だ円に関する円命題

中沢, 貞治
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448975

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 10 (1), pp.1-6, 1975-08. 九州大学教養部数学教室
バージョン：

Math. Rep.
X-1, 1975.

だ 円 に 関 す る 円 命 題

中 沢 貞 治

(1975年4月26日受付)

〔1〕 だ円は円の射影であるから，位置的な性質は円からだ円に伝わる。

しかし，円に関する命題において，条件が角あるいは長さのような metric を含む場合は，円をだ円に変えれば，同じ結果とはならないのが普通である。

ところが，条件の中の角あるいは長さに，適当な制限をつければ，円をだ円と書き変えても，命題がそのまま成立することがある。

例を上げてみよう。

(i) 中心 O の円に，定角をなす 2 つの接線が引ける点を P とすれば，OP は定長である。

に対しては

(i)′ 中心 O のだ円に，直交する 2 つの接線が引ける点を P とすれば，OP は定長である。

が成り立つことを知っている。

この場合，(i) の定角を直角に制限すれば，円をだ円に変えても命題は成立するのである。

この (i) のような命題のことを**だ円に関する円命題**とよぶことにする。

よく似た例をもう 1 つ上げよう。

(ii) 中心 O の円で弦 PQ を引き，$\angle$POQ を定角にすれば，O から PQ に下した垂線 OH の長さは一定である。

(ii)′ 中心Oのだ円で弦 PQ を引き，$\angle$POQ を直角にすれば，O から PQ に下した垂線 OH の長さは一定である。

この場合も，(ii) の定角を直角に制限したのが (ii)′ である。

(ii) は明らかであるから，(ii)′ だけ証明する。

だ円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

とし

$$\mathrm{OP}=r_1,\ \mathrm{OQ}=r_2,$$
$$\angle x\mathrm{OP}=\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおけば

P の座標は　$(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$

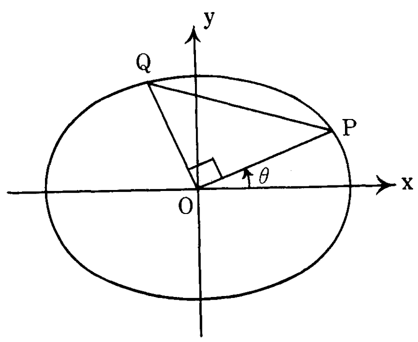

図1

Qの座標は $\left(r_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ r_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$,

すなわち，$(-r_2\sin\theta,\ r_2\cos\theta)$ で一般性を失わない。

このとき

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

から

$$r_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

同様にして

$$r_2=\frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

ここで，$\triangle$OPQ の面積を S とすれば

$$S=\frac{1}{2}\,\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\frac{1}{2}\,r_1r_2$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+r_2^2}\cdot\mathrm{OH}$$

これから

$$\frac{1}{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}{r_1r_2}=\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{1}{r_2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{a^2b^2}+\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

したがって

$$\mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ (=\text{一定})$$

〔2〕 次は長さに制限をつけた場合の円命題をあげよう。ただし，円における直径は，だ円においては長軸または短軸と読みかえる。

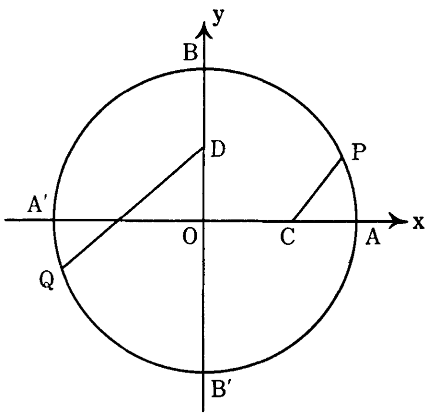

図2

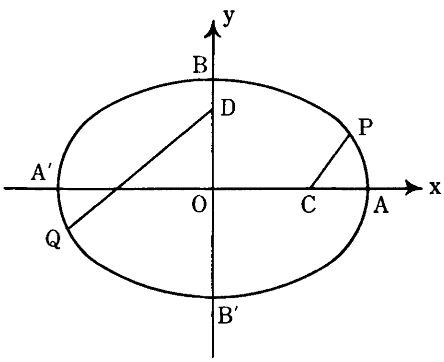

図3

(iii) 中心 O の直径を AA′ とし，OA 上の定点を C とする。このとき，C と円周上の点との最短距離は CA である。

(iii)′ 中心 O のだ円の長軸を AA′ とし，OA 上の定点を C とする。このとき，C とだ円上の点との最短距離は，C が A に十分近ければ CA である。

(iii) は当然であるから，(iii)′ について論ずる。

だ円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \tag{1}$$

とし，点 C の座標を $(c,\ 0)$ $(0<c<a)$ とする。

だ円上の点を

$$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq\pi\ \text{で一般性を失わない})$$

とすれば

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2=f(\theta)&=(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2\\&=(a^2-b^2)\cos^2\theta-2ac\cos\theta+b^2+c^2\end{aligned}$$

これから

$$f'(\theta) = -2(a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta+2ac\sin\theta$$
$$= 2(a^2-b^2)\sin\theta\left(\frac{ac}{a^2-b^2}-\cos\theta\right)$$

となる。したがって

$$\frac{ac}{a^2-b^2} \geqq 1 \qquad \therefore \qquad c \geqq \frac{a^2-b^2}{a} \tag{2}$$

のとき，$(0<\theta<\pi)$ で $f'(\theta)\geqq 0$ となり，$f(\theta)$ は増加する。これは $\theta=0$ のとき $f(\theta)$ が最小であることを示す。

すなわち，CA が最短距離である。

また，(2) のとき

$$\mathrm{CA} = a-c \leqq a-\frac{a^2-b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

で，(iii)′ において，C が A に十分近ければとしたのは

$$\mathrm{CA} \leqq \frac{b^2}{a} \tag{$*$}$$

を意味する。この右辺は，焦点を通り長軸に垂直な弦（古くは通径とよばれた）の長さの半分である。

次に

(iv) 中心Oの円の直径を BB′ とし，OB 上の定点を D とする。このとき，D と円周上の点との最長距離は DB′ である。

に対して

(iv)′ 中心 O のだ円の短軸を BB′ とし，OB 上の定点を D とする。このとき，D とだ円上の点との最長距離は，D が B′ から十分遠ければ DB′ である。

が成立するであろうか。(iv)′ を調べてみる。

だ円の方程式は (1) とし，D の座標を $(0, d)$ $(0<d\leqq b)$ とする。また，だ円上の点を

$$\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2} \text{ で一般性を失わない}\right)$$

とすれば

$$\mathrm{DQ}^2 = g(\theta) = (a\cos\theta)^2+(b\sin\theta-d)^2$$
$$= -(a^2-b^2)\sin^2\theta-2bd\sin\theta+a^2+d^2$$

これから

$$g'(\theta) = -2(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta-2bd\cos\theta$$
$$=-2(a^2-b^2)\cos\theta\left(\frac{bd}{a^2-b^2}+\sin\theta\right)$$

となる。したがって

$$\frac{bd}{a^2-b^2} \geqq 1 \qquad \therefore \qquad d \geqq \frac{a^2-b^2}{b} \tag{3}$$

のとき，$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ で $g'(\theta)<0$ となり，$g(\theta)$ は減少する。これは $\theta=-\frac{\pi}{2}$ のとき $g(\theta)$ が最大であることを示す。

すなわち，DB′ が最長距離である。

以上で，(iv)′ は (iv) に対する円命題になったように見えるが，条件の $0<d\leqq b$ から $d\leqq b$ を満足しなければならない。したがって

$$b \geqq \frac{a^2-b^2}{b} \qquad \therefore \qquad a^2 \leqq 2b^2 \tag{4}$$

を要する。

このことから，だ円そのものにも制限をつけないと円命題になれない。

しかし，(iv)，(iv)′ で，**OB 上の定点を D とする**とあるのを，**OB およびその延長上の定点を D とする**に変更すれば，(4) のような制限なしで円命題になる。この場合を (v)，(v)′ と名付けておこう。

さて，(v)′ とすれば，(3) が起こるとき

$$\mathrm{DB}' = d+b \geqq \frac{a^2-b^2}{b}+b = \frac{a^2}{b}$$

となり，D が B′ から**十分遠ければ**としたのは

$$\mathrm{DB}' \geqq \frac{a^2}{b} \tag{**}$$

を意味する。

〔3〕 ところで，(iii)′ と (v)′ には両者を統一する原理がありそうに思える。

この場合，円命題はだ円の曲率円に関係があると予測してみた。

だ円 (1) の上の点 (x, y) における曲率半径は

$$\rho = \frac{(a^2-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} \quad (e \text{ は離心率})$$

である。したがって

$$\mathrm{A}(a,\ 0) \text{ においては} \quad \rho_{\mathrm{A}} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

$$\mathrm{B}(0,\ -b) \text{ において} \quad \rho_{\mathrm{B}'} = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}$$

これらを (*)，(**) と見くらべれば予測の通りである。

いま，A における曲率円の中心を C_0，B′ における曲率円の中心を D_0 とすれば

$CA \leqq C_0A$ のとき (iii)′ は成立し，
$DB' \geqq D_0B'$ のとき (v)′ が成立する。

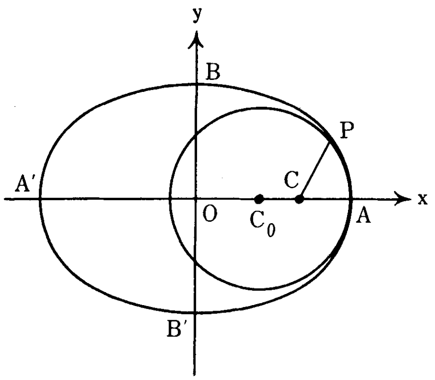

図4

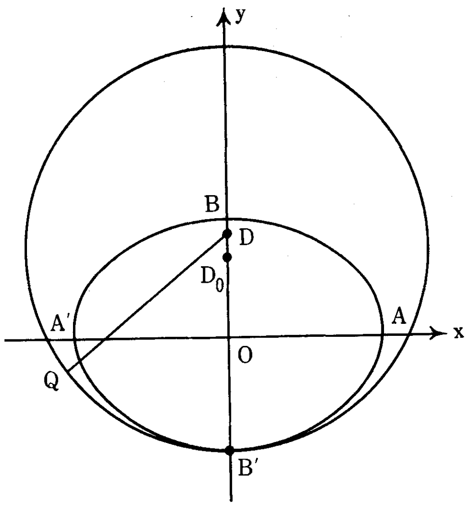

図5

(iii)′ の場合は，A における曲率円はだ円と超過接触し，図のようにだ円の内部にある。

したがって，C が C_0A の上にあれば，C とだ円上の点との最短距離が CA ということになる。また B′ における曲率円はだ円と超過接触し，図のようにだ円の外部にある。

したがって D が D_0 より上方にあれば，D とだ円上の点との最長距離は DB′ ということになる。

とくに，D_0 が OB 上にある条件は

$$\rho_{B'} = \frac{a^2}{b} \leqq 2b$$

であるから

$$a^2 \leqq 2b^2$$

を要し，これが (iv)′ のときである。

以上は，教養部の教科書への問題補充の意図で書いた。

なお，metric が面積の場合については，教科書の共著者津田丈夫氏が触れる。

九州大学教養部数学教室