だ円の諸命題の初等的証明

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448977

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 10 (1), pp.13-15, 1975-08. 九州大学教養部数学教室

Math. Rep.
X-1, 1975.

だ円の諸命題の初等的証明

津　田　文　夫

(1975年4月25日受付)

だ円の定義

2定点 F, F′ に対して

$$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=2a \qquad (a=\text{定数})$$

である点Pの軌跡をだ円という。F, F′ を焦点という。

先ず次の定理を出発点とする。

基　本　定　理

だ円の周上の点Pに於ける接線と直線 FP, F′P の夫々となす角は等しい。

証明（本部均氏）

$$r+r'=2a \qquad r=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

両辺を弧の長さのペラメータ s で微分する。

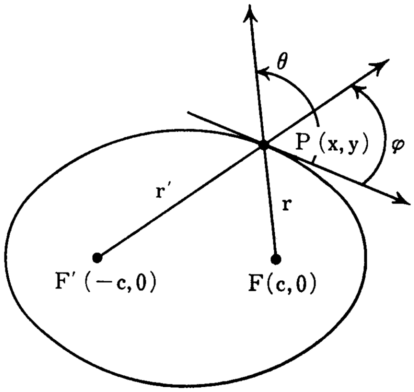

図1

$$\left(\frac{dr}{ds}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\left[\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial r}{\partial y}\right]\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{dx}{ds}\\[2ex]\dfrac{dy}{ds}\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{t}\right.$$

ここで $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{FP}}$, $\boldsymbol{t}$ はだ円の接線ベクトル。又 $\left|\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right|=1,\ |\boldsymbol{t}|=1,\Big)$

そこで

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{t}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\cdot\boldsymbol{t}=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta=-\cos\varphi \qquad \therefore\quad \pi-\theta=\varphi,$$

定　理　1.

だ円の接線へ焦点Fより下した垂線の足 R の軌跡は O（だ円の中心）を中心とする半径 a の円である。

証明

点Pに於ける接線に関するFの対称点をQとする。すると FQ とこの接線との交点がRである。さて

$$\angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{FPR}$$

一方　$\angle \mathrm{SPF'} = \angle \mathrm{FPR}$　（基本定理）

$$\therefore\ \angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{SPF'}$$

そこで F′, P, Q は一直線上にある。

$$\overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{F'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} = r + r' = 2a$$

さて，O，R が夫々線分 F′F，FQ の中点だから

$$\overline{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'Q}} = a$$

即 R は O を中心とし半径 a の点である。

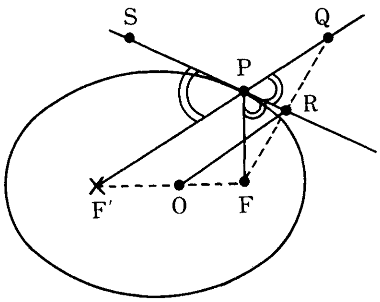

図2

定　理　2

だ円の接線へ，焦点 F，F′ より下した垂線の足を夫々 P，P′ とすれば

$$\overline{\mathrm{FP}} \cdot \overline{\mathrm{F'P'}} = 一定$$

である。

証明

O を中心とする半径 a の円を円 O と呼ぶ。PO が円と再び交る点を Q とする。すると P′, F′, Q は一直線上にある。

さてだ円の長軸を BA とすれば

$$\overline{\mathrm{P'F'}} \cdot \overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{BF'}} \cdot \overline{\mathrm{F'A}}$$
$$= (a-c)(a+c) = a^2 - c^2$$

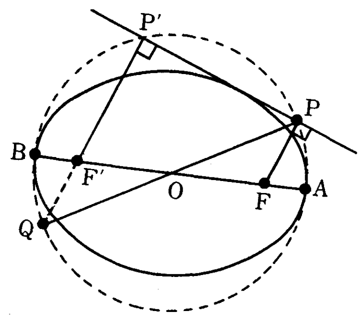

図3

定　理　3

Pより　だ円への2接線のなす角が直角であるとき FP，F′P が夫々の接線となす角は等しい。

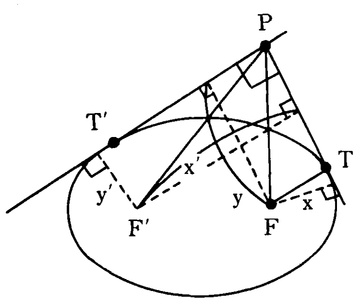

図4

証明

図4，5の如く x, y，x', y' とすれば

前の定理で

$$xx' = yy' = a^2 - c^2$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{x'}{y'}$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{FPT} = \angle \mathrm{F'PT'}$$

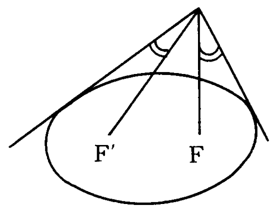

図5

定 理 4

だ円の互いに直交する接線の交点 P の軌跡は円である。

証明

$$\overline{\mathrm{FP}}^2 + \overline{\mathrm{F'P}}^2$$
$$= (x^2+y^2) + (x'^2+y'^2)$$
$$= (x'+y)^2 - 2x'y + (y'-x)^2 + 2xy'$$
$$= (x'+y)^2 + (y'-x)^2$$
$$(\because \quad x'y = xy' = a^2 - c^2)$$
$$= 4a^2$$

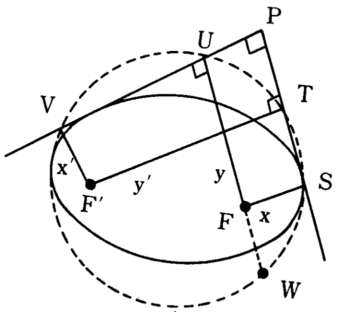

図6

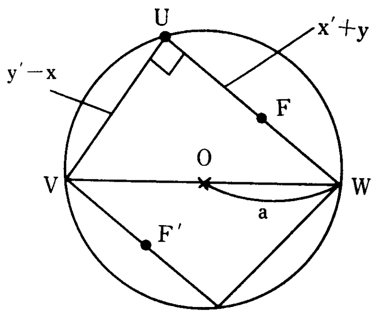

図7

故に $\overline{\mathrm{OP}}$ = 一定,

そこで P は O を中心とする円周上にある。

九州大学教養部数学教室