パスカルの定理に関連して

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448978

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 10 (1), pp.17-20, 1975-08. 九州大学教養部数学教室
バージョン：

Math. Rep.
X-1, 1975.

パスカルの定理に関連して

津田文夫

(1975年4月26日受付)

昨年の一般数学の講義の中でパスカルの定理の話をした。それに関連して次の 2, 3 の命題を述べたが，文献で見たことがないので報告したい。

定理 1. 2円 Ω_1, Ω_2 が I, J で交っている。夫々 I, J を通る 2つの直線 AB, A'B' が各円と交る点を A, B A', B' とするとき

$$AA' \parallel BB'$$

である。

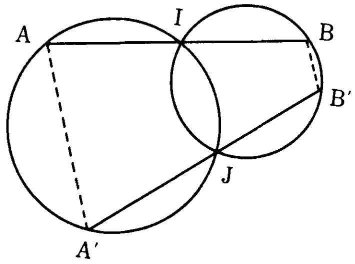

図 1

これはよく知られている命題である。ここで I, J を虚円点に射影して新しい定理を得たいが，そのために少し拡張しておく。

定理 2. 2円 Ω_1, Ω_2 が 2点 I, J で交っている。I, J を通る 2次曲線 Ω_3 が夫々の円と交る点を A, A' B, B' とすると

$$AA' \parallel BB'$$

である。

証明

直線 IJ: $lx+my+n=0$ のことを今後は単に

$$\xi=0$$

と略記する。ここで

$$\xi \equiv lx+my+n$$

のことである。

同様にして

直線	AA': $\alpha=0$	但し	$\alpha \equiv px+qy+r$
〃	BB': $\beta=0$	〃	$\beta = p'x+q'y+r'$
円 Ω_1	: $\Omega_1=0$	〃	$\Omega_1 \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c$
円 Ω_2	: $\Omega_2=0$	〃	$\Omega_2 \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'$

とする。

さて

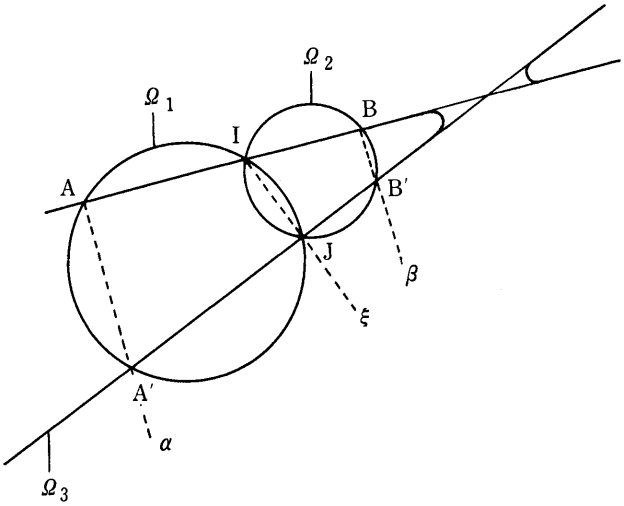

図2

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

は1次方程式であるから直線である。しかも連立方程式 $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$ を満足する点は (1) 上にあるから, (1) は Ω_1, Ω_2 の交点 I, J を通る直線をあらわす。すなわち

$$\Omega_2 - \Omega_1 \equiv \xi$$

としてよい。

すると4点 I, J, A, A′ を通る任意の2次曲線は

$$\Omega_1 + k\xi\alpha = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(k: 一定数)

と書くことが出来る。

何となれば (2) は2次曲線である, しかも $\Omega_1=0$ と $\xi=0$ の交点 I, J は曲線 (2) の点である。同様に, $\Omega_1=0$ と $\alpha=0$ との交点 A, A′ も曲線 (2) の点であるからである。

全く同様にして, 4点 I, J, B, B′ を通る2次曲線は

$$\Omega_2 + k'\xi\beta = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

と書くことが出来る。

そこで (2), (3) が同一曲線 Ω_3 をあらわすとすれば

$$\Omega_1 + k\xi\alpha \equiv \Omega_2 + k'\xi\beta$$

となる。

$$\therefore \quad k\xi\alpha \equiv k'\xi\beta + \xi \qquad (\because \ \Omega_2 - \Omega_1 \equiv \xi)$$

$$\therefore\quad k\alpha-k'\beta-1\equiv 0$$
$$k(px+qy+r)-k'(p'x+q'y+r')-1\equiv 0$$
$$\therefore\quad \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}$$

即2直線

$$px+by+r=0 \quad と \quad p'x+q'y+r'=0 \qquad 即 \quad \alpha=0 \quad と \quad \beta=0$$

は平行である。　(証明終り)

定理2の図で，I，J を虚円点に射影すると I，J を通る3つの2次曲線はすべて円になる。又無限遠直線は右図の直線 I_0J_0 になる。

定理 3.

3円 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ があるとき，各2円の共通弦3本は1点で交る。

というよく知られた命題になる。

他方で，この定理は今からわかるようにパスカルの定理の親戚である。

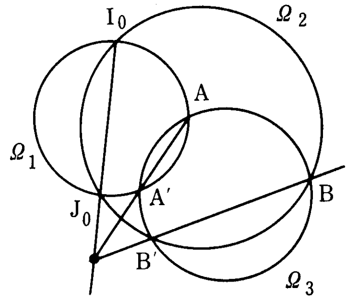

図3

先ずパスカルの定理を述べよう。

定理 4 (パスカル).

円に内接する6辺形 ABCDEF に於て相対する辺 AB, DE　AF, DC　BC, EF の夫々の交点 P, Q, R は同一直線上にある。

そこでこの定理を少し拡張したい。

定理 5.

3つの円錐曲線，Ω_0，Ω_1，Ω_2 がいずれも2点 I，J を通るとき，又 Ω_0 と Ω_1 の I，J 以外の交点を A，A′ とし，Ω_0 と Ω_2 のそれを B，B′ とする。同様に Ω_1 と Ω_2 の I，J 以外の交点を P，Q とする。次に直線 AA′ と BB′ の交点をRとするとき，3点 P, Q, R は一直線上にある。

(注意)　Ω_1，Ω_2 がいずれも2直線になった場合が普通のパスカルの定理である。

証明

直線 IJ，AA′，BB′ を前と同様に $\xi=0$，$\alpha=0$，$\beta=0$ とする。そこで

$$\Omega_1\equiv\Omega_0+k\xi\alpha=0,\quad \Omega_2\equiv\Omega_0+k'\xi\beta=0$$

である。

一般に$\Omega_1+h\Omega_2=0$ は $\Omega_1=0$ と $\Omega_2=0$ の交点 I, J, P, Q を通る2次曲線である。とくに $h=-1$ のとき

$$\Omega_1-\Omega_2=0 \qquad 即 \quad \xi(k\alpha-k'\beta)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

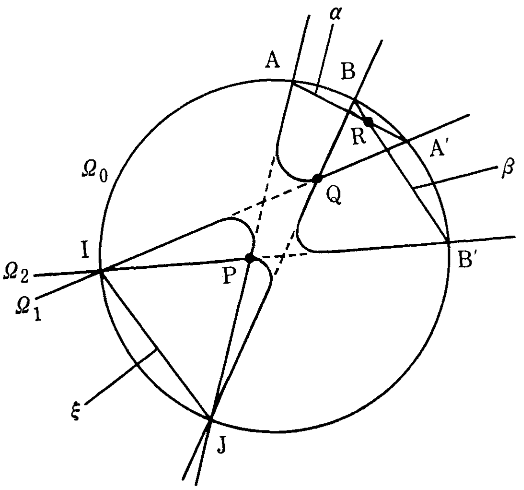

図4

も I, J, P, Q を通る2次曲線である。

(4) は一方2直線であることは明かである。そして $\xi=0$ は直線 IJ であるから直線

$$k\alpha-k'\beta=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

は残りの2点 P, Q を通る。

又直線 (5) は2直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ の交点Rを通らねばならぬ。即3点 P, Q, R は同一直線上にある。　　　　（証明終り）

この定理5の図で I, J を虚円点に射影すれば，3つの2次曲線 Ω_0, Ω_1, Ω_2 はいずれも円になる。そして3円 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ の夫々2円ずつの共通弦 AA′, BB′, PQ は一点Rを通る。即定理3を再びうる。

結局，射影変換だけで

パスカルの定理 ↔ 定理3 ↔ 定理1

なる関係があることが判った。

九州大学教養部数学教室