九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

パスカルの定理に関連して

津田, 丈夫 九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448978

出版情報:九州大学教養部数学雑誌. 10 (1), pp.17-20, 1975-08. 九州大学教養部数学教室

バージョン: 権利関係: Math. Rep. X-1, 1975.

パスカルの定理に関連して

津 田 丈 夫 (1975年4月26日受付)

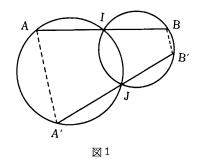
昨年の一般数学の講義の中で パスカルの定理の話をした。 それに関連して次の 2,3 の命題を述べたが,文献で見たことがないので報告したい。

定理 1. 2円 Ω_1 , Ω_2 が I, J で交って いる。夫々 I, J を通る 2つの 直線 AB, A'B' が各円と交る点を A, B A', B' とするとき

AA' // BB'

である。

これはよく知られている命題である。ここで I, J を虚円点に射影して新しい定理を得たいが、そのために少し拡張しておく。



定理 2. 2円 Ω_1 , Ω_2 が 2点 I, I で交っている。I, I を通る 2次曲線 Ω_3 が夫々の円と交る点を A, A' B, B' とすると

AA' // BB'

である。

証明

直線 IJ: lx+my+n=0 のことを今後は単に

 $\xi = 0$

と略記する。ここで

 $\xi \equiv lx + my + n$

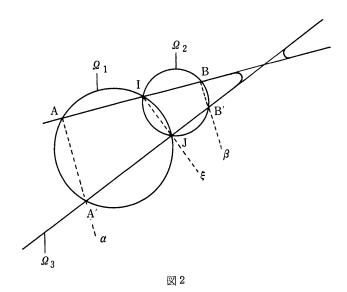
のことである。

同様にして

直線 AA': $\alpha=0$ 但し $\alpha\equiv px+qy+r$ $\beta=p'x+q'y+r'$ 円 Ω_1 : $\Omega_1=0$ Ω_2 $\Omega_2=0$ $\Omega_2\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c'$

とする。

さて



は 1 次方程式であるから直線である。 しかも連立方程式 $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$ を満足する点は Ω_1 上にあるから, Ω_2 の交点 Ω_2 の交点 Ω_3 の交点 Ω_4 を通る直線をあらわす。すなわち $\Omega_2-\Omega_1\equiv \pmb{\xi}$

としてよい。

すると 4 点 I, J, A, A' を通る任意の 2 次曲線は

$$\Omega_1 + k \xi \alpha = 0$$
 ········· (2)
 (k : 一定数)

と書くことが出来る。

何となれば (2) は 2 次曲線である,しかも $\Omega_1=0$ と $\xi=0$ の交点 I, J は曲線 (2) の点である。 同様に, $\Omega_1=0$ と $\alpha=0$ との交点 A, A' も曲線 (2) の点であるからである。

全く同様にして、4点 I, J, B, B' を通る2次曲線は

$$\Omega_2 + k' \xi \beta = 0 \qquad \dots \tag{3}$$

と書くことが出来る。

そこで (2), (3) が同一曲線 Ω 。をあらわすとすれば

$$\Omega_1 + k \boldsymbol{\xi} \alpha \equiv \Omega_2 + k' \boldsymbol{\xi} \beta$$

となる。

$$\therefore k\xi\alpha \equiv k'\xi\beta + \xi \qquad (\because \Omega_2 - \Omega_1 \equiv \xi)$$

$$k\alpha - k'\beta - 1 \equiv 0$$

$$k(px + qy + r) - k'(p'x + q'y + r') - 1 \equiv 0$$

$$\therefore \quad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}$$

即2直線

$$px+by+r=0$$
 と $p'x+q'y+r'=0$ 即 $\alpha=0$ と $\beta=0$ は平行である。

定理2の図で、I、J を虚円点に射影するとI、J を通る3つの2次曲線はすべて円になる。又無限遠直線は右図の直線I。J。になる。

定理 3.

3円 $arOmega_1, arOmega_2, arOmega_3$ があるとき,各2円の共通弦3本は1点で交る。

というよく知られた命題になる。

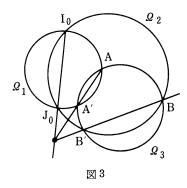
他方で、この定理は今からわかるようにパス カルの定理の親戚である。

先ずパスカルの定理を述べよう。

定理 4 (パスカル).

円に内接する 6 辺形 ABCDEF に 於て 相対 する 辺 AB, DE AF, DC BC, EF の夫々の 交点 P, Q, R は同一直線上にある。

そこでこの定理を少し拡張したい。



定理 5.

3つの円錐曲線、 Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 がいずれも 2点 I, J を通るとき,又 Ω_0 と Ω_1 の I, J 以外の交点を A, A' とし, Ω_0 と Ω_2 のそれを B, B' とする。 同様に Ω_1 と Ω_2 の I, J 以外の交点を P, Q とする。 次に 直線 AA' と BB' の交点を R とする とき,3点 P, Q, R は一直線上にある。

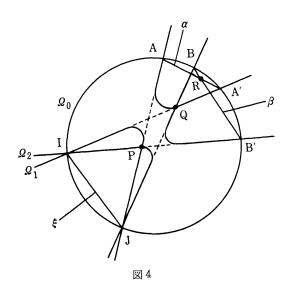
(注意) \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 がいずれも 2 直線になった場合が普通のパスカルの定理である。 証明

直線 IJ, AA', BB' を前と同様に $\xi=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$ とする。そこで

$$\Omega_1 \equiv \Omega_0 + k\xi\alpha = 0$$
, $\Omega_2 \equiv \Omega_0 + k'\xi\beta = 0$

である。

一般に Ω_1+ $h\Omega_2=0$ は $\Omega_1=0$ と $\Omega_2=0$ の交点 I,J,P,Q を通る 2 次曲線である。 とくに h=-1 のとき



も I, J, P, Q を通る2次曲線である。

(4) は一方 2 直線であることは明かである。そして $\xi=0$ は直線 IJ であるから直線

は残りの2点 P, Q を通る。

又直線 (5) は 2 直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ の交点 R を通らねばならぬ。即 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。 (証明終り)

この定理 5 の図で I, J を虚円点に射影すれば、3 つの 2 次曲線 Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 はいずれも円になる。そして 3 円 Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 の夫々 2 円ずつの共通弦 AA', BB', PQ は一点 R を通る。即定理 3 を再び 5 る。

結局, 射影変換だけで

パスカルの定理 ↔ 定理 3 ↔ 定理 1

なる関係があることが判った。

九州大学教養部数学教室