}}G_k$$

即ち，ある $k_0$ が存在して

$$\xi\in G_{k_0}\qquad \text{但し}\qquad k_0\in S_{n,m}$$

即ち

$$k_0>m,\qquad \alpha-\frac{1}{n}<a_{k_0}$$

が成立つ，ここで

$$\xi\in G_{k_0}\to\qquad\therefore\quad k_0\in[\xi]$$

以上，いい換えると

任意の $n,m$ に対して，ある $k_0$ が存在して

$$k_0\in[\xi],\quad k_0>m\quad \text{同時に}\quad \alpha-\frac{1}{n}<a_{k_0}$$

が成立つ,

$$\therefore \quad \overline{\lim_{k\in[\xi]}} a_k \geqq \alpha \qquad \therefore \quad \varphi(\xi) \geqq \alpha$$

$$\therefore \quad \xi \in Ens(\xi\ ;\ \varphi(\xi) \geqq \alpha)$$

即　$H_\alpha \subseteqq Ens(\xi, \varphi(\xi) \geqq \alpha)$

結局　$Ens(\xi, \varphi(\xi) \geqq \alpha) = H_\alpha$

を得る。ここで

$$H_a = \bigcap_n \left( \bigcap_m \left( \bigcup_{k\in S_{n,m}} Gk \right) \right)$$

は $F_{\sigma\delta}$ 集合である。即 $\varphi(\xi)$ は Baire の 2nd class の関数である。