ある最大問題について

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448976

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 10 (1), pp.7-11, 1975-08. 九州大学教養部数学教室

Math. Rep.
X-1, 1975.

ある最大問題について

津　田　文　夫

(1975年4月26日受付)

中沢貞治氏が本号に発表される

“だ円に関する円命題”

では，metric のうち面積のことを除外している。これは円から1次変換でだ円に移れるので，面積に関しては円で成立してることから，だ円について言えるからである。

たとえば，正射影により円→だ円になるとき (1) 面積の比は不変である。(2) 平行な2直線は平行な2直線になる。(3) 同一直線上の線分の長さの比は不変である。

例 1. だ円の互いに共軛な2直径に平行な接線よりなる平行4辺形の面積は一定である。

例 2. だ円の互いに共軛な直径に平行な2接線と曲線で囲わる部分の面積は一定である。

例 3. だ円周上の任意の点Pを頂点とするすべての内接3角形の面積の最大値はPに無関係な一定値である。

たとえば

「だ円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ において，点 $C(c,\ 0)$ $(0<c<a)$ を通る弦を PQ とするとき，△OPQ (O はだ円の中心) の面積を S とすれば

(イ) $c \geqq \frac{a}{\sqrt{2}}$ ならば，S の最大値は ab で，c に関係しない。ただし，PQ の傾きは c に関係する。

(ロ) $c<\frac{a}{\sqrt{2}}$ ならば，S の最大値は c に関係するが，そのときの PQ は x 軸に垂直で c に関係しない。

このことを証明するには，だ円の代りに円を用いてもよい。その際，初等幾何によるか，あるいはPQの傾きを parameter として微分によれば，上のことは容易に証明できる。

ところが，式の美しさにひかれて，次の方法をとってみると，意外の抵抗に会ったので，書いてみることにした。

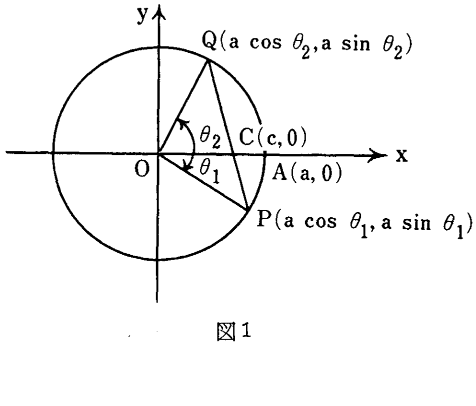

図1

Pの座標を

$$(a\cos\theta_1,\ a\sin\theta_1),\ \theta_1\in(-\pi,\ 0)$$

Q の座標を

$$(a\cos\theta_2,\ a\sin\theta_2),\ \theta_2\in(0,\ \pi)$$

ただし，$\theta_2-\theta_1\in(0,\ \pi)$

として論ずる。

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a\cos\theta_1 & a\sin\theta_1 & 1\\ a\cos\theta_2 & a\sin\theta_2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}a^2\sin(\theta_2-\theta_1) \tag{1}$$

で，弦 PQ は C を通ることから

$$\begin{vmatrix}c & 0 & 1\\ a\cos\theta_1 & a\sin\theta_1 & 1\\ a\cos\theta_2 & a\sin\theta_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

これから

$$c(\sin\theta_2-\sin\theta_1)-a\sin(\theta_2-\theta_1)=0 \tag{2}$$

(2) という条件下で (1) の最大値を求めるのであるから，Lagrange の乗数を用いる。

まず

$$F(\theta_1,\ \theta_2)=\frac{1}{2}a^2\sin(\theta_2-\theta_1)-\lambda\{c(\sin\theta_2-\sin\theta_1)-a\sin\theta_2-\theta_1)\}$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+a\lambda\right)\sin(\theta_2-\theta_1)-\lambda c(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

とし，θ_1, θ_2 の範囲を閉区間に変更し

$$\theta_1\in[-\pi,\ 0],\ \theta_2\in[0,\ \pi]$$

とする。$F(\theta_1,\ \theta_2)$ を θ_1, θ_2 で偏微分して

$$F_{\theta_1}=-\left(\frac{a^2}{2}+a\lambda\right)\cos(\theta_2-\theta_1)+\lambda c\cos\theta_1=0 \tag{3}$$

$$F_{\theta_2}=\left(\frac{a^2}{2}+a\lambda\right)\cos(\theta_2-\theta_1)-\lambda c\cos\theta_2=0 \tag{4}$$

(3)＋(4) から

$$\lambda c(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=0 \tag{5}$$

ここで，$c\neq0$ から

(i) $\lambda=0$ (ii) $\lambda\neq0$

の2つの場合が生ずる。

（i） $\lambda=0$ の場合

(3) から　$\cos(\theta_2-\theta_1)=0$

$$\therefore\quad \theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{2}$$

このとき，$S=\dfrac{a^2}{2}$ で

これは　たしかに S の最大値である。

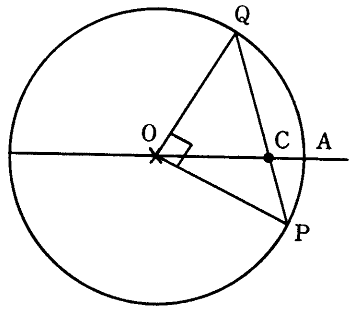

図2

また，(2) の条件から

$$\sin\theta_2-\sin\theta_1=\frac{a}{c} \tag{6}$$

ここで

$$\sin\theta_2=\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta_1$$

に注意すれば，(6) は

$$\cos\theta_1-\sin\theta_1=\sqrt{2}\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{c}$$

$$\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}\,c}$$

したがって

$$\frac{a}{\sqrt{2}\,c}\leqq 1\qquad \therefore\quad c\geqq\frac{a}{\sqrt{2}}$$

これから，$S_{\max}=\dfrac{a^2}{2}$ となるための必要十分条件は

$$c\geqq\frac{a}{\sqrt{2}}$$

で，これが（イ）に対応している。

(ii) $\lambda\neq 0$ の場合

(5) から　$\cos\theta_1=\cos\theta_2$

$$\therefore\quad \theta_1=-\theta_2$$

これを (2) に代入すれば

$$2c\sin\theta_2=a\sin2\theta_2=2a\sin\theta_2\cos\theta_2$$

これから

$$\sin\theta_2=0\qquad\therefore\quad \theta_2=0,\ \pi \tag{7}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{c}{a} \qquad \therefore \quad \theta_2 = \cos^{-1}\frac{c}{a} \tag{8}$$

となる。

さて，(2) の左辺を

$$G(\theta,\ \theta_2) = a(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + c\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

とおけば，これは2変数 θ_1, θ_2 の連続関数である。

したがって

$$G(\theta_1, \theta_2) = 0$$

は θ_1, θ_2, 平面における連続曲線で，かつ閉集合である。これを Ω とおく。また

$$\Sigma = \{(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in [-\pi, 0],\ \theta_2 \in [0, \pi],\ \theta_2 - \theta_1 \in [0, \pi]\}$$

とすれば，Σ と Ω の共通部分 Ω_0 も閉集合である。

したがって，面積 $S(\theta_1, \theta_2)$ は Ω_0 において，最大値および最も値をとる。

ところで，Σ の境界では $S=0$ である。これは (7) のとき，S は最小であることを示す。

したがって，(8) のとき S は最大となる。このとき

$$\theta_2 = -\theta_1 = \cos^{-1}\frac{c}{a}$$

であるから，PQ は x 軸に垂直である。

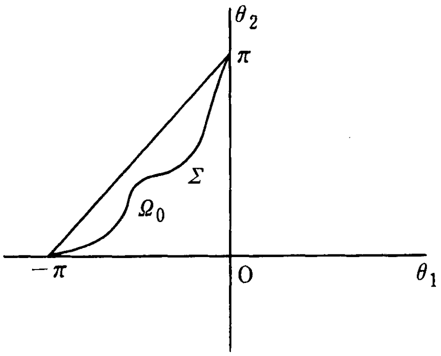

図3

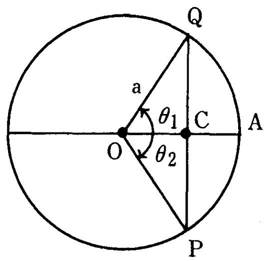

図4

なお，$\lambda \neq 0$ であるから

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) \neq 0$$

である。もし

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{9}$$

ならば，(3) から

$$\cos\theta_1 = 0 \qquad \therefore \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

このとき

$$\theta_2 = -\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\pi = -1$$

で，(9) と矛盾する。

すなわち

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) \neq 0 \qquad \therefore \quad \theta_2 - \theta_1 \neq \frac{\pi}{2}$$

これは

$$c < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

を意味する。ただし

$$S_{\max} = c\sqrt{a^2 - c^2}$$

で，これが（ロ）に対応する。

九州大学教養部数学教室